G. LEJEUNE-DIRICHLETS

VORLESUNGEN

ÜBER DIE

LEHRE VON DEN EINFACHEN UND MEHRFACHEN BESTIMMTEN INTEGRALEN

G. LEJEUNE-DIRICHLETS

VORLESUNGEN

ÜBER DIE

LEHRE VON DEN EINFACHEN UND MEHRFACHEN BESTIMMTEN INTEGRALEN

HERAUSGEGEBEN

VON

G. ARENDT

MIT IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN ABBILDUNGEN

BRAUNSCHWEIG

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN

1904

VORREDE.

Das Buch, welches ich hiermit der Öffentlichkeit übergebe, hat zur Grundlage eine von mir mit grofser Sorgfalt meist am Tage des Vortrages selbst angefertigte und daher in hohem Grade zuverlässige und ganz lückenlose Ausarbeitung der von Dirichlet im Sommer 1854 an der hiesigen Universität in wöchentlich vier Stunden gehaltenen Vorlesung über die Lehre von den bestimmten Integralen und des zugehörigen einstündigen Publikums, in dem einige Anwendungen der im ersten Teile der Hauptvorlesung behandelten einfachen bestimmten Integrale gezeigt werden.

Zwar haben die gleichnamigen, von Dirichlet im Sommer 1858 an der Universität Göttingen gehaltenen Vorträge bereits in dem 1871 erschienenen und mit Recht als eines der besten Lehrbücher über diese Disziplin geschätzten Werke Gustav Ferdinand Meyers: „Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale zwischen reellen Grenzen“ weitgehendste Berücksichtigung gefunden. Gleichwohl kann dasselbe, da seinem Verfasser nur in der Vorlesung selbst gesammelte Notizen zu Gebote standen, „die nicht den ganzen Reichtum der ... Entwickelungen ... Dirichlets enthielten, ja hier und da sogar in dem die Formeln begleitenden Gedankengange Lücken zeigten, oder wegen der während des Kollegiums ihnen gegebenen kurzen Form bei der späteren Bearbeitung oft mit Mühe enträtselt werden mufsten“ (Vorwort, S. III), weder unbedingte Zuverlässigkeit für sich in Anspruch nehmen, noch als eine vollständige und hinreichend getreue Wiedergabe des Inhalts der Dirichletschen Vorträge und ihrer systematischen Ausgestaltung angesehen werden. Und dies um so weniger, als Meyer gleichzeitig, unter Verwertung der späteren Forschungen auf diesem Gebiete und der gewonnenen Resultate, die Abfassung eines ausführlichen

Lehrbuches der Theorie der bestimmten Integrale bezweckte und zu diesem Behufe in alle Teile desselben mehr oder minder umfangreiche eigene oder fremde Betrachtungen und Untersuchungen aufgenommen hat und dabei auch die Ordnung, in der Dirichlet die in Betracht gezogenen Lehren vorgeführt hatte, nicht streng innehalten konnte.

So fern mir nun auch jede Schmälerung des Verdienstes liegt, das sich Meyer mit seinem Buche erworben, so habe ich es dennoch von jeher bedauert, dafs durch seine Veröffentlichung die Dirichletsche Vorlesung nicht in vollkommener Reinheit und Unverfälschtheit bekannt geworden ist. Um so wärmeren Dank schulde ich der hochangesehenen Buchhandlung, dafs sie, ungeachtet der, einer so umfangreichen posthumen Dirichlet betreffenden Publikation entgegenstehenden Bedenken, meinem Anliegen auf Übernahme meines Buches in ihren Verlag aufs bereitwilligste entsprochen hat und demselben einen ehrenvollen Platz einräumt neben der berühmtesten und in ihren wiederholt erneuten Auflagen immer reicher ausgestalteten aller Dirichletschen Vorlesungen. So wird mir denn noch die Genugthuung zu teil, dieses überaus schöne und wohldurchdachte Kolleg des grofsen mathematischen Denkers und unübertroffenen Meisters in der Kunst der Didaktik dem mathematischen Publikum unterbreitet zu sehen, das in ihm eine überraschende Fülle jener tiefen grundlegenden Gedanken und feinen Untersuchungen vorfinden wird, von denen Lazarus Fuchs mit Bezugnahme auf Dirichlet in seiner Rektoratsrede vom 3. August 1900 gesagt hat, dafs sie so reiche Früchte für die mathematische Spekulation getragen haben, dafs nirgendwo in einer kurzen Spanne Zeit die Ernte für die Mathematik reicher gewesen ist.

Aufs peinlichste war ich bei der Abfassung meines Buches darauf bedacht, den Vortrag Dirichlets in seiner ganzen Ursprünglichkeit, ohne Kürzungen oder Veränderungen, aber auch ohne irgend welche eigene oder fremde Zusätze wiederzugeben. Wo sich Änderungen nicht vermeiden liefsen oder wünschenswert erschienen, habe ich in den „Anmerkungen“ gewissenhaft Rechenschaft davon gegeben und durch sorgfältige Registrierung aller irgendwie erheblichen Abweichungen dem Buche den höchstmöglichen Grad von Authenticität zu verleihen getrachtet. Auch bin ich durch wiederholt vorgenommene Vergleichung meiner Redaktion mit dem Ausarbeitungshefte veranlafst worden, an vielen Stellen mich noch enger dem Original anzuschließsen, indem sich bei eingehender Prüfung anfänglich für überflüssig Gehaltenes doch als mit gutem Vorbedacht oder als unentbehrliche Glieder einer Gedankenkette dem Vortrage eingefügt herausstellte. Insonderheit mufste bei allem Streben nach Kürze in der Darstellung, in der Entwickelung der Prinzipien und in den Beweisführungen durchaus mit der von Dirichlet nie aufser acht gelassenen erschöpfenden Gründlichkeit zu Werke gegangen werden. Nur für die im Text durch Sternchen kenntlich gemachte, im Verhältnis verschwindend kleine Zahl von Entwickelungen, zu denen auch das kurze letzte Kapitel (S. 375 bis 385) der Hauptvorlesung gehört, habe ich mir, ohne von jeder für notwendig befundenen Änderung in den „Anmerkungen" zu berichten, eine gröfsere Freiheit der Bewegung gewahrt, da jene Partien meines Heftes, die aus der von mir ebenfalls gehörten gleichnamigen Vorlesung des Jahres 1852 stammen, aber erst zwei Jahre darauf meiner Ausarbeitung in einem Anhange hinzugefügt worden sind, nicht in gleichem Mafse zuverlässig erscheinen können. Mein Heft hat mich auch befähigt, Dirichlet, wo es irgend angängig war — sicher nicht zum Nachteil der Darstellung — nahezu mit seinen eigenen Worten sprechen zu lassen und auch die Fremdwörter und gewisse Redewendungen zu gebrauchen, deren er sich mit Vorliebe bediente, die aber immer seinen Gedanken einen prägnanten und bezeichnenden Ausdruck verliehen.

Über eine nicht geringe Anzahl von Fragen, welche in der Vorlesung mehrfacher verschiedenartiger Behandlung unterzogen werden, sowie über manches Zusammengehörige oder sich gegenseitig Ergänzende, das getrennt voneinander an verschiedenen Stellen des Buches zur Sprache gebracht wird, ermöglicht das übersichtlich angelegte ausführliche Inhaltsverzeichnis eine leichte Orientierung.

Zwei erst in späterer Zeit eingeführte, aber heute allgemein verwendete Bezeichnungsweisen: die Angabe der Grenzbeziehung unter dem limes und die Weierstrafssche Bezeichnung der absoluten Werte durch $|a|$ u. s. w., die so wesentlich zur Erzielung gröfserer Kürze und zur Erhöhung des unmittelbaren Verständnisses der analytischen Ausdrücke beitragen, habe ich geglaubt, acceptieren zu sollen. Der Schwierigkeiten, welche in komplizierteren Fällen und namentlich, wenn gleichzeitig mehrere Grenzbeziehungen in Betracht kommen, mit der Verwendung des unterschriebenen limes verknüpft sind, bin ich mir freilich erst im Verlauf meiner Bearbeitung bewufst geworden: in den späteren Teilen des Buches bin ich in solchen Fällen vorsichtiger und sparsamer zu Werke gegangen. Was aber das so häufige und in vielen Fällen überflüssig erscheinende Einschliefsen auch von Quadratwurzeln zwischen Vertikalstrichen anlangt, so habe ich zu bemerken, dafs es, wenngleich wegen der positive Werte repräsentierenden grofsen Mehrzahl der bestimmten Integrale fast durchweg, so doch nur geschehen ist, wo auch Dirichlet ausdrücklich jedesmal hinzugefügt hat, dafs unter der Wurzel ihr numerischer Wert verstanden werden müsse.

Wohl bin ich mir bewufst, wie weit ich trotz Aufbietung meiner ganzen Kraft, mit der ich mich voll der Arbeit hingegeben, hinter dem erstrebten Ziele zurückgeblieben bin, und wie sehr ich wegen der formalen Mängel und selbst vereinzelter sachlicher Fehler, von denen es mir ungeachtet aller aufgewandten Mühe nicht gelungen ist, mein Buch ganz frei zu halten, nachsichtsvoller Beurteilung bedarf, die mir aber, so hoffe ich, unter billiger Rücksichtnahme auf den Umfang des Buches und die Schwierigkeit der behandelten Materien nicht versagt bleiben wird. Einige Irrtümer und Mifsverständnisse, welche mir selbst schon aufgefallen sind und nachträglich im Druckfehlerverzeichnis und in den „Anmerkungen“ richtig gestellt werden konnten, mögen hier kurz aufgeführt werden.

Über die auf S. 261 vorzunehmenden Verbesserungen gibt, aufser dem Druckfehlerverzeichnis, Anm. 73 (S. 391) die erforderliche Auskunft. — Ebenso wie dort, ist auch das unrichtige Citat S. 70, Z. 3 v. o. durch — wie ich erst verspätet konstatiert habe — von mir selbst herrührende irrtümliche Zusätze zu meinem Heft veranlafst worden. In Anm. 4 auf S. 472, die sich zugleich auf die zweite Herleitung der Produktdarstellung des sinus in § 12 der „Anwendungen“ bezieht, sind diese Mifsverständnisse aufgeklärt und berichtigt. Die erste Herleitung hingegen der Produktformel auf S. 69 und die Formel selbst müssen auf Dirichlets in der Vorlesung gegebene Darstellung zurückgeführt werden, so auffällig es auch ist, dafs er über die Mängel der Methode und die Fehler im erhaltenen Resultat so leichthin hinweggegangen ist. — Ebensowenig ist die Ausdehnung des Namens Potential auf ein allgemeineres als das Newtonsche Attraktionsgesetz (S. 358 bis 360) einer Nachlässigkeit von meiner

Seite zuzuschreiben, wie schon aus der wörtlich meinem Ausarbeitungsheft entnommenen Überschrift des § 140 zur Genüge hervorgeht. — Dahingegen habe ich es für unerläfslich erachtet, dem der wünschenswerten Klarheit ermangelnden zweiten Alinea des § 118 (S. 277) noch im Druckfehlerverzeichnis eine verbesserte Fassung zu geben. — Auch das darf ich endlich nicht ungesagt lassen, dafs ich nicht Zeit gefunden, die in so ungemein grofser Zahl eingeflochtenen Bemerkungen über nur im Vorbeigehen berührte, den behandelten Aufgaben verwandte oder aus ihnen sich ergebende Probleme, sowie die gelegentlich gemachten Literaturangaben nachzuprüfen, weshalb ich aufser stande bin, hier überall für unbedingte Richtigkeit einzutreten.

Fremde Hülfsmittel habe ich mit Ausnahme der Dirichletschen Abhandlung: „Über eine neue Methode zur Bestimmung der vielfachen Integrale" in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie, die mir bei der Redaktion des ersten Kapitels des achten Abschnitts in der Bearbeitung von Wangerin (Ostwalds Klassiker, Nr. 19) vorlag, nicht zu Rate gezogen. Die ausführlichere Arbeit Dirichlets über den diskontinuierlichen Faktor aus den Abhandlungen der Akademie, die ich gern bei der Ausarbeitung des zweiten Kapitels des achten Abschnitts eingesehen hätte, habe ich nicht mehr rechtzeitig auftreiben können. Meyers Lehrbuch und Riemanns „Partielle Differentialgleichungen, bearbeitet von Hattendorff" habe ich nur hin und wieder zur Vergleichung und Kontrolle herangezogen.

Von hohem Interesse ist es, Kroneckers „Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale, herausgegeben von E. Netto, Leipzig 1894" und die Dirichletsche Vorlesung miteinander zu vergleichen. Kronecker, der von 1883 an auf der hiesigen Universität die von Dirichlet i. J. 1842 eingeführten und seitdem an den meisten Hochschulen regelmäfsig gepflegten Vorträge über bestimmte Integrale wieder aufnahm, lag es, seiner Forschungsweise entsprechend, weniger an einer für den Anfänger berechneten planmäfsigen Unterweisung in den Elementen dieser Disziplin, als vielmehr an ausführlichem Eingehen auf einzelne besonders schwierige und verborgene Teile des Stoffes, deren eigenartiger, origineller Behandlung er sich alsbald nach Absolvierung der grundlegenden Begriffe und der Fundamentaleigenschaften zuwendet. Auch im einzelnen gewährt die Vergleichung der Auffassungsweise der beiden grofsen Mathematiker ganz besonderes Interesse. So will Kronecker, im Gegensatz zu Dirichlet und mit Rücksicht auf die den unbestimmten Integralen beizumessende Bedeutung, für zwischen Grenzen eingeschlossene Integrale die Bezeichnung als bestimmte Integrale nicht gelten lassen, während doch Dirichlets Ausführungen in den §§ 21 und 22 zeigen, dafs im Grunde genommen seine und Kroneckers Auffassung sich vollständig decken, zugleich aber darthun, dafs die angefochtene Benennung durchaus nicht unberechtigt ist. Desgleichen, wenn Kronecker betont, dafs man nicht, einem äufserlichen Prinzip zuliebe, die Behandlung einfacher und doppelter Integrale trennen dürfe, so sehen wir auch schon Dirichlet in den §§ 49 und 60 sich ganz in demselben Sinne aussprechen. In sehr vielen Untersuchungen und insonderheit, wo der zweite Mittelwertsatz Verwendung findet, kann es freilich nicht fehlen, dafs Kroneckers Behandlungsweise des Vorzuges teilhaftig ist, dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft angepafst zu sein: um so mehr mufs man Dirichlets, der mit diesem erst i. J. 1868 von P. du Bois-Reymond (Crelle Journal, Bd. 69) veröffentlichten Satz noch nicht operieren konnte, analytisches Geschick in der Handhabung des ihm allein zu Gebote stehenden ersten Mittelwertsatzes bewundern, den er seinen Zwecken so dienstbar zu machen weifs, dafs ihm mit seiner Hülfe unter gleichzeitiger geschickter Zerlegung in Teilintegrale die Lösung der schwierigsten Probleme gelingt.

Was die Quellennachweise in den Anmerkungen 77 bis 79 und 83 zu den §§ 119, 121, 129 und 137 betrifft, so beruhen sie zumeist auf eigenen Nachforschungen, wobei ich mich für die auf das Attraktionsproblem der Ellipsoide bezüglichen in Anm. 83, S. 393 f. hauptsächlich auf die sorgfältigen und zuverlässigen Angaben von Wangerin in Ostwalds Klassiker, Nr. 19 und von Grube in seinen Anmerkungen zu den von ihm herausgegebenen „Vorlesungen Dirichlets über die im umgekehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte“, 2. Aufl., Leipzig 1887, habe stützen können. Einige andere von meinen Literaturangaben verdanke ich der liebenswürdigen Bereitwilligkeit, mit der mir von privater befreundeter Seite die erbetene Auskunft erteilt worden ist.

Bezüglich der in meinem Buche beobachteten Rechtschreibung bemerke ich, dafs ich mich nach der amtlichen, Berlin 1902 herausgegebenen neuen Bearbeitung der „Regeln für deutsche

Rechtschreibung nebst Wörterverzeichnis" und nach Duden: „Orthographisches Wörterbuch der deutschen Sprache, 7. Aufl., Leipzig und Wien 1902" gerichtet habe. Nur mufste bei dem schon weit gediehenen Druck in den Wörtern *That* und *thun*, denen bis zu Anfang des vergangenen Jahres noch ihr *th* belassen worden war, diese Lautbezeichnung beibehalten werden. In allen Wörtern, wo nach den beiden angeführten Büchern für den *K*-Laut bezw. *Z*-Laut auch die Schreibung mit *c* zugelassen ist, habe ich dieser letzteren den Vorzug gegeben.

Ich schliefse mit dem Ausdruck des verbindlichsten Dankes, zu dem ich der Verlagsbuchhandlung verpflichtet bin, ebensosehr für die auf die schwierige und langwierige Drucklegung des Werkes verwendete grofse Mühe und Sorgfalt, wie für die Ausstattung, die sie meinem Buche gegeben hat.

Möge das Buch bei allen, die noch heute durch „das Interesse, welches sich an jeden von Dirichlet behandelten Gegenstand knüpft" (Kronecker, Sitzungsberichte d. Berliner Akademie, 1888, S. 418), gefesselt werden, einer günstigen Aufnahme begegnen und für die Studierenden der Mathematik als ein zur Festigung ihres Wissens und Förderung ihres Könnens besonders sich eignendes Lehrmittel befunden werden und als solches sich bewähren.

Berlin, im Mai 1904.

G. Arendt.

INHALTSVERZEICHNIS.

A. Die Lehre von den bestimmten Integralen.

Erster Teil.

Die einfachen Integrale.

Erster Abschnitt.

Begriff und Grundeigenschaften der bestimmten Integrale.

Die drei Eulerschen Formeln.

Drittes Kapitel.

Zweite Begriffserweiterung: Unendlichwerden der Integralfunktion.

Die Aufgabe bei unbekanntem Wert des unbestimmten Integrals.

Viertes Kapitel.

Ergänzende Sätze zur ersten Begriffserweiterung.

Dritter Abschnitt.

Die Eulerschen Integrale.

Erstes Kapitel.

Hülfssätze.

Bestimmte Doppelintegrale.

(s. a. Abschnitt VI, Kapitel I, S. 223 ff.)

Zweites Kapitel.

Die Eulerschen Integrale.

s. a. „Anwendungen“ II, III, IV.

Vierter Abschnitt.

Einführung komplex imaginärer Parameter. — Aus der Gammafunktion abgeleitete Integrale.

Das Integral $\int\limits_0^\infty e^{-kx^2} \frac{\cos 2\alpha x}{p^2 + x^2} dx$.

Das Integral $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-kx}\,dx}{p^2 + x^2}$.

Differentiieren unter dem Integralzeichen.

Zweiter Teil.

Die mehrfachen Integrale.

Sechster Abschnitt.

Die Doppelintegrale.

Erstes Kapitel.

Theorie des Doppelintegrals.

Transformation des Doppelintegrals.

Zweites Kapitel.

Anwendung der Lehre von den Doppelintegralen auf die Inhaltsbestimmung krummer Oberflächen.

I. Theorie der Komplanation.

II. Komplanation des Ellipsoids.

Siebenter Abschnitt.

Die dreifachen Integrale,
insbesondere angewandt auf
das Problem der Attraktion der Ellipsoide.

Erstes Kapitel.

Theoretische Grundlagen des allgemeinen Attraktionsproblems.

Zweites Kapitel.

Attraktion der homogenen Ellipsoide auf einen inneren Punkt.

Drittes Kapitel.

Attraktion der homogenen Ellipsoide auf einen äufseren Punkt.

Achter Abschnitt.

Die vielfachen Integrale, behandelt nach der Methode des diskontinuierlichen Faktors.

Erstes Kapitel.

Das Problem der Attraktion der Ellipsoide.

*Zweites Kapitel.

Weitere Verwendbarkeit des diskontinuierlichen Faktors.

Das vielfache Integral $\int\int\int \cdots x^{a-1}\,dx\,y^{b-1}\,dy\,z^{c-1}\,dz \cdots$.

Anwendungen.

B. Einige Anwendungen der bestimmten Integrale.

I. Summation der harmonischen Reihe. Das Integral

$$\int_0^1 \frac{x^{b-1} - x^{a-1}}{x^a - 1}\, dx.$$

ERSTER TEIL.

DIE EINFACHEN INTEGRALE.

Erster Abschnitt.

Begriff und Grundeigenschaften der bestimmten einfachen Integrale.

Stetige, eindeutige Funktionen.

1. Definition. — Die Definition eines bestimmten Integrals stützt sich auf den für die ganze Analysis grundlegenden Begriff der Stetigkeit und Eindeutigkeit einer Funktion.

$y = f(x)$ wird eine stetige und eindeutige oder einwertige Funktion von x genannt, wenn zu jedem Werte von x nur ein Wert von y gehört, und wenn einer allmählichen Veränderung von x auch eine allmähliche Veränderung von y entspricht, d. h. wenn für ein festes x die Differenz

$$f(x + h) - f(x)$$

mit beständig abnehmendem h gegen Null konvergiert.

Stellt man also die Gleichung

$$y = f(x)$$

graphisch dar, indem man x als Abscisse, y als senkrechte Ordinate der durch sie repräsentierten Kurve betrachtet, so erfordert die Einwertigkeit und Stetigkeit der Funktion y, daſs folgende beide Bedingungen erfüllt seien: 1) die Gleichung darf zu jeder Abscisse x nur eine Ordinate y zugehörig liefern; 2) die Kurve muſs zusammenhängend sein, d. i. der Übergang von einem Punkte derselben zum nächstfolgenden muſs sich allmählich, ohne Sprung vollziehen, und der ganze Trakt von Punkten ein Kontinuum bilden. Sollte aber die Gleichung mehrdeutig sein, indem sie für ein x mehrere Werte von y lieferte, so könnte man sie doch in unsere Betrachtung einbeziehen, wofern man nur von den verschiedenen Branchen der Kurve eine bestimmte auswählte.

Die Stetigkeit braucht der Funktion nur in einem gewissen Intervall vindiciert zu werden, z. B. für alle Werte von x, die zwischen den Grenzen oder extremen Werten $x = a$ und $x = b$ liegen, während aufserhalb dieser Grenzen $f(x)$ beiderseits von ganz beliebiger Beschaffenheit sein dürfte.

Zur Stetigkeit einer Funktion wird auch noch erfordert, dafs alle ihre Werte durchaus endlich seien.

Wohl aber ist zu bemerken, dafs der Begriff der Funktion $y = f(x)$ zur einzigen Voraussetzung die Abhängigkeit der Variablen y von der Variablen x hat, aber keineswegs erfordert, dafs die Funktion, um der Bedingung der Stetigkeit zu genügen, mathematisch definiert sei. Und ist dieses der Fall, so brauchte darum noch nicht die ihr zu Grunde liegende Rechnungsoperation notwendig innerhalb des ganzen zu betrachtenden Intervalles ein und dieselbe zu sein. Mit anderen Worten: die Kurve kann entweder rein graphisch, durch einen beliebigen Zug der Hand gegeben sein, oder sie kann aus dem Bogen einer oder auch verschiedener analytischer Kurven bestehen.

Schliefslich sei noch darauf aufmerksam gemacht, dafs im folgenden unter den Gröfsen a, b u. s. w. stets, wenn es nicht ausdrücklich anders bemerkt ist, ihre algebraischen und nicht ihre rein numerischen Werte zu verstehen sind. Es ist also $a \gtrless b$, je nachdem die Differenz $a - b$ positiv oder negativ ist.

2. Fundamentaleigenschaft der stetigen Funktionen. — „Es sei $y = f(x)$ eine in dem endlichen Intervall von a bis b stetige Funktion von x, und unter Teilintervall verstehe man die Differenz jeder zweier beliebigen Werte von x, also jedes beliebige Stück der Abscissenachse zwischen a und b. Dann besteht immer die Möglichkeit, zu einer beliebig klein gewählten absoluten Gröfse ϱ eine zweite ihr proportionale kleine Gröfse σ von solcher Beschaffenheit zu finden, dafs in jedem Teilintervall, welches $\leqq \sigma$ ist, die Funktion y sich um nicht mehr als höchstens ϱ ändert."

Zum Beweise dieses Satzes bedienen wir uns der bequemeren Darstellungsweise wegen der geometrischen Auffassung. Man gehe von dem Anfangswerte a aus nach der Seite hin, wo b liegt, und endige, ohne einen Wert von $f(x)$ ununtersucht zu lassen, das erste Teilintervall in dem Werte c_1 von x, für welchen zum erstenmal die Funktion genau um das gegebene absolute ϱ von ihrem Anfangswerte $f(a)$ verschieden ist, so dafs man hat:

$$f(c_1) - f(a) = \pm \varrho,$$

wo das Zeichen von ϱ nicht von unserem Belieben, sondern von der Beschaffenheit der stetigen, sonst aber ganz willkürlichen Kurve abhängig ist, deren Ordinaten mithin bald wachsen, bald abnehmen können. Für jeden zwischen a und c_1 gelegenen Wert von x mufs dann $|f(x) - f(a)| < \varrho$ sein; denn wäre für ein solches x diese Differenz $= \varrho$, so hätte man schon bei diesem früheren x das erste Teilintervall schliefsen müssen; und gröfser als ϱ kann die Differenz erst recht nirgends werden, weil sie wegen der Stetigkeit der Funktion $f(x)$ alsdann schon für einen früheren Wert von x gleich ϱ, und zwar mit demselben Zeichen, hätte sein müssen.

Genau auf dieselbe Weise fahre man fort: ausgehend von c_1, bezeichne man mit c_2 denjenigen Wert von x, für welchen jetzt $f(x)$ zum erstenmal um $\pm \varrho$ von dem Anfangswerte $f(c_1)$ differiert, so dafs man wiederum hat: $f(c_2) - f(c_1) = \pm \varrho$, aber für jedes x innerhalb c_1 und c_2: $|f(x) - f(c_1)| < \varrho$; u. s. w. f.

So erhält man eine Reihe von Werten:

$$a, \; c_1, \; c_2, \; c_3, \; \ldots$$

von der eben bezeichneten Beschaffenheit, und die in demselben Sinne aufeinander folgen wie b auf a, d. h. immer gröfser oder kleiner werden, je nachdem $b \gtrless a$ ist.

Es fragt sich aber, ob auch das ganze Intervall von a bis b durch eine endliche Anzahl dieser Werte ausgefüllt werden wird, ob man also schliefslich zu einem letzten c_u gelangt, das entweder mit b zusammenfällt oder so nahe an b liegt, dafs zwischen ihm und b die Funktion $f(x)$ überall sich um weniger als ϱ von $f(c_u)$ unterscheidet.

Wäre dies nicht der Fall, so hätte man eine unendliche Reihe von Zwischenwerten c, die aber doch gegen einen festen, endlichen, zwischen a und b befindlichen oder auch mit b zusammenfallenden Wert C konvergieren, also, je entfernterer sie in der Reihe sind, um so näher an diese Grenze heranrücken müfsten. Sind mithin c_μ und $c_{\mu+1}$ irgend zwei aufeinander folgende Glieder der unendlichen Reihe, so bliebe zwar für sie immer die Bedingung bestehen:

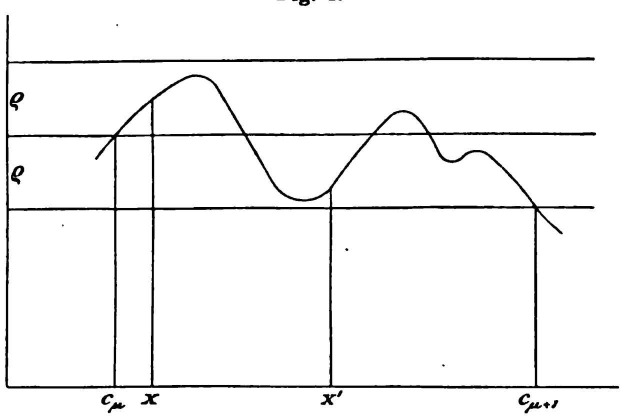
$$(1) \qquad f(c_{\mu+1}) - f(c_\mu) = \pm \varrho;$$

je mehr man aber μ wachsen liefse, um so mehr müfsten infolge der Stetigkeit der Funktion $f(x)$ die beiden Differenzen $f(C) - f(c_\mu)$ und $f(C) - f(c_{\mu+1})$ abnehmen, so dafs man es für ein gehörig grofses μ dahinbringen könnte, dafs sie sich beide beliebig wenig von Null unterschieden und jedenfalls kleiner würden als das gegebene feste ϱ oder auch als $\frac{\varrho}{2}$. Dann würde aber auch, im Widerspruch mit der Bedingung (1), je nachdem man es weit genug treibt, die Differenz der beiden Differenzen: $|f(c_{\mu+1}) - f(c_\mu)| < 2\varrho$ oder $< \varrho$.

Es kann daher das Intervall $b - a$ nur eine endliche Anzahl von Teilintervallen von der geforderten Beschaffenheit enthalten.

Das kleinste dieser Teilintervalle werde nun in seinem absoluten Werte $= \sigma$ gesetzt. Betrachten wir alsdann irgendwo zwischen a und b zwei im übrigen ganz beliebig gewählte Funk-

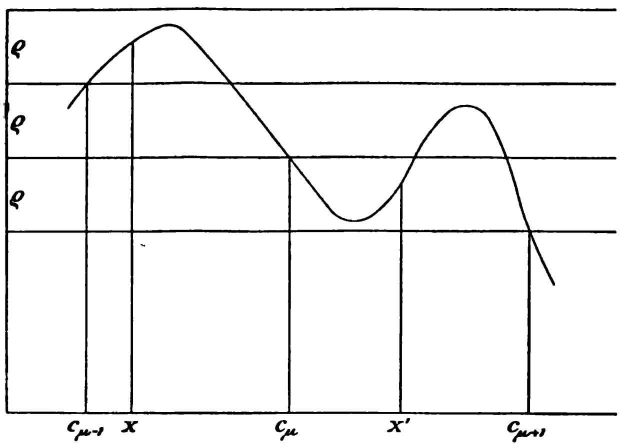
Fig. 1.



tionalwerte $f(x)$ und $f(x')$, nur dafs ihr Abstand $|x' - x|$ höchstens $= \sigma$ sein soll, so werden die zugehörigen Abscissenwerte x und x' offenbar entweder in ein und dasselbe oder in zwei aufeinanderfolgende Teilintervalle fallen. Aus der Anschauung der Fig. 1 und 2 überzeugt man sich aber sofort, dafs sich die Funktion $f(x)$ selbst für die ihrer Gröfse nach am weitesten auseinanderliegenden Werte, und wie auch die Kurve verlaufen möge, in dem Raume $x' - x$ im ersteren Falle (Fig. 1) nur um weniger als $2\,\varrho$, im zweiten Falle (Fig. 2) höchstens um $3\,\varrho$ ändern kann.

Damit ist unser Satz vollkommen streng bewiesen. Denn ersetzt man die gegebene beliebig kleine Gröſse ϱ durch $\frac{1}{3}\varrho$, also ihr Dreifaches durch ϱ, was natürlich nicht hindert, dieses neue ϱ willkürlich klein zu wählen, so ergibt sich durch die oben befolgte Konstruktion eine kleine Gröſse σ von solcher Be-

Fig. 2.



schaffenheit, daſs, wenn irgend ein x zwischen a und b um nicht mehr als dieses σ zu- oder abnimmt, sich das zugehörige $f(x)$ höchstens um ϱ ändert. Selbstverständlich wird σ um so kleiner werden, je kleiner man ϱ wählt, aber immer wird einem fest bestimmten Werte von ϱ auch ein bestimmter Wert von σ entsprechen.

Bemerkung. — Diese Eigenschaft der stetigen Funktionen möchte zwar auf den ersten Blick so einleuchtend erscheinen, als ob sie gar keines Beweises bedürfte; derselbe rechtfertigt sich aber einerseits aus dem Grunde, weil sich auf jene Eigenschaft wesentlich der Begriff des bestimmten Integrals stützt, ohne dessen klares Verständnis auch in der ganzen Theorie keine Sicherheit erzielt werden kann, anderseits aus dem Umstande, daſs der Satz nur unter den aufgestellten Beschränkungen richtig ist, hingegen nicht immer wahr bleibt für ein unendliches Intervall, selbst wenn die Funktion überall endlich und stetig wäre.

Dies ist z. B. der Fall mit der Funktion

$$f(x) = \sin(x^2),$$

die immerfort stetig und endlich von $x = -\infty$ oder 0 bis zu $x = \infty$ periodisch zwischen 1 und -1 hin und her geht und für je zwei um $\frac{\pi}{2}$ auseinander liegende Werte des arcus x^2, falls dieselben in die Endpunkte der Quadranten fallen, um ± 1 differiert. Denn bezeichnet h eine noch so kleine, aber feste Gröfse, immer wird es in der unendlichen Ausdehnung von 0 bis ∞ so weit entfernte Werte von x geben, und für welche zugleich x^2 ein Multiplum von $\frac{\pi}{2}$ wäre, dafs für dieselben die Differenz

$$(x + h)^2 - x^2 = 2hx + h^2$$

gleich $\frac{\pi}{2}$ oder π oder noch gröfser würde, mithin in dem zugehörigen Teilintervall h die Funktion $\sin(x^2)$ jedenfalls sich um den gröfstmöglichen Wert 1 oder 2 veränderte. Daraus ergibt sich die Unmöglichkeit, gemäfs der Analyse unseres Beweises den einem beliebig klein gewähten ϱ entsprechenden festen, unveränderlichen Grenzwert σ zu bestimmen; vielmehr müfste dieses σ an jeder Stelle ein anderes und mit wachsendem x abnehmendes sein. Zwar würde, je kleiner h ist, für um so mehr Intervalle vom Anfang $x = 0$ an die Bedingung betreffs ϱ erfüllt sein, aber indem die Intervalle beständig kleiner werden, könnte man zu dem kleinsten, das wir σ nannten, und das den folgenden Beweis stützte, gar nicht gelangen.

Begriff des bestimmten Integrals.

3. Geometrische Herleitung der Definitionsgleichung. — Es sei

(1) $$y = f(x)$$

eine zwischen den endlichen, festen Grenzen a und b stetige Funktion von x. In beliebigen Abständen voneinander schalte man zwischen a und b $n-1$ Zwischenwerte $x_1, x_2, \ldots$ ein, die in demselben Sinne aufeinander folgen sollen wie b auf a. Durch die Werte:

(2) $$a, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, b,$$

denen die Funktionalwerte:

(2′) $f(a), \quad f(x_1), \quad f(x_2), \quad \ldots \quad f(x_{n-1}), \quad f(b)$

zugehören, wird das Intervall a, b in die n Teilintervalle:

(2″) $x_1 - a, \; x_2 - x_1, \; x_3 - x_2, \ldots b - x_{n-1}$

zerlegt, die durchweg dasselbe Vorzeichen haben, wie die Differenz $b - a$ selbst, und deren Summe natürlich $= b - a$ ist. Multipliciert man nun eine jede dieser Differenzen mit dem homologen Funktionalwert (2′) bis zu $f(x_{n-1})$ hin und bildet die Summe „S“ der n Produkte, so hat man die Gleichung:

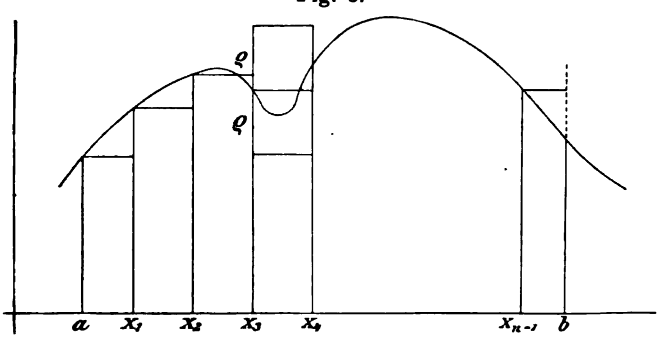
$$(3)\quad \begin{aligned} S = f(a)\cdot(x_1 - a) + f(x_1)\cdot(x_2 - x_1) + f(x_2)\cdot(x_3 - x_2) + \cdots \\ + f(x_{n-1})\cdot(b - x_{n-1}) \end{aligned}$$

oder, wenn noch der Gleichmäfsigkeit wegen $a = x_0$, $b = x_n$ gesetzt wird, in abgekürzter Form unter Anwendung des Summenzeichens:

$$(3')\qquad S = \sum_{\mu=0}^{n-1} f(x_\mu)\cdot(x_{\mu+1} - x_\mu).$$

Es soll jetzt zunächst durch geometrische Betrachtungen, die den Vorzug der unmittelbaren Anschaulichkeit gewähren, nachgewiesen werden, dafs, wenn man die Anzahl der Zwischenwerte x_μ in ganz beliebiger Weise unaufhörlich vermehrt, so dafs

Fig. 3.



man schliefslich unendlich viele, unendlich kleine Teilintervalle (2″) erhält, die Summe S nach einem gewissen, festbestimmten Grenzwert hinstrebt, dem man also um so näher kommen wird, je gröfser die Anzahl der Teilintervalle ist.

Man zeichne (Fig. 3), indem $b > a$ vorausgesetzt werden möge, die durch die Gleichung (1) dargestellte Kurve und zu allen Abscissenwerten (2) die zugehörigen senkrechten Ordinaten (2′); dann drückt S die Summe der n Rechtecke aus, die entstehen, wenn man durch den Endpunkt jeder Ordinate eine Parallele zur Abscissenachse bis zur nächstfolgenden Ordinate zieht. Behalten nun ϱ und σ die ihnen im vorigen Paragraphen beigelegte Bedeutung bei, und wird vorausgesetzt, dafs sämtliche Teilintervalle (2″) durch Annäherung an ihre Grenze bereits $\leqq \sigma$ geworden seien, so mufs, wenn man im Endpunkte irgend einer Ordinate, z. B. $f(x_3)$, nach beiden Seiten ein Stück $= \varrho$ aufträgt und durch die Endpunkte dieser beiden Strecken Parallelen mit der Abscissenachse bis zur folgenden Ordinate $f(x_4)$ zieht, gemäfs dem Satze des § 2 das ganze zwischen diesen beiden Ordinaten befindliche Stück der Kurve in das Rechteck hineinfallen, dessen Seiten $x_4 - x_3$ und 2ϱ sind. Der von denselben beiden Ordinaten und den dazwischenliegenden Stücken der Abscissenachse und der Kurve eingeschlossene Flächenraum ist mithin kleiner als das entsprechende „äufsere" Rechteck mit der Seite $f(x_3) + \varrho$, und gröfser als das „innere" Rechteck mit der Seite $f(x_3) - \varrho$. Und da diese Beziehungen an jeder Stelle zwischen a und b statthaben, so folgt, dafs, wenn man überall die Konstruktion der beiden kleinen Rechtecke wiederholt, die Gröfse des ganzen Flächenraumes, der von den beiden Ordinaten $f(a)$ und $f(b)$, dem Stücke $b - a$ der Abscissenachse und dem zugehörigen Kurvenstück begrenzt wird, und den wir mit A bezeichnen wollen, zwischen der Summe aller „äufseren" Rechtecke und der Summe der entsprechenden „inneren" Rechtecke liegt. Diese beiden geometrischen Summen drückt aber die (3) aus, wenn man in ihr jede Ordinate um ϱ vergröfsert bezw. verkleinert, wodurch man dann auf der linken Seite $S + \varrho(b - a)$ bezw. $S - \varrho(b - a)$ erhält. Mithin hat man:

$$S + \varrho(b - a) > A > S - \varrho(b - a),$$

und hieraus umgekehrt:

$$A + \varrho(b - a) > S > A - \varrho(b - a).$$

Da nun ϱ so klein vorausgesetzt werden kann, als man nur will, und effektiv, wenn man unendlich viele Zwischenwerte einschaltet, bis zu Null abnimmt, und dasselbe von dem Produkt von ϱ mit der endlichen Differenz $b - a$ gilt, so unterscheiden sich $A + \varrho(b - a)$ und $A - \varrho(b - a)$, um so mehr das zwischen ihnen liegende S beliebig wenig von A selbst, d. h. die Summe S geht in den festen Wert A über, oder dieser Flächenraum A ist der feste Grenzwert oder der limes, gegen den die Veränderliche S konvergiert. Denn in der höheren Analysis sagt man, eine Veränderliche hat einen bestimmten Grenzwert, dem sie sich unaufhörlich nähert, wenn die Differenz zwischen diesem festen Werte und der Veränderlichen ohne Ende bis zu Null abnimmt.

War dies Ergebnis auch leicht aus der geometrischen Anschauung vorauszusehen, so bedurfte es gleichwohl eines in aller Strenge zu führenden Nachweises, denn da mit den beständig abnehmenden Differenzen (2″) sich auch S immerfort ändert, so ist an sich nicht klar, ob diese Summe in einen festen Wert übergeht, oder ob sie nicht vielmehr unaufhörlich hin und her oscilliert.

Den Grenzwert der Reihe S nennt man das zwischen den Grenzen a und b genommene oder von a bis b sich erstreckende bestimmte Integral der Funktion $f(x)$ nach x und bezeichnet ihn durch das Symbol

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{4'}$$

Deutet man also wie üblich den Übergang zur Grenze dadurch an, dafs man vor den betreffenden Ausdruck „lim“, die Anfangsbuchstaben von limes, setzt und darunter angiebt, auf welchen Wert der Veränderlichen sich der limes bezieht[1]), so stellt

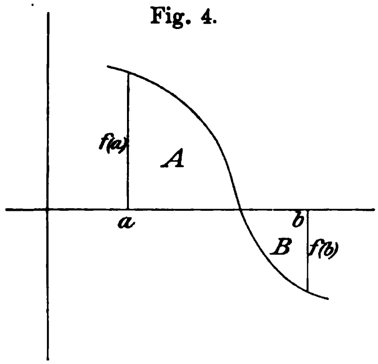
$$\begin{aligned}&\lim_{n=\infty}\big(f(a)\cdot(x_1-a)+f(x_1)\cdot(x_2-x_1)+\cdots\\&\qquad+f(x_{n-1})\cdot(b-x_{n-1})\big)=\int_a^b f(x)\,dx\end{aligned} \tag{4}$$

die Definitionsgleichung der bestimmten Integrale dar. Der limes erfordert, dafs sämtliche Differenzen $x_1-a, \ldots$ bis ins Unendliche abnehmen, mithin die Reihe aus unendlich vielen Gliedern besteht. a und b werden wegen ihres lokalen Vorkommens am Zeichen $\int$ die untere bezw. obere Grenze des bestimmten Integrals genannt; a ist die Grenze, bei welcher die Teilung beginnt, b diejenige, bis zu welcher sie fortgeführt wird. In der ganz modernen, aber wegen ihrer Zweckmäfsigkeit nicht mehr zu entbehrenden Bezeichnung durch das Symbol (4′), statt deren Euler noch immer $\int\limits_{\substack{x=a\\x=b}} f(x)\cdot dx$ schrieb, deutet das Zeichen $\int$, ein verzogenes S, eine Summe an, nicht von effektiven

Summanden, sondern von solchen, die in einem kontinuierlichen Prozefs, in fortwährendem Flufs begriffen sind, durch stetige Veränderung von x von dem Werte $x = a$ an bis zu $x = b$ hin, so dafs $f(x)$ einen jeden dieser Werte vorstellt. Die unendlich kleine Differenz, mit der $f(x)$ noch multipliciert ist, kann auch als konstant angesehen werden und wird daher wegen der Beziehungen zur Differentialrechnung in geeigneter Weise mit dx bezeichnet. Der unter dem Zeichen $\int$ stehende Summand $f(x)dx$ wird das Element des Integrals genannt und ist nichts anderes als der unendlich schmale und unendlich kleine Streifen des Flächenraumes A zwischen zwei benachbarten Ordinaten.

4. Vorzeichen des Integrals. — In der Fig. 3 liegt die Kurve oberhalb der Abscissenachse; alle ihre Ordinaten sind mithin positiv, und da, weil $b > a$, dasselbe von allen Differenzen dx gilt, so ist auch das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ und der durch dasselbe dargestellte Flächenraum A selbst durchaus positiv. Liegt aber die Kurve unterhalb der Abscissenachse, ist also $f(x)$ negativ, so wird für $b > a$ auch das Integral und der Flächenraum A negativ. Umgekehrt verhält es sich, wenn die obere Grenze b kleiner als die untere Grenze a ist, also alle Differenzen dx negativ sind. Alsdann ist das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ und der Flächenraum A negativ oder positiv, je nachdem sich der letztere oberhalb oder unterhalb der Abscissenachse befindet. Es ergibt sich somit diese allgemeine Regel: „Je nachdem $f(x)$ und dx oder $b - a$ dasselbe Zeichen oder entgegengesetzte Zeichen haben, ist das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ oder der Flächenraum A gleichwie das Element $f(x)\,dx$ positiv oder negativ.“

Fig. 4.



Es kann aber auch die Kurve die Abscissenachse schneiden (Fig. 4), so dafs zwei Flächenräume entstehen, der eine, A, oberhalb, der andere, B, unterhalb der Achse. Dann ist, wenn $b > a$ angenommen wird, A positiv, B negativ, und man hat:

$$\lim S = \int_a^b f(x)dx = A - |B| \gtreqless 0,$$

je nachdem

$$A \gtreqless |B| \qquad (a < b).$$

Alles dieses zeigt aufs klarste sowohl die geometrische Versinnlichung als auch ihr analytisches Analogon in der (4) des vorigen Paragraphen.

5. Allgemeine Bemerkungen über den Nachweis der Konvergenz unendlicher Reihen. — In § 3 haben wir den Begriff des bestimmten Integrals mit Hülfe der geometrischen Anschauung entstehen lassen, wie dasselbe ja auch thatsächlich der Geometrie seinen Ursprung verdankt. Der zur Herleitung der Definitionsgleichung, aus welcher weiterhin alle Eigenschaften der bestimmten Integrale wie von selbst fliefsen werden, erforderliche Konvergenzbeweis soll jetzt aber auch, von aller Geometrie entkleidet, rein analytisch geführt werden. Er nimmt alsdann, da die geometrische Grenze A nun nicht mehr vor Augen liegt, eine andere Wendung und einen gröfseren Umfang an. Wir schicken folgende Bemerkungen voraus.

Um die Konvergenz einer unendlichen Reihe darzuthun, d. h. um zu zeigen, dafs die Reihe sich immer mehr einem festen, bestimmten, endlichen Werte nähert, je mehr Glieder man wirklich summiert, hat man zwei verschiedene Wege einzuschlagen, je nachdem jener Grenzwert bekannt ist oder nicht.

Im ersteren Falle hat man nur den Nachweis zu führen, dafs die Differenz zwischen jenem festen Grenzwert und der Summe von einer beliebigen endlichen Anzahl, z. B. von n Gliedern der Reihe mit unaufhörlich wachsendem n immerfort und bis zur Null hin abnimmt. Ein Beispiel zu dieser Methode bietet schon in der elementaren Reihenlehre die geometrische Progression:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^n}{1 - q}.$$

Läfst man hier n bis ins Unendliche wachsen, so wird die unendliche Reihe unter der Bedingung, dafs q ein echter Bruch ist, konvergent sein; denn da die Summe der n ersten Glieder aus einem festen, von n unabhängigen Gliede $\frac{1}{1-q}$ und dem variablen Gliede $\frac{q^n}{1-q}$ besteht, so muſs das Glied $\frac{1}{1-q}$ den Grenzwert der Reihe darstellen, weil die Differenz $\frac{q^n}{1-q}$ zwischen ihm und der Summe der n ersten Glieder der Reihe mit unaufhörlich wachsendem n bis zu Null hin abnimmt.

Ist aber, was bei weitem am häufigsten zutrifft, der Grenzwert der Reihe nicht bekannt, so wird ihre Konvergenz dargethan sein, wenn man entweder den Grenzwert selbst findet, oder, da dies oft in geschlossener Form nicht möglich ist, wenigstens die Existenz eines solchen nachweist. Dazu muſs gezeigt werden, daſs, wenn man weit genug fortgeht, d. h. die gehörigen n ersten Glieder der Reihe summiert, dann die Summe von noch so vielen mit ihren Zeichen hinzukommenden Gliedern ein bestimmtes beliebig kleines und vorweg gegebenes Quantum nicht erreicht, mit anderen Worten, daſs der Rest der Reihe stets unter einer beliebig gewählten Gröſse liegt. Je kleiner dieselbe ist, desto mehr Glieder der Reihe wird man natürlich summieren müssen, damit der nunmehrige Rest diese Bedingung erfülle; es ist daher auch in dem Beweise stets die Stelle, bis zu welcher man fortgehen muſs, zu bezeichnen.

6. Analytischer Beweis der Definitionsgleichung. — Wir haben zu beweisen, daſs die Reihe (3) des § 3:

$$\begin{aligned} S &= f(a)(x_1 - a) + f(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_2)(x_3 - x_2) + \cdots \\ &\quad + f(x_{n-1})(b - x_{n-1}) = \sum_{\mu=0}^{n-1} f(x_\mu)\cdot(x_{\mu+1} - x_\mu) \end{aligned} \tag{1}$$

für $n = \infty$ einen festen noch nicht bekannten Grenzwert besitzt. Dazu kommt es nach den Erläuterungen des vorigen Paragraphen darauf an, zu zeigen, daſs man stets in dem Prozeſs des Abnehmenlassens sämtlicher Differenzen

$$x_{\mu+1} - x_\mu \tag{2}$$

so weit fortgehen kann, daſs durch Weitertreiben des Prozesses in dem Werte von S keine Veränderung mehr hervorgerufen wird, die einen beliebig kleinen vorweg willkürlich bestimmten Wert erreichte.

Wie wir es auch in § 3 thaten, nehmen wir an, dafs in der (1) bereits sämtliche Teilintervalle (2) so klein seien, dafs sich in keinem die Funktion $f(x)$ noch um die beliebig kleine, von vornherein gegebene Gröfse ϱ änderte. In § 2 haben wir gesehen, wie man zu verfahren hat, um zu einem ersten Ausdruck (1) zu gelangen, der diese Forderung erfüllt; dann werden ihr *a fortiori* auch alle folgenden Ausdrücke genügen, die man aus der (1) durch weiteres Einschalten von Zwischenwerten erhält.

Eine auf diese Weise aus der (1) entstandene Reihe fassen wir ins Auge. Es seien z. B. zwischen den beiden aufeinander folgenden Abscissenwerten x_μ und $x_{\mu+1}$ $\nu - 1$ ganz beliebige Werte eingeschaltet, die zur Unterscheidung durch y bezeichnet werden mögen, so dafs man, wenn der Uniformität wegen noch die Grenzwerte $x_\mu = y_0$, $x_{\mu+1} = y_\nu$ gesetzt werden, in diesem Intervall die Zwischenwerte

$$y_0, y_1, y_2, \ldots y_{\nu-1}, y_\nu$$

hat, die natürlich in demselben Sinne aufeinander folgen wie $x_{\mu+1}$ auf x_μ und b auf a. Dadurch tritt an Stelle des einen Produktes

(3) $$f(x_\mu)\cdot(x_{\mu+1} - x_\mu)$$

in der neuen Reihe die Summe der ν Produkte:

(4) $$f(y_0)\cdot(y_1-y_0) + f(y_1)\cdot(y_2-y_1) + \cdots + f(y_{\nu-1})\cdot(y_\nu - y_{\nu-1}),$$

in denen der Voraussetzung nach sämtliche Funktionalwerte um weniger als ϱ voneinander und von dem ersten, $f(y_0)$, verschieden sind. Bezeichnet man daher mit

$$\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots \varrho_{\nu-1}$$

bestimmte aber unbekannte Werte, die positiv oder negativ sein können, aber jedenfalls sämtlich numerisch kleiner als ϱ sind, so kann man, indem y_0 und y_ν wieder durch x_μ bezw. $x_{\mu+1}$ ersetzt werden, der (4) folgende Form geben:

$$f(x_\mu)\cdot(y_1 - x_\mu) + (y_2 - y_1)(f(x_\mu) + \varrho_1)$$
$$+ (y_3 - y_2)(f(x_\mu) + \varrho_2) + \cdots + (x_{\mu+1} - y_{\nu-1})(f(x_\mu) + \varrho_{\nu-1})$$

oder:

$$(x_{\mu+1} - x_\mu)\cdot f(x_\mu) + P,$$

wenn zur Abkürzung:

(5) $$(y_2 - y_1)\varrho_1 + (y_3 - y_2)\varrho_2 + \cdots + (x_{\mu+1} - y_{\nu-1})\varrho_{\nu-1} = P$$

gesetzt wird.

Wie man sieht, stellt dieses P den Wertunterschied dar zwischen den zwei entsprechenden Teilen (3) und (4) der ursprünglichen und der abgeleiteten Reihe. Alle Differenzen in P haben dasselbe Zeichen, die Faktoren ϱ aber nicht. Nun ist aber ohne weiteres klar, dafs, „wenn in einer Reihe[2]) ab, $a'b'$, $a''b''$, ... alle Faktoren a dasselbe Zeichen haben und ein jedes b numerisch kleiner ist als das absolute β, jedenfalls, selbst wenn alle b additiv wären, für den numerischen Wert der Summe dieser Reihe die Ungleichheit:

$$|ab + a'b' + a''b'' + \cdots| < |(a + a' + a'' + \cdots)| \cdot \beta$$

besteht". Die Anwendung dieses Satzes auf die (5), in der man links noch formell das Glied $(y_1 - x_\mu) \cdot 0$ voransetzt, ergibt:

$$|P| < |(x_{\mu+1} - x_\mu) \cdot \varrho|.$$

Ein gleichartiges Resultat gilt für die Differenz der betreffenden Teile beider Reihen in jedem der in der (1) vorkommenden n Intervalle, nämlich:

$$|P_0| < |(x_1 - a)\varrho|, \; |P_1| < |(x_2 - x_1)\varrho|, \ldots |P_{n-1}| < |(b - x_{n-1})\varrho|,$$

wo wiederum an sich die einzelnen Faktoren ϱ positiv oder negativ sein können. Wendet man daher obiges Lemma noch einmal auf die Summe aller P an, so hat man offenbar für den numerischen Wert $\varDelta$ der Differenz der ganzen Reihe (1) und der ganzen abgeleiteten Reihe:

$$\varDelta < |(b - a)\varrho|. \tag{6}$$

Hieraus ersieht man, dafs man es durch schickliche Wahl des Wertes von ϱ immer wird dahin bringen können, dafs der Rest $\varDelta$ der Reihe (1) unter einer vorweg bestimmten, beliebig kleinen und von ϱ unabhängigen Gröfse bleibt.

Für den betrachteten Fall ist demnach unser Satz erwiesen.

Da man aber bei der Bildung der abgeleiteten Reihe die Einteilung der ursprünglichen Reihe (1) konservierte, so ist der Satz noch nicht allgemein, d. h. für jede mögliche, von der anfänglichen Einteilung unabhängige Weiterführung des Prozesses bewiesen. Dies geschieht jetzt in sehr einfacher Weise durch Zurückführung auf den behandelten Fall.

Man vergleiche zwei ganz beliebige Einteilungen miteinander, nur dafs natürlich beide die Grundforderung in Bezug auf ϱ eingehen müssen. Die eine enthalte zwischen a und b die $n-1$ Werte:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots x_{n-1},$$

die andere die $m-1$ Werte:

$$y_1, y_2, y_3, \ldots y_{m-1}.$$

Trotz ihrer Verschiedenheit und verschiedenen Anzahl dürfen doch einzelne Glieder beider Reihen einander gleich sein, während selbstverständlich in jeder die Glieder in demselben Sinne sich folgen wie b auf a. Aus beiden Einteilungen komponiere man nun eine einzige Reihe dadurch, dafs man alle Glieder y ihrer Gröfse nach an gehöriger Stelle zwischen die Glieder x einschiebt, nur diejenigen weglassend, welche etwa hier schon vorkommen, und bezeichne diese neue Reihe von Werten durch:

$$z_1, z_2, z_3, \ldots z_{p-1}.$$

Den drei Reihen von Werten x, y, z entsprechen drei Summen S_x, S_y, S_z von der Form (1), von denen, wie klar ist, die dritte, S_z, zu einer jeden der beiden anderen in demselben Verhältnis steht wie oben die Reihe, von der die (4) ein Teil ist, zu der Reihe (1). Deshalb ist auch wegen der (6) der Unterschied der Reihe S_z von jeder der beiden Reihen S_x, S_y numerisch kleiner als $(b - a)\varrho$, mithin der Unterschied dieser beiden Differenzen, d. i. die Differenz zwischen den beiden Reihen S_x und S_y, stets und durchaus numerisch kleiner als $2(b - a)\varrho$, also wegen des beliebig klein anzunehmenden Wertes von ϱ kleiner als eine andere, ebenfalls beliebig klein gewählte von ϱ unabhängige feste Gröfse.

Damit ist in der allergröfsten Strenge erwiesen, dafs für ein bis ins Unendliche wachsendes n die unendliche Reihe (1) eine feste Grenze hat, und dieser Grenzwert ist es, den man unter dem bestimmten Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ versteht.

Es sei nochmals ausdrücklich hervorgehoben, zunächst, dafs bei dem vorstehenden Beweise die Endlichkeit der Differenz $b - a$ unerläfsliche Vorbedingung für die Konvergenz der Reihe (1) ist, weil sonst ihr Rest $2(b - a)\varrho$ nicht notwendig gegen Null zu konvergieren brauchte; ferner, dafs der Grenzwert der Reihe sich zwar natürlich gleichzeitig mit den drei Bestimmungsstücken f, a, b ändern würde, aber völlig unabhängig ist von der Beschaffenheit der Differenzen $x_{\mu+1} - x_\mu$ [3]). Die Zwischenwerte können z. B. ebensowohl eine arithmetische wie eine geometrische Reihe bilden, oder brauchen gar keine gegenseitige Beziehung zu einander zu haben. Handelt es sich daher um eine wirkliche Auswertung, so wird man die Teilung immer so vornehmen dürfen, wie sie am zweckmäßsigsten der Natur des vorliegenden Integrals entspricht.

7. Direkte Auswertung des Integrals $\int\limits_a^b x^k\,dx$ vermittelst der Definitionsgleichung. — Das im vorstehenden Beweise befolgte Verfahren giebt ein wenn auch erstes und rohes, doch stets mögliches Mittel an die Hand, ein bestimmtes Integral mit einem beliebigen Grade der Annäherung numerisch zu berechnen. Denn wenn man in der Definitionsgleichung die Teilung so weit getrieben hat, dafs in jedem Intervall die Funktion sich nicht mehr um ϱ ändert, so weifs man, dafs die Summe der zwar aus sehr vielen Gliedern bestehenden, aber noch immer endlichen Reihe um weniger als $2(b-a)\varrho$ von dem wahren Grenzwert der unendlichen Reihe verschieden sein mufs. Es ist aber zu bemerken, dafs es andere Methoden gibt, die, indem sie sofort auf die Grenze Bezug nehmen, praktischer und zur Lösung der Aufgabe bei weitem expeditiver sind.

Nur in vereinzelten, seltenen Fällen, wo man die Teilung so einrichten kann, dafs sich die (1) des § 6 wirklich summieren, d. h. auf einen festen, geschlossenen Ausdruck reducieren läfst, ist man im stande, zu dem genauen Grenzwert der Reihe oder des Integrals zu gelangen, indem man alsdann leicht zu erkennen vermag, was aus der Summe wird, wenn die Anzahl ihrer Glieder unaufhörlich wächst.

Um dies an einem konkreten Beispiele deutlich zu machen, sei das Integral

$$\int\limits_a^b x^k\,dx$$

zu ermitteln, wo k eine beliebige Zahl, die beiden Grenzen a und b aber positiv sein sollen, einmal weil, wenn k etwa negativ wäre, die Potenz für den Wert $x = 0$ unendlich grofs werden, also eine Unterbrechung der Stetigkeit erleiden würde, dann aber auch, weil überhaupt, falls k nicht ganz ist, für eine negative Basis die Potenz im allgemeinen imaginäre Werte besäfse.

Es mögen die $n-1$ Zwischenwerte eine geometrische Reihe bilden mit dem Faktor

$$\delta = \sqrt[n]{\frac{b}{a}},$$

der sich mit wachsendem n der Einheit nähert und an der Grenze selbst gleich 1 wird. Die einzelnen, x beizulegenden Werte sind also:

$$a, a\delta, a\delta^2, \ldots a\delta^{n-1}, b,$$

so dafs auch a und b Glieder der Progression sind. Bezeichnet nun ν einen beliebigen der Werte 0, 1, 2, ... $n-1$, so hat man für das allgemeine Glied der Reihe (1) des § 6 das Produkt:

$$(a\delta^\nu)^k \cdot (a\delta^{\nu+1} - a\delta^\nu) = a^{k+1}(\delta - 1) \cdot (\delta^{k+1})^\nu.$$

Es bildet also auch diese Reihe eine geometrische Progression mit dem ersten Gliede 1, dem Faktor δ^{k+1} und dem konstanten Faktor $a^{k+1}(\delta - 1)$. Ihre Summe ist mithin, wenn wir $b > a$ voraussetzen:

$$S = a^{k+1}(\delta - 1) \cdot \frac{(\delta^{k+1})^n - 1}{\delta^{k+1} - 1} = (b^{k+1} - a^{k+1}) \cdot \frac{\delta - 1}{\delta^{k+1} - 1}.$$

Für ein unaufhörlich wachsendes n oder, was dasselbe ist, für ein immer mehr der 1 sich näherndes δ geht diese Summe in den Grenzwert von S über.

Um uns auf den einfachsten Fall zu beschränken, dessen allgemeine Ausdehnung aber keine Schwierigkeit bieten würde, setzen wir k positiv ganz voraus. Dann ist:

$$\frac{\delta - 1}{\delta^{k+1} - 1} = \frac{1}{\delta^k + \delta^{k-1} + \cdots + \delta + 1}$$

und

$$\lim_{\delta = 1} S = \int_a^b x^k\,dx = \frac{1}{k+1}(b^{k+1} - a^{k+1})$$

(k positiv ganz, $0 < a < b$).

8. Bestimmtes Integral und Differentialquotient einer Funktion. Nachweis der Existenz des Differentialquotienten von k^x. — Während nach den obigen Beweisen jede von a bis b stetige Funktion $f(x)$ ein bestimmtes Integral zwischen diesen Grenzen besitzt, ist es umgekehrt nicht möglich, zu zeigen, dafs ihr auch stets für jeden Wert innerhalb dieses Intervalls eine Derivierte zukommt. Es kann in der That geschehen, dafs der betreffende Quotient $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ sich nicht immer für ein bis Null abnehmendes h einer festen Grenze nähert, sondern für besondere Werte von x unendlich grofs wird, oder an gewissen Stellen hin und her schwankt. So besitzt z. B. die durchaus stetige Funktion $x \sin \frac{1}{x}$ zwar im allgemeinen einen Differentialquotienten, $\sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$; für $x = 0$ aber, wo dieser Ausdruck einen bestimmten Wert nicht annimmt, kann von einem solchen nicht die Rede sein. Und in allen Fällen, wo der Begriff der Funktion nur in die Abhängigkeit einer Gröfse von einer anderen gesetzt wird und nicht durch eine analytische Bildungsart gegeben ist, ist der allgemeine Nachweis von der Existenz ihres Differentialquotienten gar nicht möglich, und kann es dann sogar rein graphisch bestimmte Funktionen geben, die nirgend eine Derivierte haben. Daher mufs man sich auch in der Differentialrechnung damit begnügen, die Existenz der Derivierten für die einfachsten und gewöhnlichsten Funktionen nachzuweisen.

Wegen dieses grundverschiedenen Charakters des bestimmten Integrals und des Differentialquotienten, und da, wie wir gesehen haben, der Begriff des bestimmten Integrals ganz unabhängig von der Differentialrechnung, als deren Umkehrung gewöhnlich die Integralrechnung aufgefafst wird, sich herleiten läfst, hat es viel für sich, die beiden Begriffe, Integral und Differentialquotient, völlig selbständig zu begründen, zumal sich dann auch manche Schwierigkeiten, deren Überwindung sonst die gröfste Mühe macht, mit Leichtigkeit heben lassen.

So ist z. B. der Nachweis, dafs eine jede Exponentialgröfse oder, als ihre inverse Funktion, jeder Logarithmus einen Differentialquotienten besitzt, vermittelst der Differentialrechnung sehr schwierig zu führen, vorausgesetzt, dafs man sich nicht der Reihenentwickelung bedienen will, deren als eines fremdartigen Elements gänzliche Fernhaltung eigentlich naturgemäfs ist. Denn eine jede Theorie mufs ihre Prinzipien möglichst aus sich selbst erzeugen, ganz abgesehen davon, dafs durch die endliche Analysis nur wenige Reihenentwickelungen bewerkstelligt werden können, und vielmehr erst die Infinitesimalrechnung eine so ergiebige Quelle für sie liefert. Mit Hülfe des selbständigen Begriffes des bestimmten Integrals hingegen kann, wie wir jetzt zeigen wollen, die Existenz des fraglichen Differentialquotienten ohne Mühe und in aller Strenge dargethan werden.

Es handelt sich um den Nachweis, dafs unter der Voraussetzung einer wesentlich positiven Basis k die Potenz k^x für jeden

Wert von x einen Differentialquotienten besitzt, dafs also für ein wie auch immer bis zu Null abnehmendes δ der Quotient $\frac{k^{x+\delta} - k^x}{\delta}$ oder vielmehr, da der Faktor k^x endlich und während der Veränderung von δ als konstant anzusehen ist, der Quotient

$$\frac{k^\delta - 1}{\delta} \tag{1}$$

gegen einen festen Grenzwert konvergiert. Zu dem Zwecke betrachten wir statt dieses Quotienten die Reihe:

$$\sum_{\mu=0}^{n} k^{x_\mu}(x_{\mu+1} - x_\mu). \tag{2}$$

Nehmen wir hier unter der Voraussetzung, dafs a und b feste, endliche Gröfsen sind, $x_0 = a$, $x_{n+1} = b$, so wissen wir, da k^x eine durchaus endliche und stetige Funktion ist, auf Grund unserer früheren Beweise, dafs diese Reihe für ein bis ins Unendliche wachsendes n einen festen, unveränderlichen Grenzwert besitzt, der durch das Integral $\int_a^b k^x dx$ dargestellt wird.

Die n zwischen $x = a$ und $x = b$ einzuschaltenden Werte mögen von $a = x_0$ an eine arithmetische Progression mit der im Abnehmen bis ins Unendliche begriffenen Differenz δ bilden. Das den Zwischenwerten nächstfolgende Glied der Progression wird dann nur selten mit b zusammenfallen, vielmehr für gewöhnlich schon über b hinausliegen, so dafs in der Reihe von Werten:

$$a,\ a + \delta,\ a + 2\delta,\ \ldots\ a + n\delta,\ b,\ (a + \overline{n-1} \cdot \delta)$$

das letzte Teilintervall von $a + n\delta$ bis b kleiner als δ, alle anderen Teilintervalle aber gleich δ sind. Nimmt man also in der Reihe (2) aus allen Gliedern mit Ausnahme des letzten δ als konstanten Faktor heraus, so wird sie:

$$\delta \cdot k^a(1 + k^\delta + k^{2\delta} + \cdots + k^{(n-1)\delta}) + (b - a - n\delta)k^a \cdot k^{n\delta}.$$

Das letzte einzelne Glied, in dem der Faktor $b - a - n\delta$ zugleich mit δ bis zu Null abnimmt, verschwindet als ein nur einziges unendlich kleines Element gegen die Summe der übrigen unendlich vielen Glieder; daher verwandelt sich die (2) mit Rücksicht auf die in der Klammer befindliche geometrische Reihe in den Ausdruck:

$$\frac{\delta}{k^\delta - 1} \cdot (k^{a+n\delta} - k^a),$$

der also, wie wir *a priori* wissen, für ein ins Unendliche wachsendes n und ein gleichzeitig bis zu Null abnehmendes δ einen festen Grenzwert besitzt. Und da es augenfällig ist, daſs der zweite Faktor gegen den endlichen Wert $k^b - k^a$ konvergiert, so muſs notwendig auch der erste Faktor $\frac{\delta}{k^\delta - 1}$ eine feste, endliche Grenze besitzen, nicht nur, weil die Grenze einer konvergenten Reihe ja immer endlich ist, sondern auch, weil in unserem Integral nirgend von etwas unendlich Groſsem die Rede ist. Daſs aber diese Grenze von Null verschieden sein muſs, erheischt die Beschaffenheit unseres Integrals.

Es folgt, daſs auch der umgekehrte Wert $\frac{k^\delta - 1}{\delta}$ eine feste, endliche Grenze, mithin k^x einen Differentialquotienten besitzt.

Grundeigenschaften des bestimmten Integrals.

9. Vertauschung der Grenzen. — „Wenn man die beiden Grenzen eines bestimmten Integrals miteinander vertauscht, so erleidet sein Wert keine andere Veränderung, als daſs er entgegengesetzt wird."

Denn nach den Erläuterungen des § 4 stellt das Integral $\int_a^b f(x)dx$ einen gewissen Flächenraum dar, der je nach den Vorzeichen von $f(x)$ und dx selbst positiv oder negativ zu nehmen ist. Die Vertauschung der Grenzen des Integrals zieht aber, da die Zwischenwerte in demselben Sinne aufeinander folgen wie die obere auf die untere Grenze, immer einen Zeichenwechsel von dx nach sich, so daſs das neue Integral zwar denselben Flächenraum, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen behaftet, ausdrückt. Es besteht mithin die Beziehung:

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Vermittelst der Definitionsgleichung ergibt sich diese Eigenschaft wie folgt.

Man nehme in den beiden Integralen $\int_a^b f(x)dx$ und $\int_b^a f(x)\,dx$ sämtliche n Intervalle zwischen a und b gleich grofs, nämlich:

$$x_{\mu+1} - x_\mu = \frac{b-a}{n} = \delta, \text{ bezw. } x_{\mu+1} - x_\mu = \frac{a-b}{n} = -\delta.$$

Dann wird, indem δ als Faktor heraustritt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta=0} \delta\,\bigl(+f(a) + f(a+\delta) + \cdots + f(a + \overline{n-1}\cdot\delta)\bigr),$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = \lim_{\delta=0} \delta\,\bigl(-f(b) - f(b-\delta) - \cdots - f(b - \overline{n-1}\cdot\delta)\bigr).$$

In diesen beiden Reihen sind aber die den Zwischenwerten zugehörigen Funktionalwerte dieselben, nur in umgekehrter Folge angeordnet, d. h. es ist

$$f(a+\delta) = f(b - \overline{n-1}\cdot\delta), \ldots f(a + \overline{n-1}\cdot\delta) = f(b-\delta);$$

bildet man also die Summe der beiden Integrale, so heben sich diese Glieder, als mit entgegengesetzten Vorzeichen behaftet, sämtlich zu je zwei auf, und man erhält:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = \lim_{\delta=0} \delta\,\bigl(f(a) - f(b)\bigr).$$

Da aber $f(a) - f(b)$ als Differenz von zwei endlichen konstanten Werten selbst endlich und konstant, und $\lim\limits_{\delta=0} \delta = 0$ ist, so folgt

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = 0.$$

10. Zerlegung in Teilintegrale. — 1. „Bezeichnet c einen beliebigen zwischen a und b gelegenen Wert, so kann man stets die Gleichung aufstellen:

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

d. h. das zwischen a und b zu nehmende Integral in die Summe zweier Teilintegrale zerlegen, die sich von a bis c bezw. von c bis b erstrecken."

Denn der durch das Integral $\int_a^b f(x)dx$ ausgedrückte Flächenraum läfst sich immer durch die der Abscisse c zugehörige Ordinate in die beiden Flächenräume $\int\limits_a^c f(x)\,dx$, $\int\limits_c^b f(x)\,dx$ zerschneiden.

Analytischer Beweis. — Man lasse in der Definitionsgleichung bei dem Prozefs des Abnehmens der Differenzen den Wert c von vornherein festliegen und zerschneide die Reihe in zwei Teile, deren zweiter mit dem Gliede anfängt, welches mit dem Faktor $f(c)$ behaftet ist. Die Grenzwerte dieser beiden Teile sind aber nichts anderes als die beiden Teilintegrale auf der rechten Seite der (1).

2. Die Gleichung (1) hat auch noch statt, wenn c aufserhalb des Intervalls a, b, vor a oder über b hinaus liegt.

Im letzteren Falle z. B. ist b ein Zwischenwert innerhalb des von a bis c sich erstreckenden Intervalls; daher hat man:

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx,$$

woraus unter Benutzung des Satzes von der Vertauschung der Grenzen wiederum folgt:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx - \int\limits_b^c f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

3. Auch kann diese Eigenschaft offenbar auf eine beliebige Anzahl von Teilen ausgedehnt werden. Danach ist ein bestimmtes Integral beliebig in die Summe von n Teilintegralen zerlegbar, deren erstes mit dem ursprünglichen nur die untere Grenze, und deren letztes mit ihm die obere Grenze gemein haben mufs, ohne dafs die zwischenliegenden Grenzwerte der Gröfse nach aufeinander zu folgen, oder zwischen a und b zu liegen brauchten.

Es gilt also für alle möglichen Fälle die Gleichung:

$$(2)\qquad \begin{aligned}\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^e f(x)\,dx + \int\limits_e^g f(x)\,dx + \cdots \\ + \int\limits_l^b f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Selbstverständlich wird, wenn man das zu betrachtende Intervall erweitert, immer stillschweigend vorausgesetzt, dafs die Integralfunktion innerhalb des umfassendsten Intervalls durchaus stetig sei.

11. Integral einer Summe. — „Das Integral der Summe oder Differenz zweier Funktionen von x ist gleich der Summe oder Differenz der zwischen denselben Grenzen genommenen bestimmten Integrale einer jeden der beiden Funktionen:

$$\int_a^b \big(\varphi(x) \pm \psi(x)\big)\, dx = \int_a^b \varphi(x)\, dx \pm \int_a^b \psi(x)\, dx.\text{“}$$

Denn ersetzt man in der Definitionsgleichung f durch $\varphi \pm \psi$, so zerfällt die dort befindliche Reihe in die Summe oder Differenz von zwei Bestandteilen, die die zwischen denselben Grenzen genommenen bestimmten Integrale von $\varphi(x)$ bezw. $\psi(x)$ darstellen.

12. Konstanter Faktor der Integralfunktion. — „Wenn die zu integrierende Funktion mit einem von x unabhängigen konstanten Faktor c behaftet ist, so kann man denselben vor das Integralzeichen heraussetzen, d. h. der Wert eines solchen Integrals ist gleich dem mit dem konstanten Faktor multiplicierten Integral von der durch diesen Faktor dividierten Funktion:

$$\int_a^b c f(x)\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx.\text{“}$$

Denn nimmt man in der Definitionsgleichung den Faktor c eines jeden Gliedes der Summe heraus, so ist der Grenzwert des in der Klammer befindlichen Ausdruckes das Integral $\int_a^b f(x)\, dx$.

13. Die Integrale $\int_a^b c\, dx$ und $\int_a^b dx$. — Der durch das Integral $\int_a^b c\, dx$ ausgedrückte Flächenraum ist ein Rechteck von der Höhe c und der Grundlinie $b - a$. Man hat daher:

$$\int_a^b c\, dx = (b - a) c.$$

Die Definitionsgleichung führt gleichfalls zu diesem Resultat:

$$\int_a^b c\, dx = c \cdot \lim_{n=\infty} (x_1 - a + x_2 - x_1 + \cdots + b - x_{n-1}) = (b - a) c,$$

denn alle Variabeln x heben sich, und der auf diese allein bezügliche limes fällt weg.

Besonders hervorzuheben ist für den speciellen Fall $c = 1$ das Integral:

$$\int_a^b 1 \cdot dx \quad \text{oder} \quad \int_a^b dx = b - a.$$

14. Integrale ungerader und gerader Funktionen[4]**.** — 1. Unter einer ungeraden Funktion versteht man eine Funktion, welche für gleiche, aber entgegengesetzte Werte der Variablen x ebenfalls entgegengesetzte Werte annimmt, so dafs sie durch die Eigenschaft charakterisiert ist:

$$f(-x) = -f(x). \tag{1}$$

Zu den ungeraden Funktionen gehören insbesondere die algebraischen Funktionen, welche die Variable nur in ungeraden Potenzen enthalten, desgleichen der $\sin x$[5].

Für die zwischen gleichen, entgegengesetzten Grenzen genommenen bestimmten Integrale ungerader Funktionen gilt der Satz:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0, \tag{1_0}$$

denn der Definitionsgleichung (1) zufolge ist die Summe von je zweien ihrer Elemente:

$$f(-x)\,dx + f(x)\,dx = 0.$$

2. Unter einer geraden Funktion versteht man eine Funktion, welche für gleiche, aber entgegengesetzte Werte des Arguments x ungeändert bleibt, so dafs sie durch die Eigenschaft charakterisiert ist:

$$\varphi(-x) = \varphi(x). \tag{2}$$

Zu den geraden Funktionen gehören insbesondere die algebraischen Funktionen, welche die Variable nur in geraden Potenzen enthalten, desgleichen der $\cos x$[5].

Für die zwischen gleichen, entgegengesetzten Grenzen genommenen bestimmten Integrale gerader Funktionen gilt der Satz:

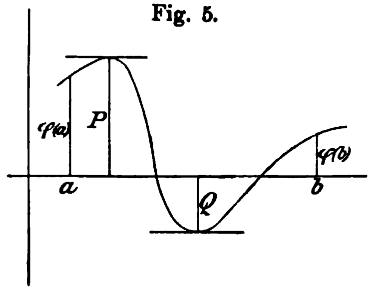
$$\int_{-a}^{a} \varphi(x)\,dx = 2\int_0^a \varphi(x)\,dx, \tag{2_0}$$

denn der Definitionsgleichung (2) zufolge ist die Summe von je zweien ihrer Elemente:

$$\varphi(-x)\,dx + \varphi(x)\,dx = 2\,\varphi(x)\,dx.$$

15. Mittelwert des bestimmten Integrals [6]. — 1. „Es sei die zu integrierende Funktion das Produkt der beiden zwischen den Integrationsgrenzen a und b stetigen Faktoren $f(x)$, $\varphi(x)$, und der eine derselben, $f(x)$, so beschaffen, dafs er in dem ganzen zu betrachtenden Verlaufe sein Zeichen nicht ändert, wohl aber den Wert 0 erreichen darf, während die andere Funktion $\varphi(x)$ keiner Beschränkung in Bezug auf ihr Zeichen unterworfen ist. Wenn alsdann innerhalb a und b der absolut gröfste Wert von $\varphi(x)$ gleich P, ihr absolut kleinster Wert gleich Q ist (Fig. 5), so wird das Integral

Fig. 5.



$$\int_a^b f(x) \cdot \varphi(x)\, dx \tag{1}$$

an Gröfse zwischen den beiden einfacheren Integralen:

$$P \int_a^b f(x)\, dx \quad \text{und} \quad Q \int_a^b f(x)\, dx \tag{2}$$

eingeschlossen sein.“

Beweis. — Nach der Voraussetzung müssen die beiden Differenzen $P - \varphi(x)$ und $\varphi(x) - Q$ überall zwischen a und b positiv sein, aber mindestens für je einen Wert von x gleich Null werden. Die beiden Produkte $\big(P - \varphi(x)\big) \cdot f(x)$ und $\big(\varphi(x) - Q\big) \cdot f(x)$ werden daher dasselbe Zeichen wie $f(x)$ haben, und da $f(x)$ innerhalb der Integrationsgrenzen sein Zeichen nicht ändert, so müssen nach § 4 auch die zwischen den Grenzen a und b genommenen Integrale dieser Produkte, nämlich (11 f.):

$$\int_a^b \big(P - \varphi(x)\big) \cdot f(x)\, dx = P \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx$$

und

$$\int_a^b \big(\varphi(x) - Q\big) \cdot f(x) dx = \int_a^b f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx - Q \int_a^b f(x)\, dx,$$

ein und dasselbe Zeichen, also die Differenzen

$$P\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx$$

und

$$Q\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx]$$

entgegengesetzte Zeichen besitzen.

Daraus folgt mit Notwendigkeit, dafs das Integral (1) an Gröfse zwischen den beiden Integralen (2) liegt[7]).

Welches von den beiden Integralen (2) aber das gröfsere ist, hängt von den Zeichen von $f(x)$ und $b-a$ ab (4).

2. Mit diesem trotz seiner Einfachheit ungemein wichtigen Satze kann man viel ausrichten, zumal wenn man ihm folgende handlichere Form gibt. Es ist einleuchtend, dafs es immer einen gewissen, wenn auch unbekannten, zwischen P und Q liegenden Wert R geben mufs, für den man infolge der eben bewiesenen Eigenschaft die Gleichung aufstellen kann:

$$\int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx = R\int_a^b f(x)\,dx; \tag{3}$$

und da $\varphi(x)$ eine zwischen a und b stetige Funktion ist, so wird sie innerhalb des Intervalls vom Maximum P bis zum Minimum Q, *a fortiori* innerhalb der Integrationsgrenzen a, b jeden zwischen P und Q liegenden Gröfsenwert wenigstens einmal, also auch den Wert R z. B. für die Abscisse ξ annehmen müssen. Bezeichnet man nun durch ε alle möglichen positiven echten Brüche incl. der Grenzen 0 und 1, so sind alle Abscissenwerte von a bis b einschliefslich dieser Grenzen in $a+(b-a)\varepsilon$ enthalten, so dafs für einen bestimmten, wenn auch unbekannten Wert von ε

$$R = \varphi(\xi) = \varphi\big(a+(b-a)\varepsilon\big)$$

sein wird, und die (3) die Form erhält:

$$\int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx = \varphi\big(a+(b-a)\varepsilon\big)\cdot\int_a^b f(x)\,dx \quad (0 \leqq \varepsilon \leqq 1). \tag{3_0}$$

3. Für $f(x)=1$ reduciert sich die Integralfunktion auf $\varphi(x)$, und da alsdann das Integral $\int_a^b f(x)\,dx = b-a$ ist (13), so ergibt sich aus den vorstehenden Beziehungen, dafs das Integral

$\int_a^b \varphi(x)\,dx$ zwischen $P(b-a)$ und $Q(b-a)$ liegt, und man die Relation aufstellen kann:

$$(4) \qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx = (b-a)\cdot\varphi\big(a+(b-a)\,\varepsilon\big) \quad (0 \leqq \varepsilon \leqq 1).$$

Diese Resultate besagen, dafs das zwischen endlichen Grenzen genommene bestimmte Integral einer beliebigen stetigen Funktion $\varphi(x)$ stets zwischen ihrem mit der Grenzdifferenz $b-a$ multiplicierten Maximum und Minimum, oder, geometrisch aufgefafst, dafs der durch das Integral dargestellte Flächenraum immer zwischen den beiden Rechtecken liegt, die $b-a$ zur Grundlinie und P bezw. Q zur Höhe haben.

Noch sei darauf aufmerksam gemacht, dafs durch die Relation (4) der früher geführte Nachweis von dem festen Grenzwert eines jeden bestimmten Integrals eine unmittelbare Bestätigung erfährt, denn da sowohl $b-a$ als die stetige Funktion φ zwischen a und b immer endlich sind, so folgt, dafs das Integral $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ durchaus einen endlichen, bestimmten Wert besitzen mufs.

Die Differentialquotienten eines bestimmten Integrals.

16. Die verschiedenen Bestimmungsstücke eines bestimmten Integrals. — Der Wert des bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ hängt von drei Stücken ab: den beiden Grenzen a und b und der Natur der Funktion $f(x)$. Diese Abhängigkeit erkennt man sofort aus der geometrischen Bedeutung des Integrals, denn der durch dasselbe ausgedrückte Flächenraum ist erst bestimmt, wenn man seine Grenzordinaten und die ihn abschliefsende Kurve kennt; er ändert sich aber, sobald sich auch nur eines von jenen Stücken ändert.

Von x hingegen, dem zur Bezeichnung der laufenden Abscisse gewählten toten Buchstaben, ist das bestimmte Integral nicht abhängig; in dem ermittelten Werte des Integrals ist x gar nicht enthalten. Daher kann dieser Buchstabe auch mit einem beliebigen anderen Buchstaben vertauscht werden. Es verhält sich hiermit ebenso wie mit dem Buchstaben, der in einer endlichen oder unendlichen Reihe das allgemeine Glied vertritt, aber aus der Summe der Reihe verschwindet.

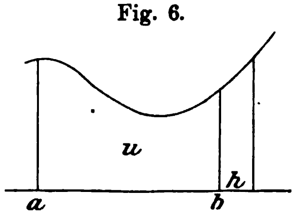
In den folgenden Paragraphen sollen die Änderungen untersucht werden, welche das bestimmte Integral erfährt, wenn seine drei Bestimmungsstücke, zunächst jedes einzeln, alsdann simultan mehrere von ihnen bewegt werden.

17. Veränderung der Grenzen. — 1. Es werde in dem Integral:

$$u = \int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

die obere Grenze b verrückt, d. h. man lasse sie um einen positiven oder negativen Gröſsenwert h wachsen. Die Veränderung, welche alsdann u erleidet, ist rein geometrisch an sich klar: der Flächenraum u (Fig. 6) wird dadurch um ein Stück Fläche, das ebenfalls ein bestimmtes Integral zwischen den Grenzen b und $b+h$ ausdrückt, vermehrt oder vermindert.

Fig. 6.



Analytisch aber ergibt sich ein ganz bestimmtes Resultat. Man setze:

$$u' = \int_a^{b+h} f(x)dx = (10) \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^{b+h} f(x)\,dx,$$

so daſs das neue Integral $\int_b^{b+h} f(x)\,dx$ die gesuchte Veränderung $u' - u$ von u darstellt. Vermöge der im § 15 entwickelten Relation (4) ist dieselbe:

$$u' - u = h \cdot f(b + h\varepsilon) \qquad (0 \leqq \varepsilon \leqq 1). \tag{2}$$

Solange h einen endlichen Wert besitzt, läſst dieser Ausdruck weiter keine Vereinfachung zu; da er aber zeigt, daſs das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ eine stetige Funktion seiner oberen Grenze ist, weil f auch zwischen b und $b+h$ durchaus stetig bleiben muſs, der Zuwachs von u sich also für ein abnehmendes h ohne Ende der Null nähert, so ist es statthaft, indem man a und f

als konstant annimmt, zum partiellen Differentialquotienten von u nach b überzugehen, und erhält dann:

$$\lim_{h=0} \frac{u'-u}{h} = \lim_{h=0} f(b+h\varepsilon),$$

d. i.

$$(2_0) \qquad \frac{\partial u}{\partial b} = \frac{\partial \int_a^b f(x)\,dx}{\partial b} = f(b).$$

„Der Differentialquotient eines bestimmten Integrals nach der oberen Grenze ist also gleich dem Wert, den die Integralfunktion annimmt, wenn man in ihr der Variablen x den oberen Grenzwert beilegt."

2. Die Ermittelung des Differentialquotienten des bestimmten Integrals nach seiner unteren Grenze, von der das Integral natürlich auch eine stetige Funktion ist, läfst sich unmittelbar auf die vorstehende Aufgabe zurückführen. Denn der Satz von der Vertauschung der Grenzen (9) gibt:

$$u = -\int_b^a f(x)\,dx;$$

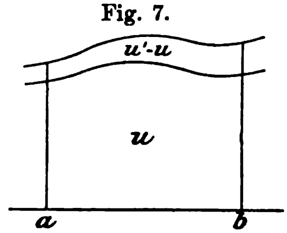
mithin ist:

$$(3) \qquad \frac{\partial u}{\partial a} = -f(a).$$

„Die Derivierte eines bestimmten Integrals nach seiner unteren Grenze ist also gleich dem Wert, den die mit dem entgegengesetzten Zeichen genommene Integralfunktion annimmt, wenn man in ihr die Variable x durch den unteren Grenzwert ersetzt."

18. **Veränderung der Funktion selbst.** — Erschliefst man endlich die dritte Quelle der Veränderlichkeit eines bestimmten Integrals, indem man die Funktion selbst sich ändern läfst, so ist zunächst zu zeigen, in welcher Weise man dies erreicht. Wir bedienen uns dazu der geometrischen Anschauung. Wenn die Funktion aufser der laufenden Abscisse x noch einen sogenannten Parameter[8]), d. h. eine von x unabhängige Gröfse α enthält und, um dies anzudeuten, durch $f(\alpha, x)$ bezeichnet wird, so entspricht jedem Werte dieses Parameters eine andere Kurve;

Fig. 7.



ersetzt man also α durch $\alpha + h$, so geht man von der Kurve $f(\alpha, x)$ zu der neuen Kurve $f(\alpha + h, x)$ desselben Geschlechts über (Fig. 7, a. v. S.).

Die diesen beiden Kurven entsprechenden, zwischen denselben festen Grenzen a und b genommenen bestimmten Integrale seien:

$$u = \int_a^b f(\alpha, x)\, dx, \qquad u' = \int_a^b f(\alpha + h, x)\, dx;$$

ihre Differenz (11):

$$(1) \qquad u' - u = \int_a^b \big(f(\alpha + h, x) - f(\alpha, x)\big) \cdot dx$$

gibt mithin die, geometrisch durch den zwischen beiden Kurven befindlichen Streifen dargestellte Veränderung an, welche das Integral u erleidet, wenn der nach der Voraussetzung allein variable Parameter α um h zunimmt. Solange h einen endlichen Wert hat, läſst die (1) weiter keine Vereinfachung zu; fragt man aber nach dem Inkrement des Integrals, d. i. nach dem Werte der Differenz (1) für ein in der Phase des fortwährenden Abnehmens begriffenes h, so liefert das Verhältnis des Inkrements zu dem unendlich kleinen h oder $\partial\alpha$ den partiellen Differentialquotienten von u nach α. Zunächst hat man (12):

$$\frac{u' - u}{h} = \int_a^b \frac{f(\alpha + h, x) - f(\alpha, x)}{h} \cdot dx.$$

Hieraus entspringt, da gemäſs der Definition des Differentialquotienten der Ausdruck unter dem Integralzeichen bei konstant vorauszusetzendem x für ein bis zu Null abnehmendes h ebenfalls in die Derivierte $\frac{\partial f(\alpha, x)}{\partial \alpha}$ übergeht, die Relation:

$$(2) \qquad \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \quad \text{d. i.} \quad \frac{\partial \int_a^b f(\alpha, x)\, dx}{\partial \alpha} = \int_a^b \frac{\partial f(\alpha, x)}{\partial \alpha} \cdot dx.$$

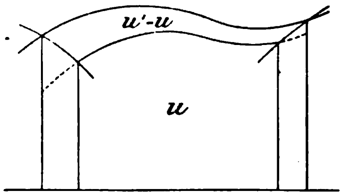
„Anstatt also zuerst zu integrieren und dann zu differentiieren, kann man beide Operationen in umgekehrter Reihenfolge, das Differentiieren mithin unter dem Integralzeichen vornehmen.“

Leibniz, der dies Verfahren schon kannte und bei einigen

Problemen in geistreicher Weise zur Anwendung brachte, bezeichnete dasselbe als *differentiare de curva in curvam.*

19. Gleichzeitige Veränderung der Grenzen und der Funktion. — Oft kommt es vor, dafs der Parameter α eine Funktion der Grenzen a und b ist, sich also alle drei Gröfsen gleichzeitig ändern. Dies ist z. B. der Fall, wenn der durch das Integral dargestellte Flächenraum nicht durch zwei feste Ordinaten, sondern (Fig. 8) durch diejenigen Ordinaten begrenzt wird, welche den Durchschnittspunkten der zu den verschiedenen Werten von α gehörigen Kurven mit zwei festen Kurven entsprechen.

Fig. 8.



Der noch gröfseren Symmetrie wegen werde angenommen, dafs a, b, α sämtlich Funktionen einer anderen unabhängigen Veränderlichen β seien, und die Derivierte des bestimmten Integrals

$$(1) \qquad u = \int_a^b f(x, \alpha) \cdot dx$$

nach β gefunden werden soll.

Da u eine stetige Funktion von a, b, α und mittelbar von β ist, so kann man auf sie das Hauptprinzip der Differentialrechnung anwenden, dem zufolge der totale Differentialquotient der Funktion

$$u = \psi(a, b, \alpha)$$

nach der unabhängigen Veränderlichen β durch die Formel gegeben wird:

$$\frac{du}{d\beta} = \frac{\partial \psi(a, b, \alpha)}{\partial a} \cdot \frac{da}{d\beta} + \frac{\partial \psi(a, b, \alpha)}{\partial b} \cdot \frac{db}{d\beta} + \frac{\partial \psi(a, b, \alpha)}{\partial \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{d\beta}.$$

Vermöge der in den vorangehenden Paragraphen hergeleiteten Resultate erhält man hieraus sofort für unser Integral (1):

$$(2) \qquad \begin{aligned} \frac{du}{d\beta} = \frac{d \int_a^b f(x, \alpha)\, dx}{d\beta} &= -f(a, \alpha) \cdot \frac{da}{d\beta} + f(b, \alpha) \cdot \frac{db}{d\beta} \\ &+ \left(\int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} \cdot dx \right) \cdot \frac{d\alpha}{d\beta}, \end{aligned}$$

eine wichtige, häufig anzuwendende Formel.

Natürlich enthält dieselbe als specielle Fälle nicht nur die drei Formeln der §§ 17 f., sondern auch, indem man beliebig welche der Gröfsen a, b, α konstant nach β annimmt, alle möglichen Kombinationen für die zu untersuchende Veränderlichkeit von u.

Sind z. B. a, α konstant nach β, also $\frac{da}{d\beta}$ und $\frac{d\alpha}{d\beta} = 0$, so reduciert sich die (2) auf ihr mittleres Glied:

$$\frac{du}{d\beta} = f(b, \alpha) \cdot \frac{db}{d\beta},$$

und nimmt man noch $\beta = b$, also $\frac{db}{d\beta} = 1$, so gelangt man wieder zu dem Resultate (2_0) des § 17:

$$\frac{\partial u}{\partial b} = f(b, \alpha).$$

Auswertung des bestimmten Integrals.

20. Das Integral $\int\limits_a^a f(x)\,dx$. — „Der Wert eines bestimmten Integrals, dessen Grenzen zusammenfallen, ist gleich Null.“

In der That reduciert sich in diesem Falle die durch das Integral dargestellte Fläche auf die gerade Linie $f(a)$, hört mithin auf, ein Raum zu sein.

Ebenso ergibt die (4) des § 15, indem der Mittelwert der Funktion mit ihrem Grenzwert $f(a)$ zusammenfällt:

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx = (a - a) \cdot f(a) = 0.$$

Im Grunde genommen hat man diesen speciellen Fall so aufzufassen, dafs die obere Grenze b des Integrals in Flufs begriffen ist, während die untere Grenze a fest bleibt. Je mehr alsdann b sich a nähert, um so mehr nähert sich der Wert des Integrals der Null. Und da das Integral eine stetige Funktion der oberen variablen Grenze ist (17), so bezeichnet a denjenigen Wert von b, für welchen das Integral durch Null geht, weshalb man auch sagt: das Integral fängt mit $b = a$ an.

21. Auswertung des bestimmten Integrals. — Es ist ein bekanntes, in aller Strenge zu erweisendes Prinzip der Differentialrechnung, dafs alle stetigen Funktionen von x, welche dieselbe Derivierte $f(x)$ besitzen, nur um gewisse von der Variablen x unabhängige Konstanten C voneinander differieren können. Ist also $\varphi(x)$ irgend eine Funktion, welche die Derivierte

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x)$$

hat, so zeigt der Ausdruck $\varphi(x) + C$ alle möglichen Funktionen an, deren Derivierte $f(x)$ ist. Die von x unabhängige Gröfse C hat in jedem besonderen Falle einen ganz bestimmten Wert, der sich leicht vermittelst bekannter specieller Werte der Funktion φ ausfindig machen läfst.

Nun wissen wir (17), dafs das bestimmte Integral

$$u = \int_a^b f(x)\,dx$$

eine stetige Funktion seiner oberen Grenze b, und dafs seine Derivierte nach b gleich $f(b)$ ist; folglich mufs, wofern man im stande ist, irgend eine stetige Funktion $\varphi(b)$ von b anzugeben, die $f(b)$ zur Derivierten hat, dem obigen Prinzip zufolge der alle Funktionen mit der Derivierten $f(b)$ umfassende Ausdruck $\varphi(b) + C$ für einen noch zu ermittelnden speciellen Wert der von b unabhängigen Konstanten C die Funktion u darstellen, so dafs alsdann die Gleichung besteht:

$$(1) \qquad \varphi(b) + C = u.$$

Vermöge der im vorigen Paragraphen erwiesenen Eigenschaft von u, für $b = a$ den Wert Null anzunehmen, leitet man aber hieraus $\varphi(a) + C = 0$, also $C = -\varphi(a)$ ab; und setzt man diesen Wert von C in die (1) ein, so gewinnt man die Beziehung:

$$(2) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Diese Relation gibt ein äufserst umfangreiches Mittel zur Auswertung bestimmter Integrale an die Hand, indem sie besagt, dafs „in allen Fällen, wo eine Funktion $\varphi(b)$ bekannt ist, die der Bedingung genügt, $f(b)$ zur Derivierten zu haben, das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ gleich ist der Differenz von $\varphi(b)$ und dem Werte, den diese Funktion annimmt, wenn in ihr b durch a ersetzt wird“.

Zum richtigen Verständnis dieses wichtigen Satzes heben wir noch als das besondere Ergebnis unserer Entwickelung hervor, dafs das Integral $\int_a^b f(x)dx$ unter allen Funktionen $\varphi(b) + C$ partikulär diejenige darstellt, welche die Eigenschaft besitzt, je mehr sich b dem Werte a nähert, selbst gegen Null zu konvergieren.

22. Beziehung zwischen dem bestimmten und dem unbestimmten Integral. Genaue Definierung des unbestimmten Integrals. — Das vorstehende Resultat wird gewöhnlich anders ausgesprochen, indem man ihm eine andere Entstehungsweise unterschiebt.

Man nennt bekanntlich das nicht zwischen Grenzen eingeschlossene Integral

$$\int f(x)\, dx \tag{1}$$

das unbestimmte Integral der Funktion $f(x)$ und versteht darunter die allgemeinste Funktion von x, deren Derivierte nach x gleich $f(x)$ ist, und die gemäfs dem im vorigen Paragraphen angeführten Prinzip notwendig ein nach x konstantes Glied C enthalten mufs. Man hat demnach:

$$\int f(x) \cdot dx = \varphi(x) + C,$$

mit der Bedingung:

$$\frac{d\left(\varphi(x) + C\right)}{dx} \quad \text{oder} \quad \frac{d}{dx}\int f(x) \cdot dx = f(x).$$

Wird hiermit das vorhin erzielte Resultat:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \varphi(b) - \varphi(a) \tag{2}$$

verglichen, so gestattet es folgende Interpretation: „Ist der Wert $\varphi(x)$ des unbestimmten Integrals von $f(x)$ bekannt, so erhält man den Wert des zwischen den Grenzen a und b genommenen bestimmten Integrals von $f(x)$, indem man in der Funktion $\varphi(x)$ der Variablen x die Werte b und a beilegt und den letzteren der beiden so gewonnenen Ausdrücke von dem ersteren subtrahiert.“ .

Um die wahre Natur des unbestimmten Integrals (1) richtig zu beurteilen, mufs man sich klar machen, dafs dasselbe im

Grunde auch nichts anderes als ein bestimmtes Integral darstellt, das zur oberen Grenze x in jedem beliebigen endlichen Werte hat, und das nur deshalb unbestimmt ist, weil sein Anfang noch nicht bezeichnet, d. h. seine untere Grenze noch unbestimmt gelassen ist, wiewohl auch sie nichtsdestoweniger einen festen Wert haben mufs. Dafs dabei x, welches auch noch den Integrationsbuchstaben ausdrückt, eine doppelte Rolle spielt, bietet keinen Übelstand, da ja der Integrationsbuchstabe ohne Einflufs auf das Resultat bleibt. Eigentlich ist also:

$$\int f(x) \cdot dx = \int^{x} f(x) \cdot dx = \varphi(x) + C,$$

wo die Konstante C so lange unbekannt bleibt, als der Wert der unteren Grenze noch nicht angegeben ist. Sobald diese aber festgelegt und durch a bezeichnet ist, wird vermöge der in § 20 hervorgehobenen Eigenschaft das Integral als Funktion seiner oberen Grenze für $x = a$ zu Null, woraus sich dann sofort wie vorher (21) $C = -\varphi(a)$ ergibt.

Wäre man somit im stande, für alle Funktionen ihre unbestimmten Integrale anzugeben, so liefe mit Rücksicht auf die Definitionsgleichung (2) die Auswertung der bestimmten Integrale stets nur auf eine blofse Subtraktion hinaus und erforderte kein besonderes Studium. Nun gibt es zwar notwendigerweise von jeder noch so zusammengesetzten Funktion ein unbestimmtes Integral, wie nicht blofs aus dem früher geführten Nachweise folgt, dafs jede stetige Funktion ein bestimmtes, mithin auch ein unbestimmtes Integral besitzt, sondern auch daraus hervorgeht, dafs doch immer eine Funktion existieren mufs, durch deren Differentiation gerade die unter dem Integralzeichen befindliche stetige Funktion erhalten wird; aber in verhältnismäfsig nur sehr wenigen Fällen ist es möglich, die unbestimmten Integrale in geschlossener Form zu erhalten. Andererseits läfst sich von einer fast unbeschränkten Zahl von Funktionen die das bestimmte Integral ausdrückende Differenz ermitteln, ohne dafs es gelänge, auch das zugehörige unbestimmte Integral anzugeben, und Fragen dieser Art sind es, welche den wesentlichen Inhalt der Lehre von den bestimmten Integralen ausmachen.

Zweiter Abschnitt.

Begriffserweiterungen des bestimmten Integrals. Auswertung bestimmter Integrale vermittelst der unbestimmten Integrale.

Erstes Kapitel.

Erste Begriffserweiterung: Integrale zwischen unendlichen Grenzen.

23. Präcisierung der Aufgabe. — Die im ersten Abschnitt entwickelten Fundamentaleigenschaften der bestimmten Integrale hatten zur notwendigen Voraussetzung: 1) dafs die Grenzen des Integrals festbestimmte und in endlicher Entfernung voneinander liegende Werte seien, 2) dafs die Integralfunktion in dem ganzen Umfange des Integrals durchaus stetig sei. Durch Fallenlassen dieser beiden Beschränkungen wird der Begriff des bestimmten Integrals einer zweifachen Erweiterung fähig gemacht, deren Berechtigung in Bezug auf ihre Möglichkeit und Bedeutung aber erst einer eingehenden Prüfung unterzogen werden mufs.

Zunächst soll daraufhin die erste Begriffserweiterung näher beleuchtet werden.

Es ist zu untersuchen, was aus dem bestimmten Integral

$$u = \int_a^b f(x)\,dx$$

der durchaus stetigen Funktion $f(x)$ wird, wenn seine beiden Grenzen oder wenigstens eine derselben bis ins Unendliche fortrücken. Indem wir zuvörderst diesen letzteren Fall ins Auge fassen, nehmen wir der gröfseren Klarheit wegen an, dafs die algebraisch kleinere untere Grenze a festliege, während die obere Grenze b unausgesetzt bis zum positiv Unendlichen wachse.

Für jeden noch endlichen bestimmten Wert von b hat auch die von jeder Grenze einzeln, also auch von beiden zusammen stetige (17 ff.) Funktion u einen festbestimmten, von a und b abhängigen Wert. Für ein unaufhörlich wachsendes b können nun zwei Fälle eintreten: entweder wird sich u einem festen Werte nähern, und dann hat natürlich das Integral:

$$\int_a^\infty f(x) \cdot dx$$

eine Bedeutung; oder u konvergiert nicht gegen eine feste Grenze, sondern wird unendlich grofs oder schwankt hin und her, und dann ist das Integral $\int_a^\infty f(x)dx$ ohne alle Bedeutung.

Damit ein bestimmtes Integral bei unendlicher Entfernung seiner Grenzen einen endlichen Wert beibehalten könne, ist, wie aus der Definitionsgleichung mit Notwendigkeit hervorgeht, unerläfsliche Vorbedingung, dafs die Integralfunktion für immer gröfsere Werte von x weder wächst noch auch nur konstant bleibt, sondern unaufhörlich bis zu Null abnimmt.

Ein Beispiel für den ersten Fall liefert die Funktion e^{-x}. Es ist $\int e^{-x} \cdot dx = -e^{-x} + C$, also $u = \int_0^b e^{-x} \cdot dx = 1 - e^{-b}$; mithin besitzt, da $\lim\limits_{b=\infty} e^{-b} = 0$ ist, das Integral $\lim\limits_{b=\infty} u = \int_0^\infty e^{-x} \cdot dx$ den endlichen Wert 1.

Gleichwie b kann 2) auch die untere Grenze a bis ins Unendliche fortrücken, d. h. bis $-\infty$ abnehmen, denn was von der einen Grenze gilt, gilt auch von der anderen. Sind aber 3) beide Grenzen unendlich, so braucht man nur einen beliebigen, endlichen, festen Wert zwischen sie zu legen, wodurch das Integral $\int_{-\infty}^{\infty}$ in zwei Integrale mit je nur einer unendlichen Grenze zerteilt und auf die vorangehenden Fälle zurückgeführt wird.

24. Die Aufgabe bei bekanntem Wert des unbestimmten Integrals. — Wenn das unbestimmte Integral der Funktion angebbar ist, so kann immer sofort entschieden werden, ob das unendlich ausgedehnte bestimmte Integral einen Sinn hat oder nicht. Denn von dem unbestimmten Integral geht man zunächst vermittelst der betreffenden Subtraktion (22) zu dem zwischen ganz beliebigen, aber festen und endlichen Grenzen a und b genommenen Integral über, das selbst einen endlichen, bestimmten Wert repräsentiert; und ist dieses erst fertig da, so läſst man nach Belieben die eine oder beide Grenzen ins Unendliche fortrücken und sieht zu, ob auch dann der Ausdruck endlich und bestimmt bleibt. So gelangt man immer zu sicheren, aber sehr verschiedenartig beschaffenen Ergebnissen.

Die folgenden Beispiele werden das verschiedene Verhalten der in Frage stehenden Integrale klar zur Anschauung bringen.

I. Es ist:

$$\int e^{\alpha x}\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + C,$$

mithin:

$$(1) \qquad \int_a^b e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha b} - e^{\alpha a}).$$

Für bis ins Unendliche wachsende Grenzen hängt das schlieſsliche Resultat von der Natur des Parameters α und von seinen Beziehungen zu den Grenzen ab. Bezeichnet α den numerischen Wert des Parameters, so sind folgende Fälle zu unterscheiden.

1. Ist der Parameter negativ, $-\alpha$, so wird bei festem Wert von a für $b = \infty$ das erste Glied $e^{-\alpha b}$ gleich Null, und das resultierende Integral:

$$\int_a^\infty e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha a}$$

hat einen festbestimmten Wert.

Das im vorigen Paragraphen angeführte Integral:

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$$

bildet hiervon einen speciellen Fall.

2. Ist unter übrigens gleichen Umständen der Parameter α positiv, so wird in der (1) das Glied $\frac{1}{\alpha}e^{\alpha b}$ unendlich groſs, woraus folgt, daſs das zugehörige Integral:

$$\int_a^\infty e^{\alpha x} \cdot dx$$

keinen Sinn hat.

3. Ähnliche oder vielmehr umgekehrte Resultate erhält man, wenn die obere Grenze b fest bleibt, für eine bis $-\infty$ abnehmende untere Grenze:

$$\int_{-\infty}^b e^{\alpha x} \cdot dx = \frac{e^{\alpha b}}{\alpha}; \qquad \int_{-\infty}^b e^{-\alpha x} \cdot dx = \infty.$$

Man kann also die Regel aufstellen: „Wenn in dem Integral (1), $\int_a^b e^{\alpha x} dx$, eine der Grenzen ins Unendliche rückt, so behält es einen endlichen Wert oder wird unendlich, je nachdem der Parameter α und die unendliche Grenze entgegengesetzte oder gleiche Zeichen haben."

4. Daraus folgt unmittelbar, daſs beide Grenzen in dem Integral (1) nicht gleichzeitig unendlich sein dürfen, weil dann immer eins der beiden Glieder unendlich groſs werden müſste. Mithin hat das Integral:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{\pm \alpha x} \cdot dx$$

nie, weder für $+\alpha$ noch für $-\alpha$, einen Sinn.

II. Es ist:

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C,$$

also:

$$(2) \qquad \int_a^b \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc\,tg} b - \operatorname{arc\,tg} a.$$

Da aber der arcus eine unendlich vieldeutige Funktion der trigonometrischen Linien ist, so muſs man ihm ein Intervall zuweisen, innerhalb dessen er den unerläſslichen Bedingungen der Stetigkeit Genüge leistet. Wir setzen daher fest, daſs er zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ eingeschlossen sein soll: alsdann durchläuft die Tangente alle Werte von $-\infty$ bis ∞, und Tangente und Bogen sind durchaus während ihres ganzen Verlaufes stetig und eindeutig. Unter dieser Annahme ergibt sich unmittelbar:

$$\int_a^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} \infty - \operatorname{arc\,tg} a \qquad = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} a,$$

$$\int_{-\infty}^b \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} b \quad - \operatorname{arc\,tg}(-\infty) = \operatorname{arc\,tg} b + \frac{\pi}{2},$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

Das Integral (2) bleibt also immer endlich, selbst wenn beide Grenzen gleichzeitig unendlich sind. Auch erkennt man sofort, daſs, wie es nach einer Bemerkung im vorigen Paragraphen erforderlich ist, die Integralfunktion $\frac{1}{1+x^2}$ mit wachsenden Werten von $|x|$ auf beiden Seiten bis zu Null abnimmt.

III. Es ist:

$$\int \frac{x}{1+x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} \log (1+x^2) + C,$$

mithin:

$$(3) \qquad \int_a^b \frac{x}{1+x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} \log \frac{1+b^2}{1+a^2}.$$

Dieses bestimmte Integral verträgt es nicht, daſs irgend eine seiner beiden Grenzen ins Unendliche rücke. Denn wenn auch der Logarithmus langsamer wächst als die Zahlen, so wird er doch schlieſslich, nur später, unendlich groſs, und es ist sowohl $\lim\limits_{b=\infty} \log \frac{1+b^2}{1+a^2} = \log \infty = \infty$ als $\lim\limits_{a=-\infty} \log \frac{1+b^2}{1+a^2} = \log \frac{1}{\infty} = -\infty$. Die beiden Integrale:

$$\int_a^\infty \frac{x}{1+x^2}\, dx \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^b \frac{x}{1+x^2}\, dx$$

haben demnach keinen Sinn; und dasselbe gilt von dem Integral:

$$(4) \qquad \int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1+x^2}\, dx,$$

dessen beide Grenzen unendlich sind, nicht, weil es unendlich wird, sondern weil es als Wert von $\frac{1}{2} \log \frac{\infty}{\infty}$ unbestimmt bleibt, es sei denn, dafs man zwischen dem Wachsen von a und dem Wachsen von b eine besondere Beziehung obwalten liefse, wo alsdann das Integral (4) jedesmal einen ganz bestimmten Wert annehmen würde. Denn es ist ja, wenn a und b positive Zahlen bedeuten, zunächst:

$$\int_{-a}^{b} \frac{x}{1+x^2} dx = \int_{-a}^{0} \frac{x}{1+x^2} dx + \int_{0}^{b} \frac{x}{1+x^2} dx$$
$$= -\frac{1}{2} \log(1+a^2) + \frac{1}{2} \log(1+b^2),$$

also z. B. für den Fall $b = a$:

$$\int_{-a}^{a} \frac{x}{1+x^2} dx = 0,$$

und dieser Wert bleibt offenbar auch für bis ins Unendliche wachsende Grenzen bestehen, wofern man nur beide gleich schnell fortrücken läfst; unter dieser Annahme würde mithin das Integral (4) den Wert 0 repräsentieren. Ebensogut könnte aber auch, wenn man b beliebig oftmal schneller wachsen liefse als a oder umgekehrt, ein beliebig anderer, unendlicher oder endlicher, positiver oder negativer Wert des Integrals (4) hervorgerufen werden.

25. Die Aufgabe bei unbekanntem Wert des unbestimmten Integrals. — Liegt der Wert des unbestimmten Integrals nicht vor, so gestaltet sich die Entscheidung über den fraglichen Punkt in ähnlicher Weise wie bei der Bestimmung der Konvergenz einer unendlichen Reihe, was ja auch natürlich ist, da in Gemäfsheit seiner Definitionsgleichung ein bestimmtes Integral nichts anderes ist als eine unendliche Reihe.

Der gröfseren Klarheit wegen halten wir wieder in dem zwischen endlichen Grenzen genommenen bestimmten Integral $\int_a^b f(x) \cdot dx$ der durchaus stetigen Funktion $f(x)$ die untere Grenze a fest und lassen die obere Grenze b bis ins positive Unendliche wachsen. Damit alsdann dieses Integral einen Sinn behalte, d. h. sich einer festen, endlichen Grenze nähere, mufs es so von seiner flüssigen Grenze b abhängig sein, dafs dieselbe, wenn sie nur erst gehörig grofs genommen ist, ganz beliebig weiter fortrücken darf, ohne dafs dadurch der Wert des bestimmten Integrals sich noch um ein beliebig kleines Quantum ändere. Bezeichnet man für ein so gewähltes b den jedenfalls positiven und beliebig grofsen Zuwachs dieser Grenze durch h, so wird die Änderung, welche das Integral erfährt, durch das Integral

$$\int_b^{b+h} f(x) \cdot dx$$

ausgedrückt. Je nachdem nun infolge der besonderen Beschaffenheit der Funktion $f(x)$ dieses Integral nicht mehr einen bestimmten, noch so kleinen Wert erreicht oder vielmehr bis ins Unendliche wächst, wird auch das Integral:

$$(1) \qquad \int_a^{\infty} f(x) \cdot dx$$

endlich bleiben oder unendlich grofs werden, mit anderen Worten, einen Sinn behalten oder jede Bedeutung verlieren.

In vielen Fällen, namentlich wenn $f(x)$ von dem schicklichen Werte von b an immer dasselbe Zeichen behält, läfst sich diese Frage sehr leicht beantworten, gerade wie die Konvergenz einer Reihe, deren Glieder von einem gewissen Grade an sämtlich dasselbe Zeichen haben, gewöhnlich ohne Mühe dargethan wird. Findet aber Zeichenwechsel statt, oder ist hier $f(x)$ bald positiv, bald negativ, so kann unter Umständen die Entscheidung über die Endlichkeit des Ausdruckes (1) sich schwieriger, bisweilen sehr delikat gestalten. Daher wollen wir auch hierüber keine allgemeine Untersuchung anstellen, vielmehr die speciellen Fälle, die sich darbieten werden, einzeln durchführen. Nur ein sehr einfacher Grundsatz möge noch besonders hervorgehoben werden.

26. Kriterium. — 1. „Es sei $\psi(x)$ eine Funktion, die von einem je nach ihrer Beschaffenheit näher oder weiter abliegenden Werte $x = b$ an überall mit demselben Zeichen behaftet und an jeder Stelle numerisch gröfser ist als die in Bezug auf ihr Zeichen keiner Beschränkung unterliegende Funktion $f(x)$; wenn alsdann für ein beliebiges, selbst unendlich grofses positives h der numerische Wert des Integrals:

$$(1) \qquad \int_b^{b+h} \psi(x)\, dx$$

kleiner ist als jede angebbare noch so kleine Gröfse, so besitzt für ein festes endliches a das Integral:

(2)
$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$
einen Sinn."

2. „Ist aber von $x = b$ an $f(x)$ ebenfalls immer mit ein und demselben Zeichen behaftet und an jeder Stelle numerisch grölser als $|\psi(x)|$, und kann der numerische Wert des Integrals (1) vielmehr, wie grofs auch b sei und für ein beliebig gröfseres h, noch unbegrenzt wachsen, so besitzt das Integral (2) keinen Sinn."

Beweis. — 1. Setzen wir $\psi(x)$ von $x = b$ an z. B. positiv voraus, so mufs, da es von dieser Stelle an überall gröfser ist als $|f(x)|$, hier auch überall sowohl die Summe $\psi(x) + f(x)$ der beiden Funktionen als auch ihre Differenz $\psi(x) - f(x)$ notwendig positiv, also durchaus $\psi(x) \pm f(x) > 0$ sein. Daraus folgt (4), dafs auch sowohl
$$\int_b^{b+h} (\psi(x) + f(x)) \cdot dx = \int_b^{b+h} \psi(x)\,dx + \int_b^{b+h} f(x)dx > 0$$
als
$$\int_b^{b+h} (\psi(x) - f(x)) \cdot dx = \int_b^{b+h} \psi(x)\,dx - \int_b^{b+h} f(x)dx > 0$$
ist, und dies besagt offenbar, dafs das Integral (1) gröfser sein mufs als das Integral $\left|\int_a^{b+h} f(x)\,dx\right|$. Das Integral (1) ist aber kleiner als jede gegebene Gröfse, um so mehr konvergiert das andere Integral gegen Null. Folglich (25) hat das Integral (2) einen endlichen, bestimmten Wert.

Einen völlig analogen Satz giebt es in der Lehre von der Konvergenz der unendlichen Reihen: „Wenn in einer unendlichen Reihe alle Glieder von einem gewissen Range an dasselbe Zeichen haben und numerisch gröfser sind als die entsprechenden Glieder einer anderen unendlichen Reihe mit verschieden vorgezeichneten Gliedern, so konvergiert diese letztere Reihe gleichzeitig mit der ersteren." Nicht aber dürfte aus der Divergenz der ersteren Reihe auf die Divergenz der anderen geschlossen werden, die infolge der durch das Zeichenspiel hervorgebrachten Zerstörung sehr wohl konvergent sein könnte.

2. Es sei von $x = b$ an $\psi(x)$ wiederum positiv, die andere Funktion aber negativ und aus diesem Grunde durch $-f(x)$

bezeichnet, so daſs $f(x)$ ihren numerischen Wert anzeigt. Alsdann folgert man wie im vorigen Beweise, daſs beide durch das doppelte Zeichen angedeuteten Komplexe $-f(x) \pm \psi(x)$ negativ, und daraus, daſs auch die entsprechenden beiden Integrale:

$$\int_b^{b+h} \left(-f(x) \pm \psi(x)\right) \cdot dx = -\left(\int_b^{b+h} f(x)\, dx \mp \int_b^{b+h} \psi(x)\, dx\right) < 0$$

sind. Mithin ist:

$$\int_b^{b+h} f(x)\, dx \mp \int_b^{b+h} \psi(x)\, dx > 0,$$

d. h.:

$$\int_b^{b+h} f(x)\, dx > \int_b^{b+b} \psi(x)\, dx.$$

Also ist $\int_b^{b+h} f(x) dx$ um so mehr divergent als das Integral (1), und das Integral (2) hat keine Bedeutung (25).

27. Das Integral $\int_a^\infty x^k\, dx$. — Eine Funktion $\psi(x)$, welche die Bedingungen des ersten Kriteriums eingeht, bietet sich dar in der Potenz mit negativem, unter -1 liegendem Exponenten:

(1) $$\psi(x) = x^{-k} \qquad (k > 1),$$

die für ein positives x stets positiv ist, und aus deren unbestimmtem Integral: $\frac{1}{-k+1} \cdot \frac{1}{x^{k-1}} + C$ sich

$$\int_b^{b+h} x^{-k}\, dx = \frac{1}{-k+1}\left(\frac{1}{(b+h)^{k-1}} - \frac{1}{b^{k-1}}\right),$$

mithin

$$\lim_{h=\infty} \int_b^{b+h} x^{-k}\, dx = \frac{1}{k-1} \cdot \frac{1}{b^{k-1}} \qquad (k > 1),$$

also ein Integral ergibt, welches für ein hinlänglich groſses b kleiner wird als jede beliebige Gröſse.

„Nimmt daher eine Funktion $|f(x)|$ schneller ab als die Potenz (1), so besitzt ihr Integral $\int_a^\infty f(x)\, dx$ trotz seiner unendlichen Ausdehnung immer einen Sinn.“

Hingegen erfüllt die Potenz x^k mit positivem Exponenten k

selbstverständlich (23) nicht die Bedingungen des Kriteriums, da sie mit wachsendem x immerfort zunimmt.

Aber auch zwischen 0 und -1 dürfte der Exponent von x^k nicht gewählt werden, weil dann die Potenz zwar nicht mehr wachsen, aber doch nicht schnell genug abnehmen würde, um das Unendlichwerden des Integrals $\int\limits_b^{b+h} x^k\,dx$ zu verhindern. Selbst der Grenzfall $k = -1$ ist auszuschliefsen, denn auch für diesen ist immer, so grofs auch b sein mag, der aus dem unbestimmten Integral $\int x^{-1}\,dx = \log x + C$ hergeleitete Wert:

$$\lim_{h=\infty} \int\limits_b^{b+h} x^{-1}\,dx = \lim_{h=\infty} \log\left(1 + \frac{h}{b}\right) = \log\infty = \infty.$$

Ist also eine Funktion $f(x)$ von einem gewissen Werte b an beständig mit demselben Zeichen behaftet und an jeder Stelle numerisch gröfser als die Potenz:

$$(2) \qquad \psi(x) = x^k \qquad (k \geqq -1),$$

so besitzt dem zweiten Kriterium gemäfs das Integral $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ keinen Sinn[9]).

Zweites Kapitel.

Auswertung bestimmter Integrale vermittelst der unbestimmten Integrale. Das Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{f(x)}\,dx$. Die drei Eulerschen Formeln.

28. Vorbemerkungen. — Die vorangehenden allgemeinen Methoden sollen jetzt auf die Auswertung bestimmter Integrale angewendet werden. Indem wir dabei möglichst den historischen Gang einhalten, haben wir hauptsächlich auf Euler zurückzugehen, der als der Begründer der Lehre von den bestimmten Integralen anzusehen ist, und dem, so Bedeutendes auch noch nach ihm geleistet worden ist, doch schon die wichtigsten Integrale zu verdanken sind und das allergröfste Verdienst gebührt.

Das erste bereits von den Bernoulli vielfach in Anwendung gebrachte Mittel zur Auffindung bestimmter Integrale besteht darin, von unbestimmten oder, was auf dasselbe hinausläuft, von zwischen beliebigen Grenzen a und b genommenen Integralen ausgehend, solche speciellen Werte dieser Grenzen ausfindig zu machen, für welche wesentlich vereinfachte Resultate erzielt werden.

So vereinfacht sich z. B. das in § 24 näher betrachtete bestimmte Integral:

$$\int_a^b e^{-\alpha x}\, dx = -\frac{1}{\alpha}(e^{-\alpha b} - e^{-\alpha a}) \qquad (\alpha > 0)$$

für die besonderen Werte $a = 0$, $b = \infty$ ganz aufserordentlich, indem es von einer transcendenten Funktion zu einer rein algebraischen Gröfse:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha} \qquad (\alpha > 0)$$

herabsteigt.

Ähnlich verhält es sich mit dem ebenfalls schon von Euler behandelten bestimmten Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{f(x)}\, dx$, dessen Auswertung nach dem angegebenen Verfahren in den folgenden Paragraphen vorgenommen werden soll.

Das Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{f(x)} \cdot dx$.

29. Notwendige Bedingungen. — Es seien $\varphi(x)$ und $f(x)$ zwei ganze, rationale, algebraische und mithin in ihrem ganzen Verlaufe durchaus stetige und eindeutige Funktionen von x. Ihr Quotient

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} \tag{1}$$

stellt alsdann eine gebrochene algebraische Funktion dar, die zu denjenigen gehört, deren unbestimmtes Integral angebbar ist. Von diesem soll zu dem bestimmten Integral zwischen unendlichen Grenzen:

$$(2) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{f(x)} \cdot dx$$

für diejenigen Fälle übergegangen werden, in denen es einen Sinn besitzt. Dazu mufs die Funktion (1) folgende beiden Bedingungen erfüllen.

1. Der Nenner $f(x)$ darf nirgend gleich Null werden, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Gleichung

$$f(x) = 0$$

mufs lauter imaginäre Wurzeln besitzen. Denn wenn der Quotient (1) durch das Unendliche ginge, würde er seine Stetigkeit einbüfsen, und infolge davon, wie wir später sehen werden, das Integral (2) seine Bedeutung verlieren.

2. Der Bruch $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ mufs nicht nur echt gebrochen, sondern das Polynom $\varphi(x)$ sogar von einem um wenigstens zwei Einheiten niedrigeren Grade sein als $f(x)$.

In der That, wenn zunächst Zähler und Nenner gleichen Grad haben, also der Bruch $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ von der Form ist:

$$\frac{px^n + qx^{n-1} + rx^{n-2} + \cdots}{p_1x^n + q_1x^{n-1} + r_1x^{n-2} + \cdots} = \frac{p + \frac{q}{x} + \frac{r}{x^2} + \cdots}{p_1 + \frac{q_1}{x} + \frac{r_1}{x^2} + \cdots},$$

so ist ersichtlich, dafs in diesem Falle die Funktion (1) für beständig wachsende Werte von x immer mehr in die Konstante $\frac{p}{p_1}$, die durch C bezeichnet werde, übergeht, und daher ihr zwischen unendlichen Grenzen genommenes Integral einer im § 23 gemachten Bemerkung zufolge keinen Sinn besitzen kann; auch ergibt direkt die Analyse des § 25:

$$\lim_{h=\infty} \int_b^{b+h} C\,dx = \lim_{h=\infty} Ch = \infty.$$

Sind aber Zähler und Nenner nicht von gleichem Grade, so kann man

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{px^{n+k} + qx^{n-1+k} + rx^{n-2+k} + \cdots}{p_1x^n + q_1x^{n-1} + r_1x^{n-2} + \cdots}$$

setzen, wo k eine beliebige ganze, positive oder negative Zahl bedeutet, die anzeigt, um wie viel Einheiten der Grad des Zählers von dem des Nenners differiert. Durch Herausnehmen der Potenz x^k wird dieser Ausdruck sofort in das Produkt:

$$x^k \cdot \frac{p x^n + q x^{n-1} + r x^{n-2} + \cdots}{p_1 x^n + q_1 x^{n-1} + r_1 x^{n-2} + \cdots}$$

umgeformt und auf den zuerst betrachteten Fall zurückgeführt, der für $k = 0$ direkt in ihm enthalten ist.

Da also der zweite Faktor des Produkts mit wachsendem x immer mehr in die Konstante C übergeht, so nimmt schliefslich die Funktion (1) den Charakter der Potenz x^k selbst an, von der wir aus der Diskussion des § 27 wissen, dafs sie nur dann ein bis ins Unendliche erstrecktes Integral verträgt, wenn ihr Exponent $k < -1$, nicht aber, wenn $k \geqq -1$ ist.

Hieraus folgt unmittelbar, dafs $\varphi(x)$ weder von höherem Grade noch von einem um nur eine Einheit niedrigeren Grade als $f(x)$ sein darf, und dafs von dem Integral (2) nur die Rede sein kann, wenn der Grad von $f(x)$ den von $\varphi(x)$ wenigstens um zwei Einheiten übersteigt[10]).

30. Auswertung des Integrals. — Den soeben als notwendig erwiesenen Bedingungen gemäfs hat die Gleichung:

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

wenn $f(x)$ vom n^{ten} Grade ist, n imaginäre Wurzeln, die durch

$$x = \alpha, \beta, \gamma, \ldots \tag{2}$$

bezeichnet werden mögen. Wir setzen voraus, dafs dieselben sämtlich voneinander verschieden seien, oder dafs die Gleichung (1) nur einfache Wurzeln besitze. Zwar liefse sich die Aufgabe ohne gröfsere Schwierigkeit auch beim Vorhandensein vielfacher Wurzeln lösen, doch ist obige Annahme besonders für die späteren Anwendungen vollkommen ausreichend. Alsdann gibt bekanntlich die Zerlegung in Partialbrüche:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \cdots, \tag{3}$$

wo den Konstanten die Werte:

$$A = \frac{\varphi(\alpha)}{f'(\alpha)}, \quad B = \frac{\varphi(\beta)}{f'(\beta)}, \ldots \tag{4}$$

beizulegen sind, wenn, wie üblich, unter $f'(x)$ die Derivierte von $f(x)$ verstanden wird. Das Integral von $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ wird also gleich sein der Summe der Integrale der n Partialbrüche auf der rechten Seite der (3).

Wird durch

$$l + mi,$$

wo l und m reell sind, m aber nicht $= 0$ sein darf, irgend eine der imaginären Wurzeln (2) bezeichnet, so ist der zugehörige Partialbruch, abgesehen von seinem konstanten Faktor:

$$\frac{1}{x-l-mi} = \frac{x-l}{(x-l)^2+m^2} + i \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x-l}{m}\right)^2+1}.$$

Die hier auf der rechten Seite befindlichen Ausdrücke gehören in die Klasse der Funktionen $\frac{x}{x^2+1}$ und $\frac{1}{x^2+1}$, deren Integrale wir bereits in § 24, III. und II. einer genauen Untersuchung unterzogen haben. Danach erhält man zunächst als unbestimmtes Integral des zweiten Ausdrucks:

$$i \cdot \frac{1}{m} \int \frac{dx}{\left(\frac{x-l}{m}\right)^2+1} = i \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{x-l}{m} + C,$$

und hieraus entspringt für einen zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ eingeschlossenen arcus unmittelbar der Wert des bestimmten Integrals:

$$i \cdot \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(\frac{x-l}{m}\right)^2+1} = \pm \pi i,$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem m positiv oder negativ ist.

Was aber das Integral

$$\int \frac{x-l}{(x-l)^2+m^2} \cdot dx = \frac{1}{2} \log \left((x-l)^2+m^2\right) + C'$$

betrifft, dessen Wert durch direkte Verifikation bestätigt, aber auch dadurch ermittelt werden kann, dafs man identisch:

$$\frac{x-l}{(x-l)^2+m^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x-l)+mi} + \frac{1}{(x-l)-mi}\right)$$

setzt[11]), so haben wir am angeführten Orte gesehen, dafs es nicht zwischen unendlichen Grenzen genommen werden darf. Denn für beliebige positive Werte a und b hat man:

4*

$$\int_{-a}^{b} \frac{x-l}{(x-l)^2+m^2}\,dx = \frac{1}{2}\log\frac{(b-l)^2+m^2}{(a+l)^2+m^2}$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{2}\log\frac{\left(1-\frac{l}{b}\right)^2+\left(\frac{m}{b}\right)^2}{\left(1+\frac{l}{a}\right)^2+\left(\frac{m}{a}\right)^2}.$$

Das erste Glied auf der rechten Seite, $\frac{1}{2}\log\frac{b^2}{a^2}$, kann, da a und b positiv sind, in $\log\frac{b}{a}$ umgeschrieben werden; das zweite Glied werde der Kürze halber gleich σ gesetzt. Dann ist:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-l}{(x-l)^2+m^2}\,dx = \lim_{\substack{a=\infty \\ b=\infty}} \left(\log\frac{b}{a}+\sigma\right).$$

Nun nähert sich zwar σ für bis ins Unendliche wachsende a und b immer mehr dem Werte $\frac{1}{2}\log 1^2 = \log 1 = 0$, der $\log\frac{b}{a}$ aber bleibt eine völlig unbestimmte Gröſse, weil beide Grenzwerte a und b durchaus unabhängig voneinander unendlich werden, und es nicht statthaft ist, ein festes Verhältnis für ihr Wachstum anzunehmen. Es wird sich jedoch herausstellen, daſs aus dem Endresultat diese unbestimmte Gröſse verschwindet, und dadurch allein wird die Lösung unserer Aufgabe ermöglicht.

Wird noch der der Wurzel $l+mi$ in der Reihe (4) zugehörige konstante Faktor mit M bezeichnet, so hat man nach den bisherigen Ergebnissen für das Integral eines beliebigen Gliedes der (3):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{M\,dx}{x-l-mi} = M\cdot\lim\left(\log\frac{b}{a}+\sigma\right) \pm M\pi i \qquad (m \gtrless 0),$$

mithin unter Anwendung des über die n Glieder oder über alle Werte (4) von M zu erstreckenden Summenzeichens Σ und mit Rücksicht darauf, daſs der $\lim\left(\log\frac{b}{a}+\sigma\right)$ von dem speciellen Werte von M unabhängig ist, für das ganze zu ermittelnde Integral:

$$(5)\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{f(x)}\,dx = \lim\left(\log\frac{b}{a}+\sigma\right)\cdot\sum M + \pi i\sum \pm M$$
$$(m \gtrless 0).$$

Nun sind aber in dem aus der (3) hergeleiteten Ausdruck für $\varphi(x)$, nämlich:

$$\varphi(x) = A\cdot\frac{f(x)}{x-\alpha} + B\cdot\frac{f(x)}{x-\beta} + \cdots$$

die Faktoren der Konstanten $A, B, \ldots$ sämtlich Funktionen von x, deren Grad nur um eine Einheit niedriger ist als der von $f(x)$, und in denen ihrer Bildungsart zufolge die höchsten Glieder ohne Koefficienten, rein x^{n-1}, sein müssen. Nach fallenden Potenzen von x geordnet, beginnt demnach das Polynom $\varphi(x)$ mit dem Gliede $x^{n-1}\cdot\Sigma M$; da es aber der Voraussetzung nach höchstens vom $(n-2)^{\text{ten}}$ Grade sein darf, so folgt mit Notwendigkeit, dafs der Koefficient von x^{n-1}:

$$\Sigma M = A + B + \cdots = 0$$

sein mufs. Dadurch fällt in der (5) das unbestimmte Glied $\lim\left(\log\frac{b}{a}+\sigma\right)\cdot\Sigma M$ ganz aus, und es ergibt sich, wenn man noch M durch seinen Wert $\frac{\varphi(\alpha)}{f'(\alpha)}$ ersetzt, als schliefsliches Resultat die Formel:

$$(6)\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{f(x)}\cdot dx = \pi i\sum_{\alpha}\pm\frac{\varphi(\alpha)}{f'(\alpha)}\quad \left(\alpha \text{ alle Wurzeln von } f(x)=0\right),$$

wo die verschiedenen Konstanten $\frac{\varphi(\alpha)}{f'(\alpha)}$ mit dem oberen oder unteren Zeichen zu nehmen sind, je nachdem, in der zugehörigen Wurzel $\alpha = l + mi$, m positiv oder negativ ist.

Durch die besondere Wahl der Grenzen ist also das Integral, das im allgemeinen eine logarithmische und eine invers-trigonometrische Funktion darstellt, zu einem rein algebraischen Ausdruck geworden, in welchem das einzige Transcendente die Zahl π ist.

31. Das Integral $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{m-1}}{x^n - e^{\theta i}}\,dx$. — Von den verschiedenen in dem allgemeinen Resultat des vorigen Paragraphen enthaltenen speciellen Fällen ist nur der eine als besonders wichtig hervorzuheben, in dem $f(x)$ ein Binom oder Trinom ist, da allein von einem solchen Ausdruck die Wurzeln bekannt sind.

Indem wir uns auf den Fall des Binoms beschränken, auf den auch der andere Fall zurückgeführt werden kann, wählen wir

$$f(x) = x^n - e^{\theta i}, \quad \varphi(x) = x^{m-1},$$

wo m und n positive ganze Zahlen bedeuten, und n gröſser als m sein muſs, aber auſserdem gerade vorausgesetzt werden soll. Was den Bogen θ betrifft, so soll er jeden beliebigen Wert zwischen 0 und 2π besitzen dürfen, mit Ausschluſs dieser Grenzen selbst, denn für $\theta = 0$ oder 2π würde der notwendigen Bedingung zuwider die Gleichung:

$$(1) \qquad f(x) = 0, \quad \text{d. i.} \quad x^n = e^{\theta i} = \cos\theta + i\sin\theta$$

auch reelle Wurzeln haben; hingegen ist der Wert $\theta = \pi$ nicht auszunehmen, denn ergibt er gleich $x^n = -1$ als reell, so kommt doch durch die gerade Wurzel $\sqrt[n]{-1}$ das Imaginäre wieder hinein.

Die n verschiedenen imaginären, wieder durch α zu bezeichnenden Wurzeln der Gleichung (1) sind bekanntlich in

$$(2) \qquad x = \alpha = e^{\frac{\theta + 2s\pi}{n} \cdot i} = \cos\frac{\theta + 2s\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2s\pi}{n}$$

$$(s = 0, 1, 2, \ldots n - 1)$$

enthalten, während sie durch alle ferneren Werte von s immerfort in derselben Reihenfolge reproduciert werden.

Da ferner $f'(x) = nx^{n-1}$, mithin, wenn man gleich den Faktor $e^{-2s\pi i} = 1$ unterdrückt,

$$\frac{\varphi(\alpha)}{f'(\alpha)} = \frac{1}{n}x^{m-n} = \frac{1}{n}e^{\left(\frac{m}{n}-1\right)\theta i + s\cdot\frac{2m\pi}{n}i}$$

ist, so entspringt aus der (6) des § 30 die Formel:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{m-1}\,dx}{x^n - \cos\theta - i\sin\theta} = \frac{\pi i}{n}e^{\left(\frac{m}{n}-1\right)\theta i}\cdot\sum_{s=0}^{n-1} \pm e^{s\cdot\frac{2m\pi}{n}i}.$$

Es bleibt noch der Wert der n-gliedrigen Summe Σ zu ermitteln. Den Werten $s = 0, \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2}, n - 1$ entsprechen in der Reihe (2) die Bogen $\frac{\theta}{n}, \pi - \frac{2\pi - \theta}{n}, \pi + \frac{\theta}{n}, 2\pi - \frac{2\pi - \theta}{n}$, die von $\pi + \frac{\theta}{n}$ an der zweiten Kreishälfte angehören [12]); der Faktor $\sin \frac{\theta + 2s\pi}{n}$ des imaginären Teiles der n Wurzeln α ist daher bis zum Werte $s = \frac{n}{2} - 1$ positiv, von $s = \frac{n}{2}$ an negativ, und folglich ist die erste Hälfte der Glieder der Summe Σ additiv, die andere Hälfte subtraktiv zu nehmen.

Die Summe Σ bildet mithin die Differenz von zwei geometrischen Reihen, deren jede aus $\frac{n}{2}$ Gliedern besteht, und deren gemeinschaftlicher Exponent $e^{\frac{2m\pi}{n}i}$ ist. Setzen wir diesen zur Abkürzung gleich q, so ist die additive Reihe:

$$1 + q + \cdots + q^{\frac{n}{2}-1} = \frac{1 - q^{\frac{n}{2}}}{1 - q},$$

die subtraktive:

$$- q^{\frac{n}{2}}\left(1 + q + \cdots + q^{\frac{n}{2}-1}\right),$$

also

$$\sum = \frac{\left(1 - q^{\frac{n}{2}}\right)^2}{1 - q}.$$

Somit hat man als schliefsliches Resultat:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{m-1}\,dx}{x^n - \cos\theta - i\sin\theta} = \frac{\pi i}{n} e^{\left(\frac{m}{n}-1\right)\theta i} \cdot \frac{(1 - e^{m\pi i})^2}{1 - e^{\frac{2m\pi}{n}i}} \tag{3}$$

(n, m positiv ganz, n gerade, $m < n$; $0 < \theta < 2\pi$).

Diese Formel soll nun behufs Herleitung der wichtigsten in ihr enthaltenen speciellen Fälle weiter ausgebeutet werden, wobei wir wie üblich durch die Buchstaben μ, μ', ν u. s. w. beliebige positive ganze Zahlenwerte bezeichnen werden.

Die drei Eulerschen Formeln.

32. Specielle Fälle des Integrals $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{m-1}\,dx}{x^n - e^{\theta i}}$. — Man hat zu unterscheiden, ob m eine gerade oder ungerade Zahl ist.

1) $m = 2\mu$. — Ist gleichwie n auch m eine gerade Zahl, also die Exponentialgröfse $e^{m\pi i} = 1$, so fliefst das ganze Re-

sultat (3) des vorigen Paragraphen gleichzeitig mit dem quadratischen Faktor rechts in Null zusammen. Man hat demnach die Formel:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{m-1}\,dx}{x^n - e^{\theta i}} = 0 \qquad \begin{matrix}(m = 2\mu,\ n = 2\nu,\ n > m > 0;\\ 0 < \theta < 2\pi).\end{matrix} \tag{1}$$

2) $m = 2\mu + 1$. — In diesem Falle läfst die rechte Seite der (3) des § 31 die folgenden Vereinfachungen zu. Da $e^{m\pi i}$ sich auf $e^{\pi i} = -1$ reduciert, also $(1 - e^{m\pi i})^2 = 4$ wird, so verwandelt sie sich zunächst in den Ausdruck:

$$\frac{4\pi i}{n}\cdot\frac{e^{\left(\frac{m}{n}-1\right)\theta i}}{1 - e^{\frac{2m\pi}{n}i}},$$

und wenn man diesen Bruch durch $e^{-\frac{m\pi}{n}i}$ erweitert, in:

$$-\frac{4\pi i}{n}\cdot\frac{e^{\left(\frac{m}{n}-1\right)\theta i - \frac{m}{n}\pi i}}{e^{\frac{m\pi}{n}i} - e^{-\frac{m\pi}{n}i}} = -\frac{2\pi}{n}\cdot\frac{e^{\left(\frac{m}{n}-1\right)\theta i - \frac{m}{n}\pi i}}{\sin\frac{m\pi}{n}},$$

woraus endlich durch Multiplikation mit $(-1)\cdot(-1) = -e^{\pi i}$ unmittelbar die Formel:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{m-1}\,dx}{x^n - \cos\theta - i\sin\theta} = \frac{2\pi}{n}\cdot\frac{e^{\left(\frac{m}{n}-1\right)(\theta-\pi)i}}{\sin\frac{m\pi}{n}} \tag{2}$$

$$(m = 2\mu + 1,\ n = 2\nu,\ n > m > 0;\ 0 < \theta < 2\pi)$$

hervorgeht.

Wird in derselben θ der specielle Wert π beigelegt, so verschwindet aus ihr jedes Zeichen des Imaginären, und man gewinnt sofort dieses andere Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{m-1}\,dx}{x^n + 1} = \frac{2\pi}{n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{m\pi}{n}} \tag{3}$$

$$(m = 2\mu + 1,\ n = 2\nu,\ n > m > 0).$$

Noch ist darauf aufmerksam zu machen, wie bei näherer Prüfung die Formel (2) die Notwendigkeit erkennen läfst, dem Bogen θ ein festbestimmtes Intervall anzuweisen (31); denn während die Integralfunktion und damit das Integral selbst durchaus dieselben bleiben, wenn der arcus θ um ein Multiplum der Peripherie wächst, würde der Ausdruck rechts, wo θ mit dem Bruch $\frac{m}{n}$ multipliciert erscheint, also nicht um ein Multiplum des Kreisumlaufs sich verändern muſs, für gewöhnlich völlig verschiedene Werte annehmen.

33. Reelle Wurzeln von $f(x) = 0$. — Man überzeugt sich ohne Mühe, daſs die allgemeine Analyse des § 30 noch bestehen und anwendbar bleibt, wenn der Nenner des Bruches $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ durch Null hindurchgeht, d. h. die Gleichung $f(x) = 0$ reelle Wurzeln hat, wofern nur dafür gesorgt ist, daſs gleichzeitig auch der Zähler $\varphi(x)$ gleich Null wird oder denselben einfachen Faktor besitzt. Man könnte dann allerdings mit diesem gemeinschaftlichen Faktor wegdividieren, aber bisweilen ist es vorteilhafter und für unseren gegenwärtigen Zweck sogar geboten, ihn bestehen zu lassen. Daſs alsdann an ein Hindurchgehen der Funktion $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ durch das Unendliche für den entsprechenden Wert von x gar nicht zu denken ist, zeigt auch die Zerlegung in Partialbrüche. Denn ist z. B. $x = \alpha$ ein solcher Wert und, wie wir wissen, eine einfache Wurzel von $f(x) = 0$, also $f'(\alpha)$ von Null verschieden, so existiert der zugehörige Partialbruch $\frac{A}{x-\alpha}$ nur formell, da sein Zähler $A = \frac{\varphi(\alpha)}{f'(\alpha)}$, in dem nach der Voraussetzung $\varphi(\alpha) = 0$ ist, selbst gleich Null sein muſs.

Demnach wird man z. B. in dem Integral (2) des vorigen Paragraphen auch $\theta = 0$ setzen dürfen, wodurch der Nenner $x^n - 1$ wird und für die beiden Werte $x = \pm 1$ durch Null hindurchgeht, muſs aber dann den Zähler x^{m-1} durch einen Ausdruck ersetzen, der für dieselben Werte von x ebenfalls zu Null wird. Dies erreicht man, wenn man den Zähler zweigliedrig wählt, nämlich der Differenz $x^{m-1} - x^{m'-1}$ gleichsetzt, mit der Bedingung, daſs, während n gerade ist, m und m' beide ungerade sind.

Für diesen Fall gelten mithin — wie man sich übrigens auch durch direkte Operationen und zweckentsprechende Umänderung der Analyse von § 30 an leicht überzeugen könnte — alle früheren Rechnungen, so daſs man unbedenklich aus der obigen Formel die neuen Resultate ohne weiteres abschreiben darf. Das gibt:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{m-1}-x^{m'-1}}{x^n-1}\cdot dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{m-1}\,dx}{x^n-1}-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{m'-1}\,dx}{x^n-1}$$

$$=\frac{2\pi}{n}\left(\frac{e^{-\left(\frac{m}{n}-1\right)\pi i}}{\sin\frac{m\pi}{n}}-\frac{e^{-\left(\frac{m'}{n}-1\right)\pi i}}{\sin\frac{m'\pi}{n}}\right);$$

und da allgemein:

$$\frac{e^{-(p-1)\pi i}}{\sin p\pi}=\frac{-e^{-p\pi i}}{\sin p\pi}=-\operatorname{ctg}p\pi+i$$

ist, so gewinnt man die Formel:

$$(1)\qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{m-1}-x^{m'-1}}{x^n-1}\,dx=\frac{2\pi}{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{m'\pi}{n}-\operatorname{ctg}\frac{m\pi}{n}\right)$$

$$\left(m=2\mu+1,\ m'=2\mu'+1,\ n=2\nu,\ 0<\frac{m}{m'}<n\right).$$

34. Trennung des Reellen und Imaginären. — Die drei Eulerschen Formeln. — In derselben Formel (2) des § 32 liegen wie in jeder Gleichung von komplex imaginärer Form zwei Resultate, die man durch Trennung des reellen und imaginären Teiles erhält. Da sich aber im vorliegenden Falle diese beiden Resultate nicht voneinander unterscheiden, so begnügen wir uns mit dem einen und zwar dem imaginären Teile, der schneller zum Ziele führt.

Zuvörderst ersetzen wir $\theta-\pi$ durch θ', das sich dann von $-\pi$ bis π erstreckt. Läſst man nach der Substitution den Accent wieder fort, so lautet jetzt die Relation:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{m-1}\,dx}{x^n+\cos\theta+i\sin\theta}=\frac{2\pi}{n}\cdot\frac{e^{\left(\frac{m}{n}-1\right)\theta i}}{\sin\frac{m\pi}{n}},$$

und erweitert man die Integralfunktion durch $(x^n+\cos\theta)-i\sin\theta$, so erhält man für den imaginären Teil die Gleichheit:

$$-i\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\theta\cdot x^{m-1}\,dx}{x^{2n}+2x^n\cos\theta+1}=-i\cdot\frac{2\pi}{n}\cdot\frac{\sin\left(1-\frac{m}{n}\right)\theta}{\sin\frac{m\pi}{n}},$$

aus der die Formel entspringt:

$$\text{(1)} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{m-1}\,dx}{x^{2n} + 2x^n \cos\theta + 1} = \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{\sin\left(1 - \frac{m}{n}\right)\theta}{\sin\frac{m\pi}{n} \cdot \sin\theta}$$

$$(m = 2\mu + 1,\ n = 2\nu,\ 0 < m < n;\ -\pi < \theta < \pi).$$

Auch hier zeigt sich wieder aus den am Schlusse des § 32 angegebenen Gründen, dafs θ zwischen gewissen festen Grenzen eingeschlossen sein mufs.

Es ist zweckmäfsig, dieses Resultat anders zu schreiben. Man erweitere die Integralfunktion mit x^{-n} und ersetze darauf $n - m$ durch m', das also ebenfalls ungerade und von gleichem Umfange wie m ist, d. h. alle möglichen Werte von 1 bis $n - 1$ durchlaufen kann. Bedenkt man noch, dafs rechts im Nenner $\sin\frac{m\pi}{n} = \sin\frac{(n - m')\pi}{n} = \sin\frac{m'\pi}{n}$ ist, so gelangt man, wenn der Accent wieder weggelassen wird, zu der Formel:

$$\text{(2)} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{-m-1}\,dx}{x^n + 2\cos\theta + x^{-n}} = \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{\sin\frac{m\theta}{n}}{\sin\frac{m\pi}{n} \cdot \sin\theta}$$

$$(m = 2\mu + 1,\ n = 2\nu,\ 0 < m < n;\ -\pi < \theta < \pi).$$

Die Formel (3) des § 32, die (1) des § 33 und die vorstehende Formel (2) belegen wir mit dem gemeinsamen Namen der drei Eulerschen Formeln, weil sie schon von Euler abgeleitet worden sind, allerdings getrennt voneinander und in umständlicherer Weise, als es durch die von uns befolgte zusammenfassende Methode geschehen ist.

Berücksichtigt man, dafs in ihnen die Integralfunktionen nur gerade Potenzen der Variablen x enthalten, und die Integrale zwischen gleichen und entgegengesetzten Grenzen genommen sind, so kann man ihnen auch vermöge des auf gerade Funktionen bezüglichen Satzes (14, 2) folgende Gestalt geben:

$$(3_1) \qquad \int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}\,dx}{x^n + 1} = \frac{\pi}{n} \cdot \frac{1}{\sin\frac{m}{n}\pi},$$

$$(3_2)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{m-1} - x^{m'-1}}{x^n - 1}\,dx = \frac{\pi}{n}\cdot\left(\operatorname{ctg}\frac{m'}{n}\pi - \operatorname{ctg}\frac{m}{n}\pi\right),$$

$$(3_3)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{-m-1}\,dx}{x^n + 2\cos\theta + x^{-n}} = \frac{\pi}{n}\cdot\frac{\sin\frac{m}{n}\theta}{\sin\frac{m}{n}\pi\cdot\sin\theta}\qquad (-\pi<\theta<\pi)$$

$$\left(m = 2\mu + 1,\ m' = 2\mu' + 1,\ n = 2\nu;\ 0 < \frac{m}{m'} < n\right).$$

Behufs Erzielung neuer Resultate müssen wir uns zuvor mit einer im ersten Abschnitt noch nicht entwickelten Grundeigenschaft der bestimmten Integrale näher bekannt machen.

35. Transformation der bestimmten Integrale. — Wie sich fast von selbst versteht, läfst sich ein jedes Integral dadurch umformen, dafs man eine neue Veränderliche einführt.

Um zunächst das unbestimmte Integral ins Auge zu fassen, so sind die beiden Gleichungen:

$$(1)\qquad \int f(x)\,dx = \varphi(x) + C,$$

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x)$$

vollständig äquivalent. Ist nun x eine beliebige Funktion einer anderen unabhängigen Veränderlichen y:

$$x = \psi(y),$$

so folgt aus der bekannten Formel der Differentialrechnung: $\frac{du}{dy} = \frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}$, für $u = \varphi(x)$, $\frac{du}{dx} = f(x)$ die Relation:

$$\frac{d\varphi\big(\psi(y)\big)}{dy} = f\big(\psi(y)\big)\cdot\psi'(y),$$

welche wiederum äquivalent ist mit der Relation:

$$(2)\qquad \int f\big(\psi(y)\big)\cdot\psi'(y)\,dy = \varphi\big(\psi(y)\big) + C.$$

Aus der Vergleichung der (1) und (2) ergibt sich, dafs notwendig auch

$$(3)\qquad \int f(x)\,dx = \int f\big(\psi(y)\big)\cdot\psi'(y)\,dy$$

sein mufs. Durch diese Formel ist der folgende Satz ausgedrückt:

„Wenn in einem Integral die Veränderliche x einer beliebigen Funktion einer anderen Veränderlichen y gleichgesetzt und dadurch diese letztere als neue Variable eingeführt wird, so ist die Integralfunktion noch mit der Derivierten von x nach y zu multiplicieren, damit das nach y genommene Integral dieses Produktes gleich sei dem ursprünglichen Integral nach x.“

Für bestimmte Integrale als Differenz der betreffenden Grenzfunktionen behält natürlich dieser Satz seine volle Gültigkeit, und es fragt sich nur noch, welche Beziehungen bestehen werden zwischen den Grenzwerten a und b des gegebenen und den Grenzwerten des neuen Integrals. Wenn aber α und β die Werte von y sind, für welche x oder die Funktion ψ beziehentlich die Werte a und b annimmt, wenn man also:

$$a = \psi(\alpha), \quad b = \psi(\beta)$$

hat, so entspringt aus der (1):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a) = \varphi\big(\psi(\beta)\big) - \varphi\big(\psi(\alpha)\big),$$

und ebenso aus der (2):

$$\int_\alpha^\beta f\big(\psi(y)\big)\cdot\psi'(y)\cdot dy = \varphi\big(\psi(\beta)\big) - \varphi\big(\psi(\alpha)\big),$$

woraus dann unmittelbar die Gleichung fliefst:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\big(\psi(y)\big)\cdot\psi'(y)\cdot dy. \tag{4}$$

Die a und b entsprechenden Grenzen des neuen Integrals sind mithin α und β. Die Gleichheit (4) ist eine völlig identische, da ja beide bestimmten Integrale rein numerische Quanta bezeichnen, in denen die Integrationsbuchstaben x bezw. y gar nicht vorkommen; ergäbe z. B. das ursprüngliche Integral den Wert π, so müfste auch das andere Integral denselben Wert π repräsentieren.

Dieses wichtige, die wesentlichsten Dienste leistende Substitutionsverfahren wird die Transformation der bestimmten Integrale genannt.

36. Die Eulerschen Formeln für beliebige Zahlenwerte ihrer Parameter. — In den in § 34 zusammengestellten drei

Eulerschen Formeln dürfen die Parameter m, m', n nur ganze Zahlen sein. Durch eine geeignete Transformation kann man es aber dahin bringen, dafs diese Beschränkung fortfällt und jene Parameter durch andere ersetzt werden, die ganz beliebige, nur an ihre gegenseitigen Gröfsenbeziehungen gebundene Zahlenwerte vorstellen.

Zu diesem Zwecke wenden wir, indem wir durch p eine beliebige ganze positive Zahl bezeichnen, die Substitution an:

$$x = y^{\frac{1}{p}},$$

für welche $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}\, y^{\frac{1}{p}-1}$ ist und die Grenzen der Integrale unverändert bleiben, denn $y = x^p$ gibt:

$$x = 0,\ y = 0;\ x = \infty,\ y = \infty.$$

So gewinnen wir an Stelle der (3) des § 34 die Formeln:

$$(1)\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{p}\int_0^\infty \frac{y^{\frac{m}{p}-1}\,dy}{y^{\frac{n}{p}}+1} = \frac{\pi}{n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{m}{n}\pi},\\
&\frac{1}{p}\int_0^\infty \frac{y^{\frac{m}{p}-1} - y^{\frac{m'}{p}-1}}{y^{\frac{n}{p}}-1}\,dy = \frac{\pi}{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{m'}{n}\pi - \operatorname{ctg}\frac{m}{n}\pi\right),\\
&\frac{1}{p}\int_0^\infty \frac{y^{-\frac{m}{p}-1}\,dy}{y^{\frac{n}{p}} + 2\cos\theta + y^{-\frac{n}{p}}} = \frac{\pi}{n}\cdot\frac{\sin\frac{m}{n}\theta}{\sin\frac{m}{n}\pi\cdot\sin\theta} \quad (-\pi<\theta<\pi)\\
&(m = 2\mu+1,\ m' = 2\mu'+1,\ n = 2\nu;\ 0 < \tfrac{m}{m'} < n;\\
&\qquad p \text{ beliebig ganz, } > 0).
\end{aligned}\right.$$

Diese neuen Integrale sind schon insofern allgemeiner, als zu den zwei Parametern m, (m'), n als dritter, ihnen koordinierter, die Zahl p hinzugetreten ist, die nicht einmal notwendig ganz zu sein brauchte, obwohl diese Beschränkung völlig ausreichend ist.

Übrigens ist leicht ersichtlich, dafs es für die in Anwendung gebrachte Transformation erforderlich war, die untere Grenze der Integrale auf 0 zu bringen, damit die Variable y nirgend negativ würde, weil sonst die im Zähler der Integrale auftretenden gebrochenen Potenzen $y^{\frac{\pm m - p}{p}}$ nie eine positive reelle Wurzel, und in dem Falle, wo p eine gerade Zahl wäre, sogar lauter imaginäre Wurzeln hätten [13]), während, wenn y nur positive Werte annimmt, die Potenz stets, für jeden Wert ihres gebrochenen Exponenten, eine Wurzel besitzt, die sich vor allen anderen dadurch auszeichnet, daſs sie reell und positiv ist, und die man dann fast immer, und so auch bei unseren Integralen, allein in Betracht zieht.

Die Formeln (1) lassen sich nun auch so schreiben:

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{n}{p}\int_0^\infty \frac{y^{\frac{m}{p}-1}\,dy}{y^{\frac{n}{p}}+1} = \pi\cdot\frac{1}{\sin\frac{\frac{m}{p}}{\frac{n}{p}}\pi},\\
&\frac{n}{p}\int_0^\infty \frac{y^{\frac{m}{p}-1} - y^{\frac{m'}{p}-1}}{y^{\frac{n}{p}}-1}\,dy = \pi\cdot\left(\operatorname{ctg}\frac{\frac{m'}{p}}{\frac{n}{p}}\pi - \operatorname{ctg}\frac{\frac{p}{m}}{\frac{m}{p}}\pi\right),\\
&\frac{n}{p}\int_0^\infty \frac{y^{-\frac{m}{p}-1}\,dy}{y^{\frac{n}{p}}+2\cos\theta+y^{-\frac{n}{p}}} = \pi\cdot\frac{\sin\frac{\frac{m}{p}}{\frac{n}{p}}\theta}{\sin\frac{\frac{m}{p}}{\frac{n}{p}}\pi\cdot\sin\theta}\qquad(-\pi<\theta<\pi)\\
&\left(0<\frac{m}{p}<\frac{n}{p},\ 0<\frac{m'}{p}<\frac{n}{p}\right),
\end{aligned}\right.$$

wo von den Bedingungen diejenigen weggelassen sind, auf die es jetzt nicht mehr ankommt.

In dieser neuen Gestalt nimmt man an den Formeln die bemerkenswerte Eigenschaft wahr, daſs sowohl in den Integralen als in den Ausdrücken rechts nur die Verhältnisse $\frac{m}{p}$, $\left(\frac{m'}{p}\right)$ und $\frac{n}{p}$ der Parameter vorkommen. Da nun p und auch innerhalb der ihnen gezogenen Schranken m, (m'), n von ganz beliebiger Gröſse sind, so leuchtet ein, daſs, wenn a, (a'), b irgend welche rationale oder irrationale positive Werte bezeichnen, die nur der den Ungleichheiten in (2) entsprechenden Bedingung $0 < \frac{a}{a'} < b$ unterliegen sollen, man immer solche ganze Zahlen m, (m'), n, p wird ausfindig machen können, für welche die Quotienten $\frac{m}{p}$, $\frac{m'}{p}$, $\frac{n}{p}$ beziehentlich den Gröfsen a, a', b so nahe kommen, als man nur will. Und da beide Seiten der Gleichungen (2) gleichzeitig und allein von diesen Verhältnissen der Parameter abhängig sind, so ist es, wie stets in solchem Falle, gestattet, jene Quotienten durch die Werte a, a', b zu ersetzen.

So gelangt man, wenn wieder x als Variable eingeführt wird, zu den folgenden, äufserst wichtigen Integralen:

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{x^b+1} = \frac{\pi}{b}\cdot\frac{1}{\sin\frac{a}{b}\pi},\\ &\int_0^\infty \frac{x^{a-1}-x^{a'-1}}{x^b-1}\,dx = \frac{\pi}{b}\cdot\left(\operatorname{ctg}\frac{a'}{b}\pi - \operatorname{ctg}\frac{a}{b}\pi\right),\\ &\int_0^\infty \frac{x^{-a-1}\,dx}{x^b+2\cos\theta+x^{-b}} = \frac{\pi}{b}\cdot\frac{\sin\frac{a}{b}\theta}{\sin\frac{a}{b}\pi\,.\,\sin\theta} \quad (-\pi<\theta<\pi),\\ &\left(0<\frac{a}{a'}<b,\ \text{mithin } 0<\frac{a}{b} \text{ und } \frac{a'}{b}<1\right). \end{aligned}\right.$$

Allerdings müfste man noch, um jeden Zweifel an der Gültigkeit dieser Gleichungen zu beseitigen, den Nachweis führen, dafs in den Formeln (2) sowohl die Integrale als die ihnen gleichen Ausdrücke stetige Funktionen der Verhältnisse $\frac{m}{p}$, $\left(\frac{m'}{p}\right)$, $\frac{n}{p}$ sind; denn nur dann werden — das liegt ja eben in dem Begriff der Stetigkeit — je mehr sich jene Quotienten den Gröfsen a, (a'), b nähern, auch gleichzeitig die sechs Funktionen (2) gegen die entsprechenden Funktionen (3) konvergieren, die durch direkte Substitution von a, (a'), b entstanden sind. So ist z. B. in der ersten Formel (2) der Ausdruck rechts offenbar eine stetige Funktion von $\frac{m}{p}$ und $\frac{n}{p}$, weil diese Brüche und ihr Quotient, also auch der sinus [14]), nie gleich Null werden, und von dem zugehörigen Integral liefse sich leicht dasselbe nachweisen. Da aber bei unseren Integralen überhaupt kein Gedanke daran ist, dafs sie unstetig sein könnten, so wollen wir von diesem eigentlich notwendigen Beweise Abstand nehmen.

Eine weitere Vereinfachung der vorstehenden Formeln wird endlich dadurch erzielt, dafs man von den beiden in ihnen enthaltenen Parametern a, (a'), b den Parameter b gleich 1 wählt. Sie gewinnen dann ein viel gefälligeres Aussehen und die für die Anwendungen brauchbarste Gestalt, ohne etwas von ihrer Allgemeinheit einzubüfsen, wie dies auch die Substitution $x^b = y$, durch welche sie auf dieselbe Form gebracht werden, würde erkennen lassen.

Man hat also schliefslich die Formeln:

$$(4)\left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{x+1} = \pi \cdot \frac{1}{\sin a\pi}, \\ &\int_0^\pi \frac{x^{a-1} - x^{a'-1}}{x-1}\,dx = \pi \cdot (\operatorname{ctg} a'\pi - \operatorname{ctg} a\pi), \\ &\int_0^\infty \frac{x^{-a-1}\,dx}{x + 2\cos\theta + x^{-1}} = \pi \cdot \frac{\sin a\theta}{\sin a\pi \cdot \sin\theta} \quad (-\pi < \theta < \pi), \\ &\qquad (0 < {}^{a}_{a'} < 1). \end{aligned}\right.$$

Besonders hervorzuheben ist noch für das zweite dieser Integrale der specielle Fall $a' = \frac{1}{2}$, für den $\operatorname{ctg} a'\pi$ verschwindet und sich das Resultat ergibt:

$$(5) \qquad \int_0^\infty \frac{x^{a-1} - x^{-\frac{1}{2}}}{1-x}\,dx = \pi \operatorname{ctg} a\pi \qquad (0 < a < 1).$$

37. Reduktion auf endliche Grenzen. — Von den übrigen mannigfachen Umformungen, deren die Eulerschen Integrale fähig sind, wollen wir nur noch die eine betrachten, durch welche sie auf endliche Grenzen gebracht werden.

Man erreicht dies, indem man die betreffenden Integrale in die Summe zweier Teilintegrale von 0 bis 1 und 1 bis ∞ zerlegt und auf das zweite die Transformation:

$$(s)\qquad x = \frac{1}{x'},\ \text{also}\ dx = -\frac{1}{x'^2}dx';$$
$$x = 1,\ x' = 1;\quad x = \infty,\ x' = 0$$

anwendet, durch welche es auf die Grenzen 0, 1 zurückgeführt wird und mit dem ersten Teilintegral vereinigt werden kann.

So hat man zunächst für das erste der Integrale (4) des vorangehenden Paragraphen:

$$(1')\qquad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{x+1} = \int_0^1 \frac{x^{a-1}\,dx}{x+1} + \int_1^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{x+1},$$

und vermöge der Substitution (s), wenn man schliefslich den Accent wieder wegläfst:

$$\int_1^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{x+1} = -\int_1^0 \frac{x^{-a}\,dx}{x+1} = \int_0^1 \frac{x^{-a}\,dx}{x+1},$$

mithin:

$$(1)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{x+1} = \int_0^1 \frac{x^{a-1}+x^{-a}}{x+1}\,dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}\qquad (0<a<1).$$

Ebenso ist für die (5) des § 36:

$$\int_1^\infty \frac{x^{a-1}-x^{-\frac{1}{2}}}{1-x}\,dx = -\int_1^0 \frac{x^{1-a}-x^{\frac{1}{2}}}{1-x^{-1}}\cdot\frac{x^{-1}}{x}\,dx$$
$$= -\int_0^1 \frac{x^{-a}-x^{-\frac{1}{2}}}{1-x}\,dx,$$

mithin:

$$(2)\ \int_0^\infty \frac{x^{a-1}-x^{-\frac{1}{2}}}{1-x}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{a-1}-x^{-a}}{1-x}\,dx = \pi \operatorname{ctg} a\pi\quad (0<a<1);$$

und für die dritte Formel (4) des § 36:

$$\int_1^\infty \frac{x^{-a-1}\,dx}{x+2\cos\theta+x^{-1}} = \int_0^1 \frac{x^{a-1}\,dx}{x+2\cos\theta+x^{-1}},$$

mithin:

$$
(3) \qquad \begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^{-a-1}\,dx}{x+2\cos\theta+x^{-1}} &= \int_0^1 \frac{x^a+x^{-a}}{x+2\cos\theta+\frac{1}{x}}\cdot\frac{dx}{x} \\
&= \pi\cdot\frac{\sin a\theta}{\sin a\pi\cdot\sin\theta}
\end{aligned}
$$

$$(0 < a < 1;\; -\pi < \theta < \pi).$$

38. Entwickelung in Reihen. — Läfst sich die Integralfunktion eines ausgemittelten Integrals in eine Reihe entwickeln und die Integration der einzelnen Glieder ausführen, so gewinnt man eine Darstellung des bekannten Wertes des Integrals durch eine Reihe. Dieses auf geeignete Formeln der vorangehenden Paragraphen angewandte Verfahren führt zu den von Euler in seiner „Introductio“ auf anderem Wege hergeleiteten trigonometrischen Reihen.

1. Die erste Eulersche Formel enthält das Integral:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{x+1}.$$

Nun ist:

$$
(1') \qquad \begin{aligned}
\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} &= 1 - x + x^2 - x^3 + - \cdots \\
&= \sum_s \pm x^s,
\end{aligned}
$$

und ebenso:

$$
(1'') \qquad \begin{aligned}
\frac{x}{1+x} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} &= 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + - \cdots \\
&= \sum_s \pm x^{-s},
\end{aligned}
$$

wo, wie auch in allen folgenden Formeln dieses Paragraphen, s alle ganzen Zahlenwerte von 0 bis ∞ anzunehmen hat, und in beiden allgemeinen Gliedern das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem s gerade oder ungerade ist. Die Reihe (1′) konvergiert bekanntlich für alle Werte $0 \leqq x < 1$, mithin die Reihe (1″) für alle Werte $1 < x \leqq \infty$. Zerlegt man also obiges Integral in die Summe der beiden Teilintegrale von 0 bis 1 und von 1 bis ∞, so hat man in dem ersteren vermittelst der (1′)

$$\frac{x^{a-1}}{x+1} = \sum_s \pm x^{a-1+s},$$

in dem zweiten aber vermittelst der (1″)

$$\frac{x^{a-1}}{x+1} = \frac{x}{x+1} \cdot x^{a-2} = \sum_s \pm x^{a-2-s}$$

zu setzen. Daraus ergeben sich sofort die betreffenden Integrale der allgemeinen Glieder:

$$\pm \int_0^1 x^{a-1+s} dx = \pm \left[\frac{x^{a+s}}{a+s}\right]_0^1 = \pm \frac{1}{a+s},$$

$$\pm \int_1^\infty x^{a-2-s} dx = \pm \left[\frac{x^{a-1-s}}{a-1-s}\right]_1^\infty = \mp \frac{1}{a-1-s},$$

und man gewinnt mit Rücksicht auf die erste Formel (4) des § 36 die Reihe:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\pi}{\sin a\pi} = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{a+2} - \dfrac{1}{a+3} + - \cdots \\ \qquad\qquad - \dfrac{1}{a-1} + \dfrac{1}{a-2} - \dfrac{1}{a-3} + - \cdots \\ \qquad = \dfrac{1}{a} - \dfrac{2a}{a^2-1} + \dfrac{2a}{a^2-4} - \dfrac{2a}{a^2-9} + - \cdots \\ \qquad\qquad (0 < a < 1). \end{cases}$$

2. Noch einfacher gestaltet sich die Reihenentwickelung für das Integral (2) des § 37:

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1-x} dx = \pi \operatorname{ctg} a\pi \qquad (0 < a < 1).$$

Denn die gleichfalls für alle Werte $0 \leqq x < 1$ konvergente Reihe:

$$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_s x^s$$

gibt unmittelbar für die beiden Teile der Integralfunktion:

$$\frac{x^{a-1}}{1-x} = \sum_s x^{a-1+s}, \text{ bezw. } \frac{x^{-a}}{1-x} = \sum_s x^{s-a},$$

mithin für die allgemeinen Glieder das schon vorher gebrauchte Integral:

$$\int_0^1 x^{a-1+s}\,dx = \frac{1}{a+s}$$

bezw. das Integral:

$$\int_0^1 x^{s-a}\,dx = \frac{1}{s+1-a} = -\frac{1}{a-s-1}.$$

Demnach hat man die Reihe:

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}\pi \operatorname{ctg} a\pi &= \frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} + \frac{1}{a+3} + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{a-1} + \frac{1}{a-2} + \frac{1}{a-3} + \cdots \\ &= \frac{1}{a} + \frac{2a}{a^2-1} + \frac{2a}{a^2-4} + \frac{2a}{a^2-9} + \cdots \\ &\qquad (0 < a < 1).\end{aligned}\right.$$

Man lasse nicht unbeachtet, daſs in ihrer ersten Gestalt jede der Entwickelungen (1) und (2) nur eine, zu den sogenannten harmonischen Reihen gehörige, nach beiden Seiten hin unendliche Reihe darstellt mit dem allgemeinen Gliede $\pm \frac{1}{a+s}$ bezw. $\frac{1}{a+s}$, in dem s alle ganzen Zahlenwerte von $-\infty$ bis ∞ zu durchlaufen hat.

3. Wird die Gleichung (2) in ihrem ersten Ausdruck auf beiden Seiten nach a integriert, so kommt:

$$\begin{aligned}\log \sin a\pi &= \log a + \log(a+1) + \cdots \\ &\qquad + \log(a-1) + \log(a-2) + \cdots \\ &= \log[\cdots (a-2)(a-1)\, a\, (a+1) \cdots];\end{aligned}$$

folglich ist auch:

$$\sin a\pi = \cdots (a-2)(a-1)\, a\, (a+1) \cdots,$$

und setzt man noch:

$$a\pi = \varphi, \quad a = \frac{\varphi}{\pi},$$

so gelangt man zu der bekannten Darstellung des sinus durch ein Produkt unendlich vieler Faktoren:

$$\sin\varphi = \cdots \left(\frac{\varphi}{\pi} - 2\right)\left(\frac{\varphi}{\pi} - 1\right)\frac{\varphi}{\pi}\left(\frac{\varphi}{\pi} + 1\right)\left(\frac{\varphi}{\pi} + 2\right)\cdots.$$

Zwar ist die vorstehend befolgte Methode nicht frei von einigen Ungenauigkeiten; doch lassen wir dies unter Hinweis auf die Behandlung derselben Aufgabe in § 12 der „Anwendungen" auf sich beruhen.

Drittes Kapitel.

Zweite Begriffserweiterung des bestimmten Integrals: Unendlichwerden der Integralfunktion.

39. Einleitende Bemerkungen. — Während bisher die Integralfunktion in der ganzen Dimension zwischen den beiden Grenzen und an diesen Grenzen selbst durchaus stetig sein mufste, erleide sie jetzt dadurch Unterbrechungen der Stetigkeit, dafs sie an einer oder mehreren Stellen unendlich grofs werde. Niemals kann man alsdann unter dem bestimmten Integral das verstehen, was wir früher mit diesem Begriff verbanden, nämlich die Summe von unendlich vielen unendlich kleinen Differentialelementen. Denn wird die Funktion $f(x)$ z. B. für den Wert $x = \xi$ unendlich, so findet sich unter jenen Elementen auch das eine:

$$f(\xi) \cdot (x_1 - \xi),$$

wo x_1 der auf ξ in demselben Sinne wie die obere Grenze b auf die untere a nächstfolgende Zwischenwert der Veränderlichen ist. In diesem Produkt ist aber der eine Faktor, $f(\xi)$, unendlich, der andere, $x_1 - \xi$, unaufhörlich im Abnehmen begriffen, und mit einem solchen Produkt, das häufig auch unendlich sein kann, läfst sich gar kein bestimmter Sinn verknüpfen, mithin auch nicht mit der bisher als bestimmtes Integral aufgefafsten unendlichen Summe, von der jenes Produkt ein Glied ist, und die, selbst wenn sie nicht unendlich grofs würde, doch jedenfalls unbestimmt bliebe. Ist es demnach unstatthaft, die frühere Definition auf den vorliegenden Fall, z. B. auf das bestimmte Integral:

$$\int_0^1 x^{k-1}\,dx \qquad (0 < k < 1),$$

in welchem gleich das erste Element, $\frac{1}{0} \cdot x_1$, unbrauchbar wäre, auszudehnen, so ersteht doch die Frage, ob nicht in irgend einer

Weise das bestimmte Integral einer für den ins Auge gefafsten Fall geeigneten Begriffserweiterung fähig ist. Diese Frage soll jetzt einer eingehenden Prüfung unterzogen werden.

40. Diskussion. — Indem wir ausdrücklich hervorheben, dafs es sich nur um Integrale zwischen festen endlichen Grenzen handelt, betrachten wir nacheinander die folgenden Fälle.

1) Die Funktion $f(x)$ werde an der unteren Grenze a unendlich grofs.

Das in einem wenn auch nur minimal kleineren Intervall, nämlich von einem a benachbarten Werte an bis zu b genommene bestimmte Integral wird gemäfs der ursprünglichen Definition stets einen festen, bestimmten Wert besitzen, denn in dieser Ausdehnung ist die Funktion $f(x)$ überall, auch an den Grenzen, endlich und stetig. Läfst man nun die veränderliche untere Grenze dieses Integrals bis nach a hinrücken, so kann es geschehen, dafs dasselbe entweder gegen einen festen, endlichen Wert konvergiert, oder unendlich wird, oder, hin und her oscillierend, einen schwankenden Wert annimmt.

Nur in dem ersten dieser drei Fälle nennt man den festen Grenzwert des veränderlichen Integrals das bestimmte Integral von $f(x)$ nach x zwischen den Grenzen a und b und bezeichnet es ebenfalls durch den Ausdruck

$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

der aber nunmehr in einem wesentlich anderen Sinne als bisher zu interpretieren ist.

In jedem der beiden anderen Fälle hingegen, wo man entweder ins Unendliche hinausrückt oder etwas Unbestimmtes erhält, kann von einem bestimmten Integral gar nicht die Rede sein.

Ebenso verhält es sich, wenn die Funktion an der oberen Grenze b unendlich wird.

2) Ist die Funktion $f(x)$ an beiden Grenzen a und b unendlich, so wird dem Integral (1) nur dann eine Bedeutung beizumessen sein, wenn für einen beliebigen Zwischenwert $x = c$ jedes der beiden Teilintegrale von a bis c und von c bis b auf Grund der vorangehenden Fälle einen Sinn besitzt.

3) Ist die Funktion $f(x)$ für einen zwischen den Grenzen a und b gelegenen Wert $x = c$ unendlich, so wird die Entscheidung über die Bedeutung des Integrals (1) ebenfalls auf den ersten Fall zurückgeführt, indem man es in die Summe der beiden Teilintegrale von a bis c und von c bis b zerlegt und jedes dieser an einer Grenze unendlichen Integrale auf seinen Wert prüft. Zu diesem Behufe scheide man zunächst die Unstetigkeitsstelle aus und setze vielmehr:

$$(2) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\delta=0} \int_{c+\delta}^b f(x)\,dx,$$

wo ε und δ positive kleine Gröfsen bezeichnen, die unabhängig voneinander bis ins Unendlichkleine abzunehmen bestimmt sind. Behalten alsdann beide Ausdrücke auf der rechten Seite der (2) feste, endliche Werte, so versteht man unter dem Integral (1) die Summe dieser beiden Grenzwerte. Wird aber auch nur einer der beiden Ausdrücke unendlich oder unbestimmt, so kann von einem bestimmten Integral (1) gar nicht die Rede sein.

Hieraus ersieht man, dafs es in dem eben interpretierten Sinne sehr wohl ein bestimmtes Integral einer an beliebiger Stelle unendlichen Funktion geben kann, ohne dafs ein solches nach der bisherigen Auffassung existierte.

Wir werden die oben unterschiedenen Hauptfälle noch weiter zu verfolgen haben, doch reichen die aufgestellten Normen schon vollständig aus, um in den verhältnismäfsig seltenen Fällen, wo das unbestimmte Integral der Funktion $f(x)$ bekannt ist, ohne weiteres die Entscheidung über den Ausdruck (1) treffen zu können. Hiervon sollen im folgenden Paragraphen einige Beispiele gegeben werden.

41. Die Funktionen x^{k-1} und $\frac{1}{x}$. — 1) Es sei

$$(1) \qquad f(x) = x^{k-1}.$$

Diese Potenz wird, wenn $k > 1$ ist, für keinen endlichen Wert von x, und wenn $k < 1$ ist, nur für $x = 0$ unendlich grofs. Daher fällt, was auch k sein möge, das Integral:

$$\int_a^b x^{k-1}\,dx,$$

in dem a und b beide wesentlich positiv sind, aufserhalb unserer Betrachtung.

Hingegen ist zu untersuchen, ob der Ausdruck:

(2) $$\int_{-a}^{b} x^{k-1}\,dx \qquad (a, b > 0;\ k < 1),$$

in dem die Funktion für $x = 0$ durch das Unendliche geht, einen Sinn hat oder nicht. Man entscheidet darüber gemäfs der (2) des § 40, der zufolge

$$\int_{-a}^{b} x^{k-1}\,dx = \lim_{\varepsilon=0}\int_{-a}^{-\varepsilon} x^{k-1}\,dx + \lim_{\delta=0}\int_{\delta}^{b} x^{k-1}\,dx$$

zu setzen ist. Da das unbestimmte Integral der Funktion (1) gleich $\frac{x^k}{k} + C$ ist, so ergibt sich hieraus die Relation:

(3) $$\int_{-a}^{b} x^{k-1}\,dx = -\frac{(-a)^k}{k} + \frac{b^k}{k} + \lim_{\substack{\varepsilon=0\\ \delta=0}}\left(\frac{(-\varepsilon)^k}{k} - \frac{\delta^k}{k}\right).$$

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem k ein positiver Bruch oder negativ ist.

Im ersteren Falle ist der vorstehende limes gleich Null, und man erhält das Resultat:

(4) $$\int_{-a}^{b} x^{k-1}\,dx = \frac{b^k - (-a)^k}{k} \qquad (a, b > 0;\ 0 < k < 1),$$

welches zeigt, dafs hier in dem neuen Sinne ein bestimmtes Integral vorhanden ist. Einen speciellen Fall ($a = 0$, $b = 1$) bildet das am Schlufs des § 39 erwähnte Integral:

(4_0) $$\int_{0}^{1} x^{k-1}\,dx = \frac{1}{k} \qquad (0 < k < 1).$$

Ist aber in dem Integral (2) k negativ, gleich $-k$, so wird in der Relation (3) der limes, auf den es vor allem ankommt:

$$-\lim_{\substack{\varepsilon=0\\ \delta=0}}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{(-\varepsilon)^k} - \frac{1}{\delta^k}\right) = \frac{1}{k}(\pm\infty + \infty)^{15)},$$

also unendlich oder völlig unbestimmt. Mithin besitzt der Ausdruck:

(5) $$\int_{-a}^{b} x^{-k-1}\,dx \qquad (a, b, k > 0)$$

keinen Sinn.

2) Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

in welche sich die Funktion (1) für den speciellen Wert $k = 0$ verwandelt, und deren unbestimmtes Integral $\log x + C$ ist, geht ebenfalls für $x = 0$ durch das Unendliche, und es fragt sich, ob für positive Werte von g und h gleichwohl dem Ausdruck:

$$(6) \qquad \int_{-g}^{h} \frac{dx}{x}$$

eine Bedeutung beizumessen ist.

Die (2) des § 40 ergibt:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{-g}^{h} \frac{dx}{x} &= \lim_{\varepsilon=0} \int_{-g}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \lim_{\delta=0} \int_{\delta}^{h} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon=0} \log \frac{\varepsilon}{g} + \lim_{\delta=0} \log \frac{h}{\delta} \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon=0\\ \delta=0}} \log \frac{\varepsilon h}{g\delta} = \log \frac{h}{g} + \lim_{\substack{\varepsilon=0\\ \delta=0}} \log \frac{\varepsilon}{\delta} \qquad \begin{pmatrix} g, h > 0; \\ \varepsilon, \delta > 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \right.$$

wo in dem letzten Ausdruck $\log \frac{h}{g}$ zwar etwas Endliches und Bestimmtes, der limes von $\log \frac{\varepsilon}{\delta}$ aber etwas durchaus Unbestimmtes ist und bleibt, wenn man, wie es sein mufs, ε und δ völlig unabhängig voneinander beläfst.

Mithin ist in dieser Allgemeinheit von einem bestimmten Integral (6) nicht die Rede.

Sobald man aber zwischen dem Dekreszieren von ε und δ irgend ein festes Verhältnis aufstellt, wird auch jener limes etwas Bestimmtes, und sofort erhält der Ausdruck (6) einen Sinn, nimmt aber immer, so oft man das Verhältnis sich ändern läfst, einen anderen Wert an. Setzt man z. B. in der (7) von vornherein $\varepsilon = \delta$ und behält auch während ihres Abnehmens diese Gleichheit immerfort bei, oder soll wenigstens, was auf dasselbe hinausläuft, $\lim\limits_{\substack{\varepsilon=0\\ \delta=0}} \frac{\varepsilon}{\delta} = 1$ sein, dann hat man

$$\lim_{\substack{\varepsilon=0\\ \delta=0}} \log \frac{\varepsilon}{\delta} = \log 1 = 0$$

und somit das vollständig bestimmte Integral:

$$(8) \qquad \int_{-g}^{h} \frac{dx}{x} = \log \frac{h}{g} \qquad (g, h > 0).$$

Ebensogut könnte man aber auch für das Verhältnis von ε und δ beliebig welche andere Voraussetzungen treffen, z. B. seinen limes gleich 2 setzen, und dadurch ebenfalls bestimmte, aber immer modificierte Werte des Integrals (6) erzielen.

Wir werden auf diese Fälle der Unbestimmtheit, die auch bei nicht angebbarem Werte des unbestimmten Integrals von der gröfsten Bedeutung sind, weiter unten noch näher eingehen müssen.

42. Durch Transformation bewirkte Unstetigkeit der Integralfunktion. — Ehe wir in die Untersuchung der Integrale unstetiger Funktionen eingetreten sind, hat sich uns unbewufst dieser Fall schon bei einer früheren Aufgabe dargeboten. In der ersten der drei Eulerschen Formeln [34 (3)] handelte es sich nämlich um das bestimmte Integral:

$$(1) \qquad \int_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{x^n+1} \qquad \begin{pmatrix} m = 2\mu+1,\ n = 2\nu; \\ 0 < m < n \end{pmatrix},$$

in welchem die Funktion im Endlichen, was gegenwärtig allein in Betracht kommt, nirgend unendlich wird; und im Unendlichen wird sie es erst recht nicht, weil die mit einem gröfseren Exponenten behaftete Potenz im Nenner bei weitem schneller wächst als der Zähler. Es stellt daher auch dieses Integral gemäfs der ursprünglichen Definitionsgleichung einen ganz bestimmten Wert dar. In § 36 wurde es aber durch die Substitution $x = y^{\frac{1}{p}}$ schliefslich in den Ausdruck:

$$(2) \qquad \int_0^\infty \frac{x^{\frac{m}{p}-1}\,dx}{1+x} \qquad \left(0 < \frac{m}{p} < 1\right)$$

umgewandelt, in welchem die Integralfunktion an der unteren Grenze $x = 0$ sich auf $\dfrac{1}{x^{1-\frac{m}{p}}}$ reduciert, also unendlich wird. Trotzdem mufs auch das Integral (2), als aus der Transformation des Integrals (1) hervorgegangen, denselben festen, endlichen Wert wie dieses repräsentieren (35), nämlich den Wert $\dfrac{\pi}{\sin\frac{m}{p}\pi}$.

Seine Bedeutung aber stützt sich nun nicht mehr auf die ursprüngliche Definition, sondern auf die Begriffserweiterung des bestimmten Integrals. Ohne diese Begriffserweiterung wäre also überhaupt die Transformation eines bestimmten Integrals gar nicht allgemein zulässig, obwohl sie der in § 35 entwickelten Grundeigenschaft zufolge auf alle nicht bedeutungslosen Integrale anwendbar ist und gerade ein Mittel an die Hand gibt, den Wert der aus ihnen hervorgehenden Integrale unstetiger Funktionen sofort ausfindig zu machen.

So leitet man z. B. aus dem Integral

$$\frac{1}{k}\int_0^1 dx = \frac{1}{k},$$

das natürlich nirgend unendlich ist, durch die Substitution $x = y^k$ das ihm gleichwertige Integral:

$$\int_0^1 x^{k-1}\, dx = \frac{1}{k}$$

ab, dessen Funktion für $0 < k < 1$ an der unteren Grenze unendlich wird, und zu dessen Wertbestimmung in § 41, 1) eine genaue Untersuchung erforderlich war.

Die Aufgabe bei unbekanntem Wert des unbestimmten Integrals[16]).

43. Unstetigkeit der Funktion an einer Grenze. — Wie die Diskussion in § 40 lehrt, kommen bei der Untersuchung der Integrale unstetiger Funktionen als wesentlich verschieden voneinander nur die beiden Fälle in Betracht, wo die Funktion entweder an einer Grenze, oder wo sie an einer beliebigen Stelle zwischen den Grenzen unstetig ist.

1. Was den ersten Fall anbetrifft, so sei die sonst in ihrer ganzen Ausdehnung durchaus stetige und endliche Funktion $f(x)$ der Einfachheit halber für $x = 0$ unendlich grofs. Dann wird [40 (1)] das Integral:

(1) $$\int_0^b f(x)\, dx \qquad (b > 0;\ f(0) = \infty),$$

welches diesen Wert von x zur unteren Grenze hat, einen Sinn besitzen, wenn für ein beliebiges noch so kleines positives ε das Integral:

(2) $$\int_0^\varepsilon f(x)\, dx$$

unendlich klein ist. Denn das in dem früheren Sinne zu verstehende Integral:

$$(3) \qquad \int_{\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

drückt für jeden beliebig kleinen, aber festen Wert von ε eine ganz bestimmte endliche Gröfse aus; könnte also das zugehörige Integral (2) noch einen endlichen Wert annehmen oder gar unendlich grofs werden, so käme für ein bis zu Null abnehmendes ε zu der endlichen Gröfse (3) immer noch etwas Endliches oder gar Unendliches hinzu, und der Ausdruck (1) würde gegen keinen festen Grenzwert konvergieren.

Dafs aber das Integral (2) diese notwendige Bedingung erfüllt, erkennt man daran, dafs, wenn δ eine positive Gröfse bezeichnet, die beliebig kleiner ist als ε, das Integral:

$$\int_{\delta}^{\varepsilon} f(x)\,dx$$

für bis ins Unendliche abnehmende Werte von ε und um so mehr von δ unendlich klein ist, mit anderen Worten daran, dafs

$$\lim_{\substack{\varepsilon=0\\(\delta=0)}} \int_{\delta}^{\varepsilon} f(x)\,dx = 0 \qquad (0<\delta<\varepsilon)$$

ist. Nur wenn dies der Fall ist, kann von einem Integral (1) die Rede sein.

Wir machen auf die analoge Untersuchung der Bedeutung eines bestimmten Integrals von unendlicher Ausdehnung aufmerksam, bei der zu prüfen war (25), ob

$$\lim_{h=\infty} \int_{b}^{b+h} f(x)\,dx = 0$$

ist. Nur der wesentliche Unterschied besteht, dafs, während man in diesem Integral sich die Grenzen immerfort erweitern läfst, das Integral $\int_{\delta}^{\varepsilon} f(x)\,dx$ im Gegenteil in immer engere Grenzen einzuschliefsen ist.

2. Auch hier kann die Entscheidung über die Bedeutung des Integrals (1) gewöhnlich dadurch herbeigeführt werden, dafs man es mit einem anderen Integral vergleicht. Besonders häufig läfst sich zu diesem Zwecke das Integral:

$$(4) \qquad \int_0^b x^{k-1} \cdot \psi(x)\, dx \qquad (0 < k < 1)$$

verwenden, in dem b einen festen positiven Wert und $\psi(x)$ eine innerhalb der ganzen Ausdehnung von 0 bis b, und namentlich auch für $x = 0$ selbst, endliche, vorkommenden Falles auch schwankende Funktion bezeichnen soll. Es ist leicht zu erkennen, dafs unter diesen Voraussetzungen das Integral (4), dessen Funktion $\frac{\psi(x)}{x^{1-k}}$ an der unteren Grenze unendlich ist, in Gemäfsheit der vorangehenden Analyse einen Sinn besitzt. Denn vermöge des Mittelwertsatzes ist:

$$(5) \qquad \begin{aligned} \int_\delta^\varepsilon x^{k-1}\, \psi(x)\, dx &= \psi\big(\delta + (\varepsilon - \delta)\varrho\big) \int_\delta^\varepsilon x^{k-1}\, dx \\ &= \frac{1}{k}(\varepsilon^k - \delta^k) \cdot \psi\big(\delta + (\varepsilon - \delta)\varrho\big) \end{aligned}$$

$$(0 < k < 1;\ 0 < \delta < \varepsilon;\ 0 \leqq \varrho \leqq 1);$$

und da ε^k, δ^k gegen Null konvergieren, so folgt:

$$\lim_{\substack{\varepsilon = 0 \\ (\delta = 0)}} \int_\delta^\varepsilon x^{k-1}\, \psi(x) \cdot dx = 0 \qquad \begin{matrix}(0 < k < 1; \\ 0 < \delta < \varepsilon).\end{matrix}$$

Selbstverständlich würde dieses Resultat auch für $k > 1$ bestehen bleiben; hingegen dürfte k weder negativ noch auch nur gleich Null genommen werden, denn alsdann erhielte man in der (5), ähnlich wie bei den in § 41 behandelten Beispielen, den schliefslich in $\infty - \infty$ übergehenden Faktor $\frac{1}{\varepsilon^k} - \frac{1}{\delta^k}$ $(k > 0)$, bezw. statt des Integrals $\int_\delta^\varepsilon x^{k-1}dx$ das an der Grenze ebenfalls völlig unbestimmte oder auch unendlich grofse $\int_\delta^\varepsilon \frac{dx}{x} = \log\frac{\varepsilon}{\delta}$. Es könnte also in diesen Fällen von einem Integral (4) nicht die Rede sein.

Danach läfst sich das folgende Kriterium aufstellen: „Ist eine für $x = 0$ unendliche Funktion $f(x)$ in das Produkt:

$$x^{k-1} \cdot \psi(x)$$

zerlegbar, dessen zweiter Faktor $\psi(x)$ die oben aufgeführten Bedingungen erfüllt, so hat das Integral:

$$\int_0^b f(x)\,dx \qquad (b > 0,\ f(0) = \infty)$$

einen Sinn, wenn k ein positiver echter Bruch oder größer als 1 ist; für $k \leqq 0$ aber besitzt es keine Bedeutung."

44. Unstetigkeit der Funktion zwischen den Grenzen. Hauptwert des Integrals. — 1. Für das Integral:

(1)
$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad (a < c < b,\ f(c) = \infty),$$

in welchem die Unstetigkeitsstelle c der Funktion $f(x)$ zwischen den beiden Grenzen a, b liegt, ist behufs Feststellung seiner Gültigkeit das in § 40, 3) angegebene Verfahren in Anwendung zu bringen.

Falls dann beide Teile:

(2)
$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx, \quad \int_{c+\delta}^b f(x)\,dx$$

unendlich werden sollten, ist ganz besondere Aufmerksamkeit und Vorsicht geboten, und vor allem zu unterscheiden, ob die beiden Teile mit entgegengesetzten oder mit demselben Zeichen behaftet sind.

In dem ersteren Falle ist das Resultat völlig unbestimmt, da ja wegen des ganz willkürlich zu wählenden Verhältnisses zwischen dem Abnehmen von ε und δ auch jeder beliebige unendliche oder endliche, positive oder negative Wert erzielt werden kann. Wie bereits erwähnt, tragen schon die in § 41 besprochenen Integrale diesen Charakter an sich, den vornehmlich das Integral:

(3)
$$\int_{-g}^{h} \frac{dx}{x} \qquad (g,\ h > 0)$$

noch klarer hervortreten läfst, wenn man die Untersuchung etwas anders gestaltet, als es dort geschehen ist. Bedenkt man nämlich, dafs in dem ersten der beiden Teilintegrale $\int_{-g}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x}$, $\int_{\delta}^{h} \frac{dx}{x}$ die Funktion $\frac{1}{x}$ überall negativ, im zweiten aber positiv ist, so erkennt man sofort, dafs auch jenes selbst negativ, dieses positiv sein mufs. Und noch einfacher ergibt sich direkt aus ihren

Grenzwerten $\lim_{\varepsilon=0} \log\frac{\varepsilon}{g} = -\infty$, $\lim_{\delta=0} \log\frac{h}{\delta} = \infty$, für das ganze Integral (3) die unbestimmte Form: $-\infty + \infty$. Es kann mithin unmöglich diesem Integral ein Sinn untergelegt werden.

Haben hingegen beide Teilintegrale (2) dasselbe Zeichen, so ist das ganze Integral (1) jedenfalls unendlich, und das hat doch wenigstens seinen Sinn.

2. In dem ersten der beiden soeben betrachteten Fälle pflegt man wohl häufig, wie es ja auch natürlich ist, ein gleich schnelles Abnehmen von ε und δ im Auge zu haben und von vornherein $\delta = \varepsilon$ zu wählen. Dann versteht man stillschweigend unter dem bestimmten Integral (1) immer den festen, endlichen Wert, den es für diesen ganz speciellen Fall annimmt, und den Cauchy den Hauptwert des Integrals genannt hat. Man kann denselben also als den Wert definieren, den das Integral (1) ausdrückt, wenn in ihm ε auf beiden Seiten von dem unendlich grofsen Werte der Funktion gleich schnell bis zu Null abnimmt.

Danach stellt z. B. das in § 41 gewonnene Resultat (8):

$$\int_{-g}^{h} \frac{dx}{x} = \log\frac{h}{g} \qquad (g,\ h > 0)$$

den Hauptwert des Integrals (3) dar, und nimmt man in dieser Formel noch g und h gleich 1, so ergibt sich:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = 0$$

als Hauptwert des speciellen Integrals $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$. In der That müssen sich ja auch, da ε und δ von vornherein gleich grofs gesetzt sind und gleich schnell abnehmen sollen, die beiden zugehörigen Teilintegrale $\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x}$ und $\int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x}$ immerfort gegenseitig destruieren.

45. Hauptwert des Integrals $\int_0^\infty \frac{x^{2a-1}\,dx}{1-x^2}$. — Solche nur in ihrem Hauptwerte nicht bedeutungslosen Integrale wurden früher, so auch von Euler, häufig angewendet, wovon wir im folgenden ein interessantes Beispiel, das an eine der Eulerschen Formeln anknüpft, näher ins Auge fassen wollen.

In dem Integral (5) des § 36:

$$(1)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{a-1} - x^{-\frac{1}{2}}}{1-x}\,dx = \pi \operatorname{ctg} a\pi \qquad (0 < a < 1)$$

wird die Funktion aufser für $x = 0$ nirgend unendlich, weder im Unendlichen, wo sie im Gegenteil für wachsende Werte von x offenbar immerfort abnimmt, noch im Endlichen, da für $x = 1$ nicht nur der Nenner, sondern auch der Zähler verschwindet. Und da man es für $x = 0$ mit speciellen Fällen der Formel (4) des § 41 zu thun hat[17]), so besitzt obiges Integral stets einen Sinn. Dasselbe gilt von der Relation:

$$(2)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{2a-1} - 1}{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} a\pi \qquad (0 < a < 1),$$

welche durch die Substitution $x = x'^2$ aus der (1) entspringt, und in der die Integralfunktion ebenfalls überall endlich ist. Wenn man nun statt dessen öfters und namentlich auch bei Euler der Formel begegnet:

$$(3)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{2a-1}\,dx}{1-x^2} = \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} a\pi \qquad (0 < a < 1),$$

so wäre es irrtümlich, daraus schliefsen zu wollen, dafs die beiden in der (2) und (3) befindlichen Integrale absolut einander gleich seien. Vielmehr gehört das Integral:

$$(4)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{2a-1}\,dx}{1-x^2} \qquad (0 < a < 1),$$

dessen Funktion für $x = 1$ unendlich grofs wird, der im vorigen Paragraphen betrachteten Klasse von Integralen an. In der That, setzen wir:

$$\int_0^\infty \frac{x^{2a-1}\,dx}{1-x^2} = \int_0^1 \frac{x^{2a-1}\,dx}{1-x^2} + \int_1^\infty \frac{x^{2a-1}\,dx}{1-x^2} \qquad (0 < a < 1),$$

so erkennt man sofort, dafs, wie die Integralfunktion, so auch das erste Teilintegral immer positiv, das zweite immer negativ ist; sind sie mithin, was im allgemeinen der Fall sein wird, beide unendlich grofs, so bleibt das Integral (4) völlig unbestimmt. Hingegen wollen wir jetzt den Nachweis führen, dafs sein Hauptwert gleich $\frac{\pi}{2}$ ctg $a\pi$ ist, für diesen also die Gleichungen (2) und (3) ineinander fliefsen.

Da die Funktion $\frac{x^{2a-1}-1}{1-x^2}$ durchaus stetig und nirgend bei ihr an ein Unendlichwerden zu denken ist, so besitzt die Gleichung (2) unbedingte Gültigkeit und läfst daher auch die unbedingt richtige Umformung zu:

$$(5)\quad \int_0^\infty \frac{x^{2a-1}-1}{1-x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon=0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{x^{2a-1}-1}{1-x^2}\,dx + \lim_{\delta=0}\int_{1+\delta}^\infty \frac{x^{2a-1}-1}{1-x^2}\,dx,$$

ohne dafs ε und δ in Bezug auf ihre gegenseitige Gröfse und ihr Abnehmen irgend einer Beschränkung unterlägen. Sind nun ε und δ noch feste, endliche Werte, so kann die Summe der beiden Integrale auf der rechten Seite dieser Gleichung auch so geschrieben werden:

$$(6)\quad \int_0^{1-\varepsilon}\frac{x^{2a-1}\,dx}{1-x^2} + \int_{1+\delta}^\infty \frac{x^{2a-1}\,dx}{1-x^2} - \left(\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{1-x^2} + \int_{1+\delta}^\infty \frac{dx}{1-x^2}\right).$$

Vermöge der Identität:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)$$

erhält man aber für das Integral von $\frac{1}{1-x^2}$, je nachdem $x \lessgtr 1$ ist, den Ausdruck:

$$-\frac{1}{2}\log(1-x) + \frac{1}{2}\log(1+x) + C,$$

bezw.

$$-\frac{1}{2}\log(x-1) + \frac{1}{2}\log(x+1) + C = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1} + C.$$

Mithin ist:

$$\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\log(2-\varepsilon) - \frac{1}{2}\log\varepsilon$$

und

$$\int_{1+\delta}^{\infty}\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\log\delta-\frac{1}{2}\log(2+\delta),$$

da sich ja in diesem letzteren Integral der Wert der oberen Grenze, $\frac{1}{2}\log\frac{\infty+1}{\infty-1}$, auf Null reduciert.

Nach allem diesem ergibt sich für die Klammer auf der rechten Seite der (6) der Ausdruck:

$$\frac{1}{2}\left(\log\frac{\delta}{\varepsilon}-\log\frac{2+\delta}{2-\varepsilon}\right),$$

und somit verwandelt sich die (5) in die noch immer unbedingt gültige Relation:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x^{2a-1}-1}{1-x^2}dx=\lim_{\varepsilon=0}\int_{0}^{1-\varepsilon}\frac{x^{2a-1}dx}{1-x^2}+\lim_{\delta=0}\int_{1+\delta}^{\infty}\frac{x^{2a-1}dx}{1-x^2}$$
$$-\frac{1}{2}\lim_{\substack{\varepsilon=0\\ \delta=0}}\left(\log\frac{\delta}{\varepsilon}-\log\frac{2+\delta}{2-\varepsilon}\right).$$

Hier ist im letzten Gliede stets, wie sich auch δ und ε zueinander verhalten mögen, $\lim\limits_{\substack{\varepsilon=0\\ \delta=0}}\log\frac{2+\delta}{2-\varepsilon}=0$, während der limes von $\log\frac{\delta}{\varepsilon}$ völlig unbestimmt bleibt. Nur wenn man $\lim\limits_{\substack{\varepsilon=0\\ \delta=0}}\frac{\delta}{\varepsilon}=1$, oder geradezu $\delta=\varepsilon$ annimmt, wird auch er gleich Null. Einzig in diesem Falle fällt das letzte Glied der vorstehenden Gleichung ganz aus, und drückt sie dann mit Rücksicht auf die (6) gleichzeitig auch den Wert des Integrals (4) aus.

Hierdurch ist erwiesen, dafs die (3), weit entfernt, eine allgemein gültige Gleichung darzustellen, nur den Hauptwert des Integrals (4) angibt.

Erst in den letzten dreifsig bis vierzig Jahren hat man sich mit diesen Fragen eindringlicher zu beschäftigen angefangen, und das hat in der That viel dazu beigetragen, manche Lehren von den bestimmten Integralen, die früher auf schwankendem Boden standen, fester zu begründen.

Viertes Kapitel.

Ergänzende Sätze zur ersten Begriffserweiterung des bestimmten Integrals.

46. Das Integral $\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx$. — Wir wenden uns noch einmal den Integralen von unendlicher Ausdehnung zu, um klarzulegen, dafs dieselben ebenso wie die Integrale unstetiger Funktionen sehr wohl einen Sinn haben können, ohne dafs die ursprüngliche Definitionsgleichung noch auf sie anwendbar wäre, und obgleich gemäfs der bereits in § 2 erwiesenen Grundeigenschaft der stetigen Funktionen und der auf diese Eigenschaft gestützten Definition (§ 6) die endliche Entfernung der Grenzen zu den wesentlichen Erfordernissen der Konvergenz eines bestimmten Integrals gehört — wie wir es ja auch an der Funktion $\sin(x^2)$, auf deren Verhalten wir in einer Anmerkung zu § 2 die Aufmerksamkeit gelenkt haben, des näheren dargethan haben.

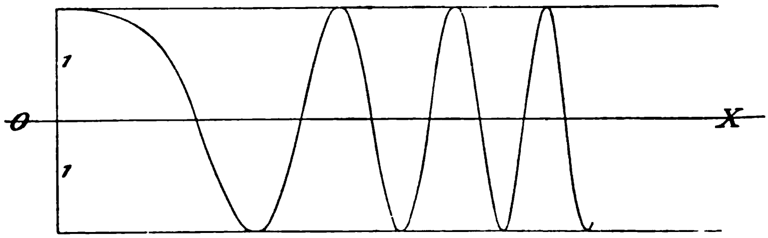
Zur Bekräftigung unserer Behauptung unterziehen wir als besonders geeignetes Beispiel das Integral:

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx \tag{1}$$

einer genauen Untersuchung und werden direkt den Nachweis führen, dafs dasselbe 1) einen festen, endlichen Wert repräsentiert, 2) sich aber nicht in die ursprüngliche Definition des bestimmten Integrals einbeziehen läfst.

1. Die Existenz eines Grenzwertes des Integrals (1) erhellt schon leicht aus der besonderen Beschaffenheit der Fig. 9, welche,

Fig. 9.



auf rechtwinklige Koordinaten bezogen, die durch die Funktion cos (x^2) repräsentierte Kurve und den durch das Integral ausgedrückten Flächenraum vor Augen führt. Auf beiden Seiten der Abscissenachse immerfort zwischen ± 1 hin und her schwankend, geht die Kurve unaufhörlich vom Positiven ins Negative über; aber weil das Argument nicht x, sondern x^2 ist, rücken die aufeinander folgenden Stellen, für welche der cosinus gleich ± 1 ist, immer näher zusammen, oder verengern sich die Windungen der Kurve fort und fort, so dafs die zwischen ihnen gelegenen, abwechselnd positiven und negativen Flächenräume beständig kleiner werden und bis zu Null abnehmen. Das Integral (1) ist also die Summe von unendlich vielen, abwechselnd positiven und negativen, gegen Null konvergierenden Gliedern, und eine so beschaffene unendliche Reihe hat bekanntlich stets einen festen, endlichen Wert.

Diese Eigenschaft soll jetzt auch streng analytisch bewiesen werden, wozu aber nicht die im ersten Kapitel gegenwärtigen Abschnitts in Anwendung gekommene Methode tauglich ist. Denn dort wird erfordert, dafs die Integralfunktion im Unendlichen gegen Null konvergiert, während doch der cos (x^2) immerfort bis zu denselben Werten ± 1 ansteigt. In der That beruht hier das Sinnbehalten des Integrals nur auf dem unaufhörlichen und in immer engeren Räumen sich vollziehenden Oscillieren der Funktion.

Es handelt sich um den Nachweis, dafs das Integral:

$$\int_0^b \cos(x^2)\,dx \qquad (b > 0)$$

mit beständig wachsendem b sich einem festbestimmten Werte nähert. Zu diesem Zwecke setzen wir identisch $\cos(x^2) = \cos(x^2)\cdot 2x \cdot \frac{1}{2x}$ und wenden auf den Faktor $\cos(x^2)\cdot 2x$, die Derivierte von $\sin(x^2)$, teilweise Integration an. Das gibt:

$$\int \cos(x^2)\,dx = \frac{\sin(x^2)}{2x} + \frac{1}{2}\int \frac{\sin(x^2)\,dx}{x^2},$$

mithin, da für $x = 0$ der unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ erscheinende Quotient $\frac{\sin(x^2)}{2x}$ sich auf Null reduciert,

$$\int_0^b \cos(x^2)\,dx = \frac{\sin(b^2)}{2b} + \frac{1}{2}\int_0^b \frac{\sin(x^2)\,dx}{x^2}.$$

Läſst man nun die anfänglich fest vorausgesetzte obere Grenze b bis ins Unendliche wachsen, so ergibt vorstehende Gleichung in Anbetracht, daſs der sinus auch im Unendlichen immer zwischen ± 1 liegt, also $\lim\limits_{b=\infty} \frac{\sin(b^2)}{2b} = 0$ ist, an Stelle des Integrals (1) das andere Integral:

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(x^2)\,dx}{x^2},$$

in welchem die Funktion, als mit einem Zähler begabt, der numerisch höchstens gleich 1 sein kann, an jeder Stelle schneller oder höchstens ebenso schnell abnimmt als (das stets positive) $\frac{1}{x^2}$, und welches demnach dem in § 27, (1) aufgestellten Kriterium zufolge einen Sinn und festbestimmten Wert besitzt [18]).

2. Gleichwohl darf das Integral (1) nicht als Summe unendlich vieler unendlich kleiner, sonst aber ganz willkürlich gewählter Differentialelemente aufgefaſst werden, wie es doch auf Grund der ursprünglichen Definitionsgleichung, die trotz der Willkürlichkeit der Zwischenwerte stets denselben festbestimmten Wert vertritt, der Fall sein müſste. Vielmehr werden wir darthun, daſs gerade die einfachste und daher zunächstliegende Einteilung in lauter gleich groſse Intervalle nicht zu dem wahren Werte führt, den nach dem obigen das Integral (1) besitzt, sondern überhaupt keinen festbestimmten Wert, oder aber den Wert Null ergibt.

Schaltet man nämlich die äquidistanten Zwischenwerte ein:

$$x = \alpha s \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots \text{ in inf.}),$$

die eine unendliche arithmetische Reihe bilden, in der zunächst die Glieder noch diskret aufeinander folgen, so hätte man nach der Definitionsgleichung:

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx = \lim_{\alpha=0} \alpha \cdot \sum_{s=0}^\infty \cos(\alpha^2 s^2).$$

Da es nun völlig gleichgültig ist, in welcher Weise das Abnehmen der positiven Gröſse α vor sich geht, dürfen wir auch festsetzen, daſs α^2 immer, auch während α flüssig ist, ein aliquoter Teil der Peripherie sei, mit anderen Worten, daſs:

$$\alpha^2 = \frac{2\pi}{n}, \quad \alpha = \left|\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\right|$$

sein soll. Dann entspricht der Abnahme von α ein fortwährendes Wachsen der ganzen Zahl n, und die rechte Seite der vorstehenden Gleichung verwandelt sich in das Produkt:

$$\lim_{n=\infty} \left|\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\right| \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \cos\left(s^2 \cdot \frac{2\pi}{n}\right). \tag{2}$$

Der erste Faktor dieses Produktes, $\lim\limits_{n=\infty} \left|\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\right|$, ist gleich Null, der andere aber stellt im ursprünglichsten Sinne des Wortes eine unendliche periodische Reihe dar, deren Periode, wie groſs auch das wachsende n sei, für jeden Wert, den es gerade hat, aus n Gliedern besteht; denn je zwei Glieder der Reihe, in denen s um die ganze Zahl n, und, wie man sich leicht überzeugt, der arcus dann immer um ein Multiplum der Peripherie verschieden ist, müssen stets einander gleich sein. Wird also die Summe einer Periode durch a bezeichnet, so besteht die ganze Reihe aus einer unendlichen Anzahl von gleichen Gröſsen a und ist daher unendlich groſs oder Null, je nachdem a selbst von Null verschieden oder gleich Null ist.

Dieser letztere Fall tritt, wie wir beiläufig bemerken wollen, ein, wenn das positive n eine gerade, aber nicht durch 4 teilbare Zahl, oder eine ungerade Zahl ist, die, durch 4 geteilt, den Rest 3 läſst. Sonst ist stets:

$$\sum_{s=0}^{\infty} \cos\left(s^2 \cdot \frac{2\pi}{n}\right) = \infty.$$

Das Endergebnis ist hiernach, daſs das Produkt (2) entweder die ganz unbestimmte Form $0 \cdot \infty$ annimmt oder gleich Null ist, niemals aber den wahren Wert des Integrals (1) darstellt, dieser mithin auch nicht auf die ursprüngliche Definitionsgleichung gestützt werden darf.

In dem folgenden Paragraphen soll ein äuſserst wichtiges und nützliches Prinzip erwiesen werden, durch welches die im ersten Kapitel dieses Abschnitts behandelte Theorie der Integrale von unendlicher Ausdehnung eine wesentliche Ergänzung erfährt, und welches uns die Existenz des Grenzwertes des Integrals (1) noch auf eine andere Weise erschliefsen wird.

47. Prinzip. — „Sollen die zwischen unendlichen Grenzen genommenen Integrale:

$$\int_0^\infty \sin(\alpha x) \cdot \psi(x) \cdot dx, \tag{1}$$

$$\int_0^\infty \cos(\alpha x) \cdot \psi(x) \cdot dx, \tag{2}$$

in denen der Parameter α irgend eine positive oder negative Konstante bezeichnet, einen Sinn besitzen, so ist es notwendig und ausreichend, dafs der Funktionalfaktor $\psi(x)$, wenn nicht schon von Anfang an, so doch von einer gewissen — übrigens wie immer bei unendlicher Ausdehnung eines Integrals und bei unendlichen Reihen — noch so weit entfernten Stelle an ein und dasselbe Zeichen beibehalte und mit wachsendem x numerisch bis zu Null abnehme." — Nicht aber ist $\psi(x)$ an die frühere Bedingung (27) gebunden, der zufolge das Abnehmen der Integralfunktion schneller vor sich gehen mufste als das der Funktion x^{-k} ($k > 1$) oder eines ähnlichen zur Vergleichung herangezogenen Ausdruckes. Vielmehr beruht hier das Sinnbehalten der Integrale (1) und (2) darauf, dafs ihre Funktionen unaufhörlich aus dem Positiven ins Negative hin und her gehen. Übrigens ist einleuchtend, dafs man den Faktor $\psi(x)$ von der betreffenden Stelle an immer wird positiv annehmen dürfen, denn anderenfalls brauchte man sein Minuszeichen nur vor das Integral zu setzen, um in demselben wieder ein positives $\psi(x)$ zu haben.

Der Beweis dieses Prinzips, das über die Hälfte aller in Betracht kommenden Fälle umfafst, natürlich aber nicht alle Minutien zu erschöpfen vermag, stützt sich auf den bekannten, bereits im vorigen Paragraphen berührten Satz aus der Reihenlehre, dafs „eine unendliche bis zu Null abnehmende Reihe immer konvergiert, wenn von einem bestimmten, übrigens beliebig weit entfernten Range an alle ihre Glieder abwechselnd positiv und negativ sind und ein jedes numerisch kleiner ist als das vorhergehende".

Sei z. B.:

(3) $\quad A + B + C + \cdots + L - M + N - P + - \text{ etc.}$

(3') $\quad (L > M > N > P > \cdots \geqq 0)$

die diese Forderungen erfüllende Reihe. Ihr erster, bis zu L oder auch beliebig weiter sich erstreckender, aber immer nur eine endliche Anzahl von Gliedern umfassender Teil wird, wenn auch möglicherweise sehr grofs, doch noch endlich sein. Was aber den übrigbleibenden, jedenfalls aus unendlich vielen Gliedern bestehenden Teil anbetrifft, so gelten für ihn offenbar stets die beiden Ungleichheiten:

$$(L - M) + (N - P) + \cdots > 0,$$
$$L - (M - N) - (P - Q) - \cdots < L.$$

Bricht man also die Reihe unmittelbar vor L oder irgend einem anderen additiven Gliede ab, das innerhalb der Bedingungen (3') liegt, so ist der ganze Rest der Reihe positiv und kleiner als dieses Glied und kann mithin, wofern dasselbe nur in gehöriger Entfernung gewählt wird, der Null beliebig nahe gebracht werden. Damit ist die Konvergenz der Reihe (3) erwiesen.

Nun vermag man aber jedes der beiden Integrale (1), (2) so in die Summe unendlich vieler Teilintegrale zu zerlegen, dafs diese sämtlich allen Bedingungen der eben betrachteten Reihe gerecht werden.

Untersuchen wir an erster Stelle das Integral (1). Indem wir α zunächst positiv voraussetzen, wählen wir zur unteren bezw. oberen Grenze seiner aufeinander folgenden Teilintegrale die Werte:

(4) $$\frac{s\pi}{\alpha} \quad \text{und} \quad \frac{(s+1)\pi}{\alpha} \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots \text{ in inf.}).$$

Dann erstreckt sich in dem — der Kürze halber durch M_s bezeichneten — Teilintegral:

$$\int\limits_{\frac{s\pi}{\alpha}}^{\frac{(s+1)\pi}{\alpha}} \sin(\alpha x)\cdot\psi(x)\cdot dx = M_s,$$

welches je nach dem Werte von s ein jedes sein kann, der arcus über eine halbe Peripherie, von $s\pi$ bis $(s+1)\pi$, so dafs der sinus abwechselnd, je nachdem s gerade oder ungerade ist, alle positiven oder alle negativen Werte von 0 über ± 1 bis zu 0 zurück durchläuft und also in der ganzen Ausdehnung des Integrals sein Zeichen nicht wechselt. Was den Faktor $\psi(x)$ anbetrifft, so gehöre M_s bereits denjenigen Teilintegralen an, in denen er den ihm oben vindicierten Charakter an sich trägt. Alsdann behält die ganze Integralfunktion innerhalb der Grenzen des Integrals ein und dasselbe Zeichen bei, und sind, gleichwie ihre sinus-Faktoren, die aufeinander folgenden Teilintegrale selbst alternierend positiv und negativ. Da nun ferner das der Annahme nach positive $\psi(x)$ mit wachsendem Argument beständig abnimmt, seinen gröfsten Wert also am Anfang, den kleinsten Wert am Ende des Integrals besitzt, so mufs dem Mittelwertsatze zufolge M_s der Gröfse nach zwischen:

$$\psi\left(\frac{s\pi}{\alpha}\right)\int\limits_{\frac{s\pi}{\alpha}}^{\frac{(s+1)\pi}{\alpha}} \sin(\alpha x)\,dx \quad \text{und} \quad \psi\left(\frac{(s+1)\pi}{\alpha}\right)\int\limits_{\frac{s\pi}{\alpha}}^{\frac{(s+1)\pi}{\alpha}} \sin(\alpha x)\,dx$$

liegen, und in Anbetracht, dafs

$$\int\limits_{\frac{s\pi}{\alpha}}^{\frac{(s+1)\pi}{\alpha}} \sin(\alpha x)\,dx = \frac{-\cos(s+1)\pi + \cos(s\pi)}{\alpha} = \pm\frac{2}{\alpha}$$

$$\left(s = \begin{cases} 2\mu \\ 2\mu + 1 \end{cases}\right)$$

ist, für den numerischen Wert von M_s die Gröfsenbeziehung:

$$\frac{2}{\alpha}\cdot\psi\left(\frac{s\pi}{\alpha}\right) > |M_s| > \frac{2}{\alpha}\cdot\psi\left(\frac{(s+1)\pi}{\alpha}\right) > 0$$

und ebenso für das folgende Teilintegral die Gröfsenbeziehung:

$$\frac{2}{\alpha}\cdot\psi\left(\frac{(s+1)\pi}{\alpha}\right) > |M_{s+1}| > \frac{2}{\alpha}\cdot\psi\left(\frac{(s+2)\pi}{\alpha}\right) > 0$$

bestehen. Aus der Vergleichung dieser beiden Gröfsenordnungen geht aber hervor, dafs jedes folgende Teilintegral numerisch kleiner ist als das vorhergehende; und weil für ein hinreichend grofses s der zugehörige Wert von $\psi\left(\frac{s\pi}{\alpha}\right)$ beliebig klein werden kann, so nähern sie sich unbegrenzt der Null.

Ist α negativ, so hat man natürlich die Grenzwerte (4) sowohl in den Teilintegralen M als in der Funktion $\psi(x)$ durch $\frac{s\pi}{|\alpha|}$ bezw. $\frac{(s+1)\pi}{|\alpha|}$ und $\frac{(s+2)\pi}{|\alpha|}$, und ebenso $\frac{2}{\alpha}$ durch $\frac{2}{|\alpha|}$ zu ersetzen [19]). Alsdann erstreckt sich die ganze vorangehende Entwickelung auch auf diesen Fall.

Alle Kriterien des obigen Konvergenzsatzes sind mithin erfüllt. Also besitzt das Integral (1) einen festen, endlichen Wert.

Die Diskussion des Integrals (2) würde sich genau ebenso gestalten. Nur muſs man in Anbetracht, daſs an seiner unteren Grenze der cosinus gleich 1 ist und erst für den arcus $\frac{\pi}{2}$ und darauf für jedes ungerade Multiplum von $\frac{\pi}{2}$ durch Null geht, zuvor das Integral:

$$\int_0^{\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\pi}{2}} \cos(\alpha x)\cdot\psi(x)\cdot dx$$

abtrennen, welches als Integral einer durchaus stetigen Funktion zwischen endlichen Grenzen selbstverständlich einen festbestimmten Wert repräsentiert. Den übrigen Teil, das Integral:

$$\int_{\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\pi}{2}}^{\infty} \cos(\alpha x)\cdot\psi(x)\cdot dx$$

hat man alsdann in Teilintegrale von der Form:

$$\int_{\frac{s}{\alpha}\cdot\frac{\pi}{2}}^{\frac{s+2}{\alpha}\cdot\frac{\pi}{2}} \cos(\alpha x)\cdot\psi(x)\cdot dx \qquad \begin{pmatrix} s = 1, 3, 5, \ldots \\ 2\mu+1, \ldots \text{ in inf.} \end{pmatrix}$$

zu zerlegen und genau wie vorher zu verfahren, um auch in Bezug auf das Integral (2) zu einem gleichen Ergebnis zu gelangen.

48. Anderer Beweis der Gültigkeit des Integrals $\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx$. — Um die Gültigkeit des Integrals:

$$(1) \qquad \int_0^\infty \cos(x^2)\,dx$$

auf Grund des vorstehend bewiesenen Prinzips darzuthun, mufs man es zuvörderst in eine den Integralen des vorigen Paragraphen konforme Gestalt bringen. Dies geschieht vermittelst der Substitution $x^2 = y$, welche, zunächst für eine feste obere Grenze b,

$$\int_0^b \cos(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{b^2} \cos y \cdot \frac{dy}{|\sqrt{y}|}$$

ergibt. In der That stellt in dem transformierten Integral die Funktion einen besonderen Fall des Ausdruckes $\cos(\alpha x) \cdot \psi(x)$ $\left(\text{für } \alpha = 1 \text{ und } \psi(x) = \frac{1}{|\sqrt{y}|}\right)$ dar, und auch $\frac{1}{|\sqrt{y}|}$ erfüllt die notwendigen Bedingungen, immer positiv zu sein und mit wachsendem y beständig abzunehmen, wenngleich viel langsamer als $\frac{1}{y}$ oder gar $\frac{1}{y^2}$; dies ist aber, wie wir wissen, durchaus statthaft. Dafs ferner die Funktion:

$$\frac{\cos y}{|\sqrt{y}|} = \cos y \cdot y^{\frac{1}{2}-1}$$

an der unteren Grenze unendlich grofs wird, thut dem Kriterium des § 43, 2) zufolge der Bedeutung des Integrals keinen Abbruch; auch mufs ja das Integral von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ abgetrennt, also:

$$\int_0^\infty \cos y \cdot \frac{dy}{|\sqrt{y}|} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y \cdot \frac{dy}{|\sqrt{y}|} + \int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \cos y \cdot \frac{dy}{|\sqrt{y}|}$$

gesetzt werden.

Aus allem diesem erschliefst man, dafs, bei dem Übergang zu dem Grenzwert $b = \infty$, das transformierte Integral, mithin auch das ihm identische Integral (1) einen festbestimmten Wert ausdrückt.

In einem wesentlichen Punkte aber zeigen diese beiden Integralformen ein verschiedenartiges Verhalten, das nicht unbeachtet gelassen werden darf. Während, wie wir in § 46 nachgewiesen haben, auf das Integral (1) die ursprüngliche Definitionsgleichung nicht anwendbar ist, kann das transformierte Integral sehr wohl als Summe von unendlich kleinen Differentialelementen aufgefaſst werden, und würde namentlich bei Einschaltung äquidistanter Zwischenwerte α, 2α, ... der Grenzwert dieser Summe mit dem wahren Werte des Integrals zusammenfallen.

Allerdings ist dabei nicht zu übersehen, daſs den äquidistanten Werten von y:

$$0,\ \alpha,\ 2\alpha,\ 3\alpha,\ 4\alpha,\ \ldots$$

nicht auch äquidistante Werte von $x = \sqrt{y}$ entsprechen. So ist in der Reihe dieser letzteren:

$$0,\ \sqrt{\alpha},\ \sqrt{2\alpha},\ \sqrt{3\alpha},\ \sqrt{4\alpha},\ \ldots$$

z. B. erst $x_4 - x_1 = x_1 - x_0 = \sqrt{\alpha}$.

Dritter Abschnitt.

Die Eulerschen Integrale.

Erstes Kapitel.

Hülfssätze.

49. Einleitende Bemerkung. — Wie aus den Elementen der Infinitesimalrechnung bekannt ist, unterscheidet man zwischen einfachen und vielfachen Integralen. In dem ersten Teile unserer Vorlesung haben wir es lediglich mit den einfachen bestimmten Integralen zu thun, während den vielfachen bestimmten Integralen ihr zweiter Teil gewidmet sein wird. Obschon nun diese letzteren bei der Behandlung der einfachen Integrale nicht gerade unentbehrlich sind, so würde man gleichwohl durch ihre Fernhaltung eines sehr erheblichen Vorteils verlustig gehen, da sie, und zwar speciell die zu ihnen gehörigen sogenannten Doppelintegrale, teils bei der Ausmittelung einfacher Integrale, teils zur Ergründung von Beziehungen, die zwischen diesen bestehen, die allerwesentlichsten Dienste zu leisten im stande sind.

Besonders trifft dies für die im gegenwärtigen Abschnitt zu behandelnden äufserst wichtigen Integrale zu, und daher sollen zwecks ihrer gelegentlichen Verwertung der Begriff und die Fundamentaleigenschaft der bestimmten Doppelintegrale bereits hier ganz allgemein entwickelt werden.

50. Stetigkeit der Funktionen zweier Veränderlichen. — Es sei $f(x, y)$ eine Funktion der beiden voneinander unabhängigen Variablen x, y. Alsdann ist, entsprechend dem am Anfange unserer Vorlesung (1) aufgestellten Begriff der Stetigkeit eines nur von einer einzigen Veränderlichen abhängigen Ausdrucks, zur Stetigkeit von $f(x, y)$ erforderlich, dafs diese Funktion für jedes beliebige Wertepaar x, y einen und nur einen ganz festbestimmten Wert annehme, und dafs, wenn beide Inkremente h, k ihrer Argumente unabhängig voneinander bis ins Unendliche abnehmen, auch die Differenz:

$$f(x+h, y+k) - f(x, y)$$

unaufhörlich sich der Null nähere.

Bestimmte Doppelintegrale.

51. Ihr Begriff. — In dem bestimmten Integral:

$$\int_a^b f(x, y) \cdot dx = u \tag{1}$$

bezeichne $f(x, y)$ eine stetige Funktion der beiden Argumente x, y, von denen aber das von dem Integrationsbuchstaben nicht beeinflufste y fürs erste als ein konstanter Parameter aufgefafst werden soll; desgleichen seien die Grenzen a, b absolut konstante, d. i. reine Zahlenwerte, die mithin ebensowenig von y wie von x abhängig sind, also auch, selbst wenn y sich änderte, ungeändert blieben. Unter diesen Voraussetzungen ist das Integral (1), da ja x aus ihm verschwunden ist, offenbar nur noch eine stetige Funktion einer Variablen, und nichts hindert, mit dieser Funktion u von y noch einmal ganz dieselbe Operation vorzunehmen, d. h. sie zwischen zwei beliebigen, festen Grenzen p, q nach y zu integrieren.

Diese wiederholte Integration wird durch die folgenden gleichwertigen, nur in der Schreibweise unterschiedenen — im Gegensatz zu den einfachen Integralen „Doppelintegrale" genannten — Formen:

$$\begin{aligned}\left(\int_p^q u\,dy =\right) \int_p^q dy\left(\int_a^b f(x,y)\cdot dx\right) &= \int_p^q dy\int_a^b f(x,y)\cdot dx \\ &= \int_p^q\int_a^b f(x, y)\, dy\, dx\end{aligned} \tag{I}$$

ausgedrückt.

52. Grundlehrsatz. — „In jedem Doppelintegral mit festen, endlichen Grenzen ist die Reihenfolge der Integrationen beliebig." Es findet also die Gleichung statt:

$$(1) \qquad \int_p^q dy \int_a^b f(x,y)\, dx = \int_a^b dx \int_p^q f(x,y)\, dy.$$

1. Geometrischer Beweis. — Sowie ein einfaches bestimmtes Integral als ein Flächenraum aufgefaſst werden kann, so stellt, wie in den Anwendungen der Infinitesimalrechnung auf Geometrie gezeigt wird, ein Doppelintegral mit konstanten Grenzen ein Volumen dar, das in Bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem x, y, z begrenzt wird von der Ebene der xy, der krummen Fläche, deren Ordinate z durch die stetige Funktion $f(x, y)$ repräsentiert ist, und zwei Paaren paralleler Ebenen, von denen das eine in den Entfernungen $x = a$ und $x = b$ vom Nullpunkt senkrecht zur Achse der x, das andere in den Entfernungen $y = p$, $y = q$ senkrecht auf die Achse der y gelegt ist.

Denkt man sich nun zwei Systeme unendlich vieler, unendlich benachbarter, zu den Begrenzungsebenen der yz und xz beziehentlich paralleler Ebenen, so wird das in Rede stehende Volumen von jedem der beiden Systeme einzeln in unendlich viele rechtwinklige Schichten, mithin durch beide zusammen in unendlich mal unendlich viele ebensolche Parallelepipeden $z\, dx\, dy$ zerschnitten werden. Dann ergibt von den beiden durch das Doppelintegral angedeuteten Integrationen immer die an erster Stelle ausgeführte die Summe aller einer einzigen Schicht angehörigen Parallelepipeden, die andere aber die Summe sämtlicher Schichten (ebendesselben Systems) oder das ganze Volumen. Wird zuerst nach x integriert, so gibt das eine Schicht zwischen zwei unendlich nahen, um dy voneinander entfernten, mit den xz parallelen Ebenen; ist hingegen die erste Integration die nach y, so liefert sie eine Schicht zwischen zwei benachbarten, um dx voneinander entfernten, zu den yz parallelen Ebenen. In beiden Fällen entspringt aber aus der an zweiter Stelle zu vollziehenden Integration ein und dasselbe ganze Volumen.

2. Analytischer Beweis. — Es soll nun der Nachweis des Satzes in aller Strenge auch rein analytisch geführt werden.

Vermöge der ursprünglichen Definitionsgleichung des einfachen bestimmten Integrals verwandelt sich die im vorigen Paragraphen aufgestellte Definitionsgleichung des bestimmten Doppelintegrals:

$$\int_p^q u\,dy = \int_p^q dy\left(\int_a^b f(x, y)\,dx\right),$$

wenn selbstverständlich sämtliche zu ihrer Gültigkeit erforderlichen Voraussetzungen in Kraft bleiben und noch $p = y_0$, $q = y_n$ gesetzt wird, in die Relation:

$$2)\qquad \int_p^q u\,dy = \lim_{n=\infty} \sum_\nu \left(\int_a^b f(x, y_\nu)\,dx\right)\cdot(y_{\nu+1} - y_\nu)$$

$$(\nu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n-1),$$

n der, im Gegensatz zu lim $n = \infty$, alle Differenzen $y_{\nu+1} - y_\nu$ gegen Null konvergieren müssen.

Wie man sieht, enthält jedes Glied der auf der rechten Seite dieser Gleichung befindlichen unendlichen Reihe selbst wieder ein bestimmtes Integral, und zwar ein Integral, dessen Grenzen a, b durchaus feste Zahlenwerte repräsentieren und mithin, während die einzige Variable der Reihe y_ν immer andere Werte annimmt, in allen Gliedern dieselben bleiben. Daher ist es dem Prinzip des § 11 zufolge gestattet, mit der Summation der unendlich vielen Glieder $f(x, y_\nu)\cdot(y_{\nu+1} - y_\nu)$ zu beginnen, und erst nach vollzogener Summation, bei der natürlich x als Konstante zu gelten hat, die Integration in Bezug auf x vorzunehmen. Alsdann gewinnt man an Stelle der (2) die Gleichung:

$$(3)\qquad \int_p^q u\,dy = \int_a^b dx\cdot\lim_{n=\infty}\sum_\nu f(x, y_\nu)\cdot(y_{\nu+1} - y_\nu)$$

$$(\nu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n-1),$$

in der der limes unter dem Integralzeichen rechts wieder ein bestimmtes Integral ist, nämlich das Integral $\int_p^q f(x, y)\,dy$; doch wollen wir zunächst nur voraussetzen, dafs bei dem Prozefs ihres beständigen Abnehmens alle Teilintervalle $y_{\nu+1} - y_\nu$ bereits so klein geworden seien, dafs die Summe Σ und dieses Integral nur noch um eine beliebig kleine Gröfse ε voneinander differieren (6). Unter dieser Annahme geht die (3) in die Beziehung über:

$$(4)\qquad \begin{aligned}\int_p^q dy \int_a^b f(x, y)\,dx &= \int_a^b dx\left(\int_p^q f(x, y)\,dy + \varepsilon\right)\\ &= \int_a^b dx \int_p^q f(x, y)\,dy + \int_a^b \varepsilon\,dx.\end{aligned}$$

Da aber a und b feste, endliche Grenzen sind und demzufolge das Integral:

$$\int_a^b \varepsilon\, dx = \varepsilon(b - a)$$

mit ε selbst gegen Null konvergiert, so führt die (4) mit jedem beliebigen Grade der Annäherung zu der die Umkehrung der Integrationsordnung darstellenden Formel (1).

*3. Auch noch auf folgende einfache Weise läfst sich diese Formel herleiten.

Man setze:

$$\int_p^q dy \int_a^b f(x, y)\, dx = r, \qquad \int_a^b dx \int_p^q f(x, y)\, dy = s,$$

und fasse sowohl r als s als (stetige) Funktionen der vier Gröfsen a, b, p, q auf, von denen sie allein abhängig sind. Dann hat man für den partiellen Differentialquotienten von r nach q gemäfs dem Satze des § 17, 1:

$$\frac{\partial r}{\partial q} = \int_a^b f(x, q)\, dx,$$

für den von s aber kraft des in § 18 entwickelten Prinzips:

$$\frac{\partial s}{\partial q} = \int_a^b dx \cdot \frac{\partial}{\partial q} \int_p^q f(x, y)\, dy = \int_a^b dx \cdot f(x, q).$$

Es ist also:

$$\frac{\partial r}{\partial q} = \frac{\partial s}{\partial q},$$

d. h. beide Funktionen r, s haben dieselbe Derivierte nach q. Demnach können sie selbst nur um eine von q unabhängige Konstante voneinander verschieden sein. Da aber für den speciellen Wert $q = p$, für welchen in dem nach y genommenen Integral die Grenzen zusammenfallen, vermöge der in § 20 hervorgehobenen Eigenschaft

$$r = 0 \quad \text{und auch} \quad s = \int_a^b dx \cdot 0 = (b - a) \cdot 0 = 0,$$

also r gleich s ist, so folgt, dafs die fragliche Konstante gleich Null ist und mithin überhaupt

$$r = s$$

sein mufs.

53. Doppelintegrale von unendlicher Ausdehnung. — Wie aus den vorangehenden Beweisen erhellt, hat der Fundamentalsatz des vorigen Paragraphen die Konstanz und Endlichkeit der Grenzen und die Stetigkeit der Funktion $f(x, y)$ innerhalb des ganzen Integrationsbereiches zur notwendigen Voraussetzung. Wenn daher die Entfernung der Grenzen oder irgendwo die Funktion selbst unendlich ist, so bedarf es, wie in den analogen Fällen bei den einfachen Integralen, behufs Beurteilung der Gültigkeit der Formel einer vorgängigen genauen Untersuchung.

Rückt z. B. b, die eine der oberen Grenzen, bis ins Unendliche, so könnte das Integral

$$\int_a^\infty \varepsilon\, dx$$

(52, 2) trotz des beliebig kleinen ε sehr wohl etwas Endliches sein, so daſs aus der (4) des vorigen Paragraphen nicht mehr die (1) hervorgehen und der daselbst geführte Beweis hinfällig werden würde.

Doch setzen wir uns fürs erste über diese Schwierigkeit hinweg — wie ja auch in den Lehrbüchern dieser delikate Punkt überhaupt nicht berührt wird — und beschränken uns an dieser Stelle darauf, gestützt auf die analoge Theorie der Doppelreihen, die folgenden allgemein gültigen Prinzipien klarzulegen.

Unter unendlichen Doppelreihen versteht man bekanntlich Reihen, in denen jedes Glied wieder eine unendliche Reihe bildet, so daſs sie, niedergeschrieben, sowohl horizontal wie vertikal bis ins Unendliche fortlaufend, nicht bloſs eine Linie, sondern einen ganzen Winkel oder Ebene ausfüllen.

Für eine solche Doppelreihe ist es nun — wenn wir uns des Bildes, das ihre Schreibart darbietet, bedienen dürfen — nicht immer gleichgültig, ob man sie zuerst in horizontaler und dann in vertikaler Richtung oder in umgekehrter Folge summiert. Es kann sich vielmehr ereignen, daſs die Reihe in beiden Fällen verschiedene Werte annimmt, oder gar, namentlich wenn sie teils aus positiven, teils aus negativen Gliedern besteht, in dem einen Falle konvergiert, in dem anderen aber keinen Grenzwert besitzt. — Haben hingegen alle ihre Glieder dasselbe Zeichen, oder nimmt wenigstens die Reihe, falls ihre Glieder verschieden vorgezeichnet sind, so schnell ab, daſs sie noch einen Sinn behalten würde, wenn man sie sämtlich mit ein und demselben

Zeichen behaftete, dann bleibt die Reihe, ist sie es überhaupt, unabhängig von der Summationsfolge immer konvergent.

Da nun, wie aus den Definitionsgleichungen (2) und (3) des vorigen Paragraphen ersichtlich, Doppelintegrale im Grunde nichts anderes sind als unendliche Doppelreihen, so folgt, dafs die eben erörterten Eigenschaften dieser letzteren auch jenen zukommen müssen. Hat demnach die Funktion $f(x, y)$ von einer gewissen Stelle an immer dasselbe Zeichen und ihr Integral zwischen unendlichen Grenzen überhaupt einen Sinn, oder fällt sie bei wechselnden Zeichen so schnell, dafs sie, überall mit demselben Zeichen genommen und zwischen unendlichen Grenzen integriert, nicht bedeutungslos würde, dann behauptet der Satz von der Vertauschung der Reihenfolge der beiden Integrationen auch noch für unendliche Entfernung der Grenzen seine Gültigkeit, und zwar aus dem Grunde, weil die Endlichkeit des Integrals allein schon durch die Schnelligkeit des Abnehmens der Funktion gesichert ist.

Nur Funktionen von solcher Beschaffenheit werden wir vorerst zu betrachten haben und daher das Grundtheorem unbedenklich auch bei unendlicher Entfernung der Integrationsgrenzen in Anwendung bringen dürfen.

Zweites Kapitel.

Die Eulerschen Integrale.

54. Definition. — Wir haben uns in diesem und den folgenden Kapiteln mit zwei Gattungen äufserst wichtiger und häufig vorkommender Integrale zu befassen, denen mit Rücksicht darauf, dafs sich schon Euler viel mit ihnen beschäftigte und bereits ihre hauptsächlichsten Eigenschaften auffand, freilich erst viel später sein Name beigelegt worden ist.

I. Mit dem Namen „Eulersches Integral der ersten Gattung“ bezeichnet man das von 0 bis ∞ erstreckte Integral der rein algebraischen Funktion:

$$\frac{x^{a-1}}{(1+x)^c}. \tag{1}$$

Für den speciellen Fall $c = 1$, $0 < a < 1$ geht es in das Integral über:

$$\text{(I')} \qquad \int\limits_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x},$$

dessen Wert

$$\frac{\pi}{\sin a\pi}$$

bereits aus der ersten Eulerschen Formel (36) bekannt ist.

Doch besteht zwischen diesen beiden Integralen ein wesentlicher Unterschied bezüglich des Umfanges der für den Parameter a zulässigen Werte.

In dem Integral (I') mufs a durchaus ein positiver echter Bruch sein. Denn wäre diese Konstante negativ, $-a$, oder auch nur $= 0$, so würde an der unteren Grenze ($x = 0$) die hier sich auf $\frac{x^{-a-1}}{1}$ bezw. x^{-1} [20]) reducierende Integralfunktion unendlich grofs werden, und zwar über die Bedingungen hinaus, welche für diesen Fall das in § 43, 2 aufgestellte Kriterium vorschreibt, damit noch von einem Integral die Rede sein könne.

Positive Werte von a hinwiederum, die die Einheit überschreiten oder auch nur ihr gleich sind, müssen ausgeschlossen werden, weil sonst im Unendlichen die Funktion nicht schnell genug abnehmen würde. In der That, wie wir des näheren in § 27 dargelegt haben, kommt dem bis ins Unendliche reichenden Integral der Potenz x^{-k} nur eine Bedeutung zu, solange $k > 1$ ist. Diese Bedingung wird aber durch die im Unendlichen in die Potenz $x^{-(2-a)}$ übergehende Funktion $\frac{x^{a-1}}{1+x}$ nicht erfüllt; vielmehr ist, für $a \geqq 1$, $2 - a \leqq 1$ oder gar negativ.

Was nun das Integral:

$$\text{(I)} \qquad \int\limits_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{(1+x)^c}$$

betrifft, so darf auch in ihm a nicht $\leqq 0$ genommen werden. Dies erhellt sofort aus der vorstehenden Beweisführung, wenn man bedenkt, dafs sich an der unteren Grenze die Funktionen der Integrale (I) und (I') nicht voneinander unterscheiden[21]).

Ebensowenig darf c negativ, $= -c$, sein, weil man es sonst im Unendlichen wiederum mit einer Potenz $x^{-(1-a-c)}$ zu thun hätte, deren Exponent $1-a-c$ für positive Werte von a und c den Bedingungen des angezogenen Kriteriums (27) entgegen jedenfalls < 1 wäre.

Im übrigen können nun aber beide Parameter a und c noch so grofse beliebige positive Werte besitzen, mit der alleinigen Beschränkung, dafs

$$c > a$$

sein mufs. Denn während an der unteren Grenze (für positive a und c) Unendlichkeit nie mehr eintritt, leistet an der oberen Grenze die Funktion (1) mit Rücksicht darauf, dafs sie im Unendlichen den Charakter der Potenz $x^{-(1+c-a)}$ an sich trägt, nur dann dem Kriterium des § 27 Genüge, wenn $1 + c - a > 1$ ist.

Aus diesem Grunde darf sich auch in dem speciellen Falle $c = 1$, der durch die (I') repräsentiert wird, der Parameter a nur zwischen den Grenzen 0 und 1 bewegen.

Um die zwischen a und c bestehende Gröfsenbeziehung auch äufserlich sofort erkennbar zu machen, ersetzt man besser c durch die Summe $a + b$ zweier wesentlich positiver Summanden. Und wählen wir noch unter den verschiedenen Bezeichnungen, die man für das Integral (I) eingeführt hat, eine der einfachsten, das ganz unschuldige Symbol

$$(a, b),$$

das in nichts weiter als einem Hinschreiben der beiden Parameter besteht und jeden Augenblick wieder verlassen werden kann, so wird demnach das Eulersche Integral der ersten Gattung durch die Formel definiert:

$$(\mathrm{I_0}) \qquad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{(1+x)^{a+b}} = (a, b) \qquad \left(\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} > 0\right).$$

II. In dem ebenfalls von 0 bis ∞ sich erstreckenden Eulerschen Integral der zweiten Gattung besteht die Funktion aus dem Produkt:

$$(2) \qquad e^{-x} \cdot x^{a-1}.$$

Auch hier darf a nicht negativ sein, weil sonst gegen die Möglichkeit des Sinnbehaltens die Potenz x^{a-1} an der unteren

Grenze $x = 0$ unendlich grofs werden würde (43). Hingegen **darf** a **einen beliebigen und beliebig grofsen positiven Wert besitzen.** Denn da die Exponentialgröfse e^{-x} mit negativem Exponenten im Unendlichen stets schneller abnimmt, als irgend welche positive Potenz x^{+k} mit noch so grofsem Exponenten k zunimmt, so sind in keinem Falle der unendlichen Ausdehnung des Integrals Schranken gesetzt: während des unbegrenzten Wachstums von x wird man für jeden die Einheit überschreitenden Wert von a [22]) immer zu einer Stelle gelangen, wo die beiden Glieder e^x und x^{a-1} des Quotienten $\frac{x^{a-1}}{e^x}$ einander gleich sind; über diese Stelle hinaus aber wächst sein Nenner so viel schneller, dafs schliefslich der Quotient selbst oder das Produkt (2) der Null beliebig nahe kommt.

Man pflegt dieses Integral durch das Symbol

$$\Gamma(a)$$

zu bezeichnen und es dementsprechend die **Gammafunktion** zu nennen. **Das Eulersche Integral der zweiten Gattung** wird also durch die Formel definiert:

$$\text{(II)} \qquad \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{a-1} \cdot dx = \Gamma(a) \qquad (a > 0).$$

Das Integral der ersten Gattung hängt von **zwei** Parametern, das der zweiten Gattung von einem **einzigen** Parameter ab. Diese Parameter bilden die **Elemente** oder **Argumente** der **Euler**schen Integrale.

55. Endliche Grenzen für die Eulerschen Integrale. — Beide **Euler**schen Integrale lassen sich so umformen, dafs ihre Grenzen 0 und 1 werden.

I. Durch die Substitution:

$$\frac{1}{1+x} = y, \text{ also } dx = -\frac{dy}{y^2}; \; x = 0, \, y = 1; \; x = \infty, \, y = 0,$$

verwandelt sich (a, b) in das Integral:

$$\int_0^1 \frac{(1-y)^{a-1}}{y^{a-1}} \cdot y^{a+b} \cdot \frac{dy}{y^2}.$$

Mithin ist:

$$(\mathrm{I}_0)\quad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{(1+x)^{a+b}} = \int_0^1 y^{b-1}\cdot(1-y)^{a-1}\,dy = (a, b) \quad \left({a \atop b} > 0\right).$$

II. Durch die Substitution:

$$e^{-x} = y, \text{ also } x = \log\frac{1}{y};\ x = 0,\ y = 1;\ x = \infty,\ y = 0,$$

verwandelt sich $\Gamma(a)$ in das Integral:

$$\int_0^1 y\cdot\left(\log\frac{1}{y}\right)^{a-1}\cdot\frac{dy}{y},$$

so dafs man

$$(\mathrm{II}_0)\qquad \int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}\,dx = \int_0^1\left(\log\frac{1}{y}\right)^{a-1}dy = \Gamma(a) \qquad (a > 0)$$

hat und statt der Funktion $e^{-x}x^{a-1}$ gemischten Charakters einen rein transcendenten Ausdruck von viel einfacherer Form gewinnt. Da sich das Integral nur von 0 bis 1 erstreckt, so hat der $\log\frac{1}{y}$ selbstverständlich alle rein arithmetischen, positiven Werte von ∞ bis 0 zu durchlaufen.

Je nach der Beschaffenheit der zu behandelnden Aufgaben erweist sich von den beiden obigen für jedes der Eulerschen Integrale verwendbaren Formen bald die eine bald die andere als zur Lösung des betreffenden Problems geeigneter.

56. Symmetrie von (a, b). — „Das Integral (a, b) ist symmetrisch in Bezug auf seine beiden Parameter, d. h. es bleibt unverändert, wenn a und b miteinander vertauscht werden."

Zum Nachweise[23]) dieser Eigenschaft bedienen wir uns der zweiten Form von (a, b), haben also zu zeigen, dafs die beiden Integrale:

$$\int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{a-1}\,dx \quad\text{und}\quad \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

gleichbedeutend sind. Ist nun auch äufserlich diese Symmetrie nicht erkennbar, da $a-1$ und $b-1$ als Exponenten der verschiedenartigen Gröfsen x und $1-x$ auftreten, also nicht permutabel zu sein scheinen, so erhellt sie doch sofort aus der au das zweite Integral angewendeten Substitution $x = 1 - y$, die unmittelbar zu der Relation führt:

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx = \int_0^1 y^{b-1}(1-y)^{a-1}\,dy.$$

Mit Rücksicht auf die (I_0) des vorigen Paragraphen ist daher auch:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{(1+x)^{a+b}} = \int_0^\infty \frac{x^{b-1}\,dx}{(1+x)^{a+b}}.$$

Unter Benutzung der für unser Integral eingeführten abkürzenden Bezeichnung hat man mithin allgemein:

$$(a, b) = (b, a).$$

Soll demnach mit nur einem der beiden Elemente von (a, b) irgend eine Änderung vorgenommen werden, so ist die Auswahl des betreffenden Elementes ganz in unser Belieben gestellt.

57. Einführung einer zweiten Konstanten in $\Gamma(a)$. — Durch Transformation kann man in beide Eulerschen Integrale neue Konstanten hineinbringen, was besonders für die Gammafunktionen von Wichtigkeit ist.

Setzt man nämlich $x = ky$, wo k eine beliebige positive Konstante bezeichnet, so bleiben für die erste Form von $\Gamma(a)$ die Grenzen dieselben, und es entspringt aus

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1}\,dx$$

die sehr nützliche Formel:

$$\int_0^\infty e^{-kx} x^{a-1}\,dx = \frac{\Gamma(a)}{k^a} \qquad (a > 0,\ k > 0).$$

Dieses neue Integral ist also dem ursprünglichen $\Gamma(a)$ gleich, dividiert durch die a^{te} Potenz des neuen Parameters.

Die Formel gilt aber nur für ein positives k. Denn für eine negative Konstante, $-k$, hätten sich nicht dieselben Grenzen, sondern 0 und $-\infty$ ergeben.

58. Die Reduktionsformeln der Gammafunktionen. — Zwei Gammafunktionen, deren Argumente sich um eine Einheit voneinander unterscheiden, sind aufeinander zurückführbar.

In der That, teilweise, auf den Faktor $x^{a-1} = \frac{d}{dx} \cdot \frac{x^a}{a}$ angewandte Integration gibt:

$$\int e^{-x} x^{a-1}\, dx = e^{-x}\frac{x^a}{a} + \int \frac{1}{a} e^{-x} x^a\, dx;$$

und da das Glied von endlicher Form $e^{-x}\frac{x^a}{a}$ sowohl für $x = 0$ als auch (54) für $x = \infty$ verschwindet, so fliefst aus vorstehender Relation die Beziehung:

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1}\, dx = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-x} x^a\, dx = \frac{1}{a}\, \Gamma(a+1).$$

Man hat demnach die Formel:

(1) $$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a) \qquad (a > 0),$$

vermittelst welcher $\Gamma(a+1)$ für einen beliebigen positiven Wert von a auf $\Gamma(a)$ zurückgeführt wird.

Durch ihre wiederholte Anwendung gelangt man zu der allgemeinen, für eine beliebige ganze positive Zahl n gültigen Reduktionsformel:

(I) $$\Gamma(a+n) = (a+n-1)\,(a+n-2)\cdots a\Gamma(a)$$
$$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ \infty),$$

in der es mit Rücksicht auf die für n zulässigen Werte ausreicht,

$$0 < a < 1$$

vorauszusetzen.

Auch für (a, b) gibt es eine ähnliche Reduktionsformel. In den „Anwendungen" § 9 ist dieselbe durch ein analoges Verfahren wie die (1) direkt abgeleitet. Hier wird sie weiter unten (60, Zusatz) als unmittelbare Folge aus einem Satze, dessen wir benötigt sind, von selbst hervorgehen.

59. Die Eulerschen Integrale für bis zur Null abnehmende Werte ihrer Argumente. — 1. Aus lauter positiven Differentialelementen bestehend, repräsentieren beide Eulerschen Integrale (a, b), $\Gamma(a)$ selbst für alle möglichen Werte ihrer Parameter stets durchaus positive, rein numerische Zahlenwerte.

2. Beide Eulerschen Integrale werden um so gröfser, je mehr sich ihr Argument, und zwar in (a, b) beliebig entweder a oder b (56), der Null nähert.

Während aber dem Integral (a, b) dieser Charakter für den ganzen Umfang aller möglichen Werte des veränderlichen Elementes und für jeden beliebigen festen Wert des anderen Elementes zukommt (vergl. „Anwendungen" § 7), ist er der Gammafunktion nur in einem begrenzten Intervalle, von einem ganz bestimmten Werte ihres Argumentes an, zu eigen [24]).

3. An der Grenze selbst, wenn also das betreffende Argument den Wert Null erreicht hat, werden, wie aus der Diskussion des § 54 bereits bekannt ist, beide Integrale unendlich, weil alsdann schon an der unteren Grenze $x = 0$ ihre sich hier auf x^{-1} reducierenden Funktionen unstatthaft unendlich grofs sind (43).

Man hat demnach:

$$(a, 0) = \int_0^1 x^{-1} (1 - x)^{a-1} dx = \infty,$$

$$\Gamma(0) = \int_0^\infty e^{-x} x^{-1} dx = \infty.$$

Das Integral der ersten Gattung $(a, 0)$ verlöre in der Form $\int_0^\infty \frac{x^{a-1} dx}{(1+x)^a}$ aufserdem auch im Unendlichen seinen Sinn, da seine mit unaufhörlich wachsendem x gleichfalls in x^{-1} übergehende Funktion zu langsam gegen Null konvergieren würde (27) [25]).

Aus diesem Verhalten der Eulerschen Integrale erklärt es sich auch, warum man mit ihren Argumenten nicht ins Negative gehen darf (54).

60. Die Formel:

(1) $$(a, b) = \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a + b)}. \text{ —}$$

Zur Herleitung dieser ungemein wichtigen, zwischen den beiden Eulerschen Integralen bestehenden Relation bedienen wir uns der Doppelintegrale, auf welche man immer von selbst geführt und zu ihrer Anwendung gewissermafsen gezwungen wird, wenn es sich um den Nachweis der Gleichheit zweier Produkte handelt.

Das einzuschlagende Verfahren besteht darin, dafs man in dem Integral:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1} dx}{(1 + x)^{a+b}} = (a, b)$$

auch die Integralfunktion selbst durch ein bestimmtes Integral ausdrückt, und in dem sich dadurch für (a, b) ergebenden Doppelintegral die Folge der Integrationen umkehrt.

Wenden wir zu diesem Behufe auf die unter dem Integralzeichen befindliche Potenz $\frac{1}{(1+x)^{a+b}}$, für deren Basis nur positive Werte in Betracht kommen, die in § 57 entwickelte Formel

$$\int_0^\infty e^{-kx} x^{a-1}\, dx = \frac{\Gamma(a)}{k^a} \qquad (k > 0)$$

an, indem wir in derselben k durch $1 + x$, a durch $a + b$ ersetzen und, da x schon in der Konstanten k Verwendung gefunden hat, y als Integrationsbuchstaben einführen, so entspringt die Gleichung:

$$\int_0^\infty e^{-y(1+x)} y^{a+b-1}\, dy = \Gamma(a+b) \cdot \frac{1}{(1+x)^{a+b}},$$

gültig für jedes beliebige positive x und sogar, was hier aber nicht gebraucht wird, für Werte von x, die zwischen 0 und -1 liegen. Multipliciert man nun beide Seiten dieser Gleichung mit x^{a-1} und integriert alsdann in Bezug auf das von y unabhängige x zwischen den festen Grenzen $0, \infty$, so kommt rechts, wo $\Gamma(a+b)$ als rein konstanter Zahlenwert vor das Integralzeichen tritt, das Integral (a, b) wieder zum Vorschein, und man hat:

$$(2) \quad \int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-y(1+x)} y^{a+b-1} x^{a-1}\, dy = \Gamma(a+b) \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\, dx}{(1+x)^{a+b}}$$
$$= \Gamma(a+b) \cdot (a, b).$$

Vollzöge man jetzt auf der linken Seite die Integrationen in der angedeuteten Ordnung, zuerst nach y, dann nach x, so käme man nicht von der Stelle, sondern erhielte auch hier $\Gamma(a+b) \cdot (a, b)$. Da aber das Doppelintegral alle in § 52 f. geforderten Bedingungen erfüllt, so darf die Integrationsfolge umgekehrt werden. Wenn man dabei gleich alles nach x Konstante heraussetzt, so nimmt das Doppelintegral die Form an:

$$\int_0^\infty dy \cdot e^{-y} y^{a+b-1} \cdot \int_0^\infty e^{-yx} x^{a-1}\, dx.$$

Erwägt man nun, dafs das von 0 bis ∞ sich erstreckende y jedenfalls positiv ist, so erhellt, dafs wiederum auf Grund der

Formel des § 57 das innere Integral hier durch $\frac{\Gamma(a)}{y^a}$ ersetzt werden kann. Mithin geht der vorstehende Ausdruck oder die linke Seite der (2) successive über in:

$$\int_0^\infty dy\, e^{-y}\, y^{a+b-1} \cdot \frac{\Gamma(a)}{y^a} = \Gamma(a) \cdot \int_0^\infty dy\, e^{-y} \cdot y^{b-1} = \Gamma(a) \cdot \Gamma(b)$$

und führt unmittelbar zu der Relation:

$$\Gamma(a) \cdot \Gamma(b) = \Gamma(a+b) \cdot (a, b)$$

oder zu der Gleichung (1).

Dieses äufserst häufig gebrauchte Haupttheorem ist auf anderem Wege schon von Euler gefunden worden. Auch vermittelst Fakultäten könnte es abgeleitet werden (s. „Anwendungen", § 16), was jedoch ein der Eigenart der bestimmten Integrale ferner liegendes, fremdartiges Verfahren sein würde.

Zusatz[26]). — Wird in der Gleichung (1) a durch $a+1$ ersetzt, so verwandelt sie sich mit Hülfe der Reduktionsformel $\Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a)$ (58) in $(a+1, b) = \frac{a\,\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{(a+b)\Gamma(a+b)}$, woraus unmittelbar die analoge Reduktionsformel für die Eulerschen Integrale der ersten Gattung hervorgeht:

$$(a, b) = \frac{a+b}{a}(a+1, b).$$

(Vergl. § 58, Schlufs.)

61. Specielle Fälle. Tafeln der Gammafunktion[27]). — 1. Für $a = 1$ reduciert sich $\Gamma(a)$ auf das Integral $\int_0^\infty e^{-x}\, dx$, dessen Wert uns bereits bekannt ist (23; 24, I). Danach ist:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1. \tag{1}$$

2. Das ebenfalls bekannte Integral (54):

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\, dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi} \qquad (0 < a < 1)$$

ist nichts anderes als das Eulersche Integral der ersten Gattung (a, b) für den Fall $a + b = 1$, $b = 1 - a$, d. h. für den Fall, in welchem die Argumente a, b „Komplemente" voneinander und beide natürlich echte Brüche sind. Demnach hat man:

$$(2') \qquad (a, 1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi} \qquad (0 < a < 1),$$

mithin vermöge der Formel des vorigen Paragraphen unter Zuhülfenahme der (1) auch:

$$(2) \qquad \Gamma(a) \cdot \Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi} \qquad (0 < a < 1).$$

3. Für den speciellen Wert $a = \frac{1}{2}$ verwandelt sich vorstehende Relation in $\left(\Gamma(\frac{1}{2})\right)^2 = \pi$, aus der die Formel entspringt:

$$(3) \qquad \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-x} \frac{1}{|\sqrt{x}|} \cdot dx = |\sqrt{\pi}|.$$

Wegen des durchaus positiven Wertes einer jeden Gammafunktion und ihrer einzelnen Differentialelemente sind in dieser Formel die Quadratwurzeln nur absolut zu nehmen.

Durch die (3) haben wir eine ungemein wichtige Beziehung gewonnen, auf welche wir als die Basis anderer Integrale später zurückkommen werden (75 ff).

4. Die für eine beliebige positive ganze Zahl n gültige allgemeine Reduktionsformel (I) des § 58 verwandelt sich für $a = 1$ vermöge der (1) in:

$$(4) \qquad \Gamma(1+n) = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$$

und für $a = \frac{1}{2}$ vermöge der (3) in:

$$(5) \qquad \Gamma(n + \tfrac{1}{2}) = (n - \tfrac{1}{2})(n - \tfrac{3}{2}) \cdots \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{1}{2} |\sqrt{\pi}|,$$

beides, wie die (I) des § 58 selbst, Fakultäten mit der Differenz 1.

5. Vermittelst der beiden letzten Formeln sind für zwei Reihen von Werten ihres Argumentes die Gammafunktionen in endlicher, geschlossener Form angebbar: 1) für alle ganzen Zahlen 1, 2, 3, ... n, 2) für alle Argumente, die gleich einer ganzen Zahl plus $\frac{1}{2}$ sind, also für $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ u. s. w. — Die Werte dieser letzteren Gamma würde man auch unmittelbar, aber mit viel Mühe aufzufinden im stande sein.

6. Bei der Anfertigung einer Tafel für die Transcendente $\Gamma(a)$ brauchte man wegen der Reduktionsformel $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ nur von $\Gamma(0)$ bis $\Gamma(1)$ zu gehen; es reicht aber sogar

aus, die Tafel nur bis $\Gamma(\frac{1}{2})$ zu berechnen, weil alsdann die Formel (2) die Werte von $\Gamma(\frac{1}{2})$ bis $\Gamma(1)$ hinzuliefert. Aufser den Tafeln für Γ selbst hat man solche für ihre Logarithmen konstruiert, welche für die Anwendung der drei Hauptformeln (1) des § 58, (1) des § 60 und der obigen (2), in denen es sich überall um Produkte und Quotienten handelt, noch bequemer sind.

62. Ausdehnung der Gammafunktion auf negative Werte des Arguments [28]. — Die Definitionsgleichung der Gammafunktion:

$$(1) \qquad \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1}\, dx = \Gamma(a)$$

hat zur notwendigen Voraussetzung, dafs dem Argument a nur positive Werte beigelegt werden, da für negative Werte von a das Integral als unendlich grofs seine Bedeutung verliert (54). Will man aber neben der (1) die durch die Reduktionsformel:

$$(2) \qquad \Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a)$$

ausgedrückte Grundeigenschaft der Gammafunktionen als ihre allgemeine Definitionsgleichung gelten lassen, so steht nichts im Wege, in dieser dem Argument auch negative Werte zuzuteilen. Es werden dann im Gegensatz zu der (1), die nur für $a > 0$ Gültigkeit besitzt, durch die Gleichung (2) auch diejenigen Gamma definiert und bestimmt, deren Argument negativ ist, so dafs infolge dieser ganz natürlichen Begriffserweiterung ihr Geltungsbereich das ganze Gebiet der reellen Werte des Argumentes von $-\infty$ bis ∞ umfafst. Genau, wie man schon in den Elementen erst den Begriff der reinen positiven ganzen Potenz festlegt und ihn dann zu dem der negativen, gebrochenen, irrationalen Potenz erweitert.

Hat man demnach aus der (1) die Werte der Gammafunktion nur für ein einziges der Einheit gleiches Intervall, z. B. für $0 < a \leqq 1$, berechnet (61, 6), so liefert die (2) ihre Werte für alle anderen möglichen Argumente hinzu. Wird z. B. $a = -\frac{1}{2}$ gesetzt, so gibt sie: $\Gamma(-\frac{1}{2}+1) = \Gamma(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}\Gamma(-\frac{1}{2})$, mithin, der (3) des § 61 zufolge:

$$\Gamma(-\tfrac{1}{2}) = -2\left|\sqrt{\pi}\right|.$$

Während aber für ein positives Argument die Gammafunktionen durchaus und immer positiv sind, werden sie auf der negativen Seite abwechselnd positiv und negativ, und zwar behalten sie dasselbe Zeichen immer in der Einheit gleichen Intervallen bei. In der That, wie die aus der (2) entspringende Relation:

$$\Gamma(a-1)=\frac{\Gamma(a)}{a-1} \tag{2'}$$

zeigt, ist $\Gamma(a-1)$ zunächst negativ, so lange a einen positiven, also $a-1$ einen negativen echten Bruch bedeutet und demnach sich in dem Intervall von 0 bis -1 bewegt; darauf aber, wenn a ein negativer echter Bruch ist, also $a-1$, das für alle Werte von a unter 1 bis zu $-\infty$ hin negativ ist und bleibt, zwischen -1 und -2 liegt, ist in diesem Intervall $\Gamma(a-1)$ im Gegenteil positiv. U. s. w. f. bis ins Unendliche.

Dafs durch die Definitionsformel (2) kein Widerspruch erzeugt werden kann, springt in die Augen, denn durch successives Addieren der schicklichen Anzahl von Einheiten weist sie für jedes negative Argument schliefslich auf ein ganz bestimmtes positives Argument zurück.

Da $\Gamma(0)=\infty$ ist, so folgt aus der (2'), dafs auch für alle ganzen negativen Werte ihres Argumentes die Gammafunktion unendlich grofs ist. Z. B.:

$$a=0,\ \Gamma(-1)=-\Gamma(0)=-\infty;$$

$$a=-1,\ \Gamma(-2)=-\frac{\Gamma(-1)}{2}=\infty;\ \text{u. s. f.}$$

Es vollzieht sich also der Übergang von einem Zeichen zum anderen stets im Unendlichen, und umgekehrt ist mit jedem Durchgang durch das Unendliche ein Zeichenwechsel verbunden.

Wie aus den „Anwendungen" § 15 bekannt ist, kann endlich vermittelst der daselbst hergeleiteten, für ein positives a gültigen Gleichung:

$$\Gamma(a)=\frac{1\cdot 2\cdot\cdots\cdots n}{a(a+1)\cdots(a+n-1)}\cdot n^{a-1}\qquad (n=\infty) \tag{3}$$

$\Gamma(a)$ auch durch ein unendliches Produkt definiert werden. Nur bedürfte es dazu, was dort, wo die Formel als Theorem auftritt, natürlich nicht erforderlich war, des übrigens nicht schwer zu führenden Nachweises, dafs jenes Produkt im Unendlichen wirklich eine Grenze besitzt.

Diese neue Definitionsgleichung für $\Gamma(a)$ ist nun ebenfalls, wie die (2) oder (2'), des Vorzugs teilhaftig, allgemein, d. h. auch für negative Werte von a gültig zu sein. Um dies zu erkennen, genügt mit Rücksicht auf die Relation (2') augenscheinlich der Nachweis, dafs das unendliche Produkt in der (3), durch $a - 1$ dividiert, genau dieselbe Form annimmt, als wenn man es direkt für das Argument $a - 1$ gebildet hätte.

In der That, der bei der Division durch $a - 1$ im Nenner überschiefsende Faktor $a + n - 1$ fällt im Unendlichen mit n zusammen; der Schlufsfaktor des Produktes $\frac{n^{a-1}}{a+n-1}$ reduciert sich mithin auf n^{a-1-1}, und das ganze unendliche Produkt geht in den Ausdruck über:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot n}{(a-1)\, a\, (a+1) \cdots (a-1+n-1)}\, n^{a-1-1} \qquad (n = \infty),$$

der nichts anderes ist als der direkt gemäfs der (3) gebildete Wert von $\Gamma(a - 1)$. Und um für ein negatives Argument zu bestehen, braucht nur die Annahme gemacht zu werden, dafs a selbst ein positiver echter Bruch ist.

Ist a gleich Null oder irgend eine negative ganze Zahl, so findet sich im Divisor des unendlichen Produkts stets der Faktor Null vor. Die allgemeine Definitionsgleichung (3) erschliefst uns mithin, wie es auch sein mufs, unmittelbar die Eigenschaft der Gammafunktion, für alle eben bezeichneten Werte ihres Argumentes unendlich grofs zu sein.

63. Die Derivierte von $\Gamma(a)$ und von $\log \Gamma(a)$. — Wir gehen jetzt darauf aus, die Derivierte von $\Gamma(a)$ und damit die letzte Formel herzuleiten, deren wir noch bedürfen, um alle nur möglichen Folgerungen ziehen zu können. Gleichzeitig wird sich die Derivierte von $\log \Gamma(a)$ ergeben, was dem Resultat noch erhöhten Wert verleiht.

Die Aufgabe liefse sich wie die des § 60 mit Hülfe der Doppelintegrale lösen. Wir schlagen aber einen anderen Weg ein, indem wir von der in § 60 entwickelten Relation ausgehen und dieselbe, um direkt zu einem Ausdruck für die Derivierte von $\Gamma(a)$ zu gelangen, in der Form schreiben:

$$(1) \qquad \Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(b)} \cdot (a, b).$$

Bezeichnen wir durch b den Zuwachs des Argumentes a, so handelt es sich für ein bis zu Null abnehmendes b um die Er-

mittelung des Grenzwertes des Quotienten $\frac{\Gamma(a+b)-\Gamma(a)}{b}$.
Zu diesem Behufe ziehen wir beide Seiten der (1) von $\Gamma(a+b)$ ab und dividieren durch b, was wegen $b\,\Gamma(b)=\Gamma(1+b)$ zu der Gleichung führt:

$$(2)\qquad \frac{\Gamma(a+b)-\Gamma(a)}{b}=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(1+b)}\cdot\big(\Gamma(b)-(a,b)\big).$$

Jetzt ist die Sache so eingeleitet, wie man in der Differentialrechnung immer verfährt, um die Ableitungen der verschiedenen Funktionen zu bestimmen. Danach kommt es nur noch auf die Ermittlung des Wertes der rechten Seite der (2) für $\lim b=0$ an, wobei die ganze Kunst und einzige Schwierigkeit darin besteht, diesen Ausdruck in eine Form zu bringen, die für ein bis zu Null abnehmendes Inkrement von jeder Unbestimmtheit befreit bleibt.

Der Grenzwert, gegen den der erste Faktor des Produktes konvergiert, ergibt sich unmittelbar:

$$(2')\qquad \lim_{b=0}\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(1+b)}=\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(1)}=\Gamma(a).$$

Der zweite Faktor aber, $\lim\limits_{b=0}\big(\Gamma(b)-(a,b)\big)$, erscheint, da beide Glieder der Differenz, $\Gamma(0)$ und $(a,0)$, unendlich grofs sind (59), unter der unbestimmten Form $\infty-\infty$. Der für gewöhnlich schwierigere Umformungen erfordernde Nachweis, dafs eine solche Differenz gleichwohl einen endlichen bestimmten Wert besitzt, gestaltet sich in unserem Falle einfacher. Man kann nämlich unter den verschiedenen Formen der Integrale $\Gamma(b)$ und (a,b) die Wahl so treffen, dafs für $\lim b=0$ beide Integralfunktionen für denselben Wert der Veränderlichen unendlich grofs werden, und indem man sie alsdann in ein Integral zusammenfafst, findet man, dafs ihre Differenz an jener Stelle thatsächlich einen endlichen, völlig bestimmten Wert besitzt. Und zwar kann man diesen Wert durch Ausführung der Subtraktion sich auch formell verschaffen, so dafs er klar vor unser Auge tritt und man dadurch die Gewifsheit erlangt, dafs $\lim\limits_{b=0}\big(\Gamma(b)-(a,b)\big)$ überhaupt immer, auch wenn es sonst nicht leicht aus der Form erkennbar sein sollte, faktisch existiert.

Für $\Gamma(b)$ und einen zunächst festen Wert von b wählen wir zu dem angegebenen Zwecke die Form:

$$\Gamma(b) = \int_0^1 \left(\log\frac{1}{x}\right)^{b-1} dx = \int_0^1 \frac{1}{\left(\log\frac{1}{x}\right)^{1-b}}\, dx,$$

in der für lim $b = 0$ die Funktion an der oberen Grenze unendlich grofs wird, während sie nach unten zu immer mehr abnimmt.

Das Integral (a, b) mufs natürlich nun auch zwischen den Grenzen 0, 1 gewählt werden, weil es sich sonst mit dem anderen Integral nicht vereinigen liefse. Setzte man aber:

$$(a, b) = \int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{a-1}\, dx,$$

so würde die Funktion für lim $b = 0$ an der unteren Grenze unendlich, an der oberen aber gleich Null. Nur wenn $0 < a < 1$ ist, wäre allerdings daselbst der eine Faktor $(1 - x)^{a-1}$ unendlich, ohne indessen ein Unendlichwerden des Integrals nach sich zu ziehen (43). Mit dieser Form von (a, b) gelänge es also auf keine Weise, die Unbestimmtheit, die der Differenz der beiden unendlich grofsen Integrale anhaftet, zu beseitigen.

Setzt man hingegen:

$$(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, dx,$$

so wird für lim $b = 0$ auch hier wie oben in $\Gamma(b)$ die Funktion, $x^{a-1} \cdot \frac{1}{1-x}$, an der oberen Grenze unendlich grofs, an der unteren gleich Null, während, falls $0 < a < 1$ sein sollte, der vorhin gemachten Bemerkung zufolge der für $x = 0$ unendlich grofse Wert von $\frac{1}{x^{1-a}}$ nicht in Betracht kommt.

Zieht man also dieses (a, b) mit dem oben ausgewählten $\Gamma(b)$ in ein Integral zusammen, nämlich in:

$$\Gamma(b) - (a, b) = \int_0^1 \left(\frac{1}{\left(\log\frac{1}{x}\right)^{1-b}} - \frac{x^{a-1}}{(1-x)^{1-b}}\right) \cdot dx,$$

so ist in den beiden Gliedern der Differenz unter dem Integralzeichen das Unendlichwerden an derselben Stelle $x = 1$ kon-

8*

zentriert, und es tritt nun, wie wir jetzt zeigen werden, der Fall ein, daſs es sich daselbst kompensiert.

Zuvörderst transformiere man das Integral vermittelst der Substitution $x = 1 - z$. Je gröſser x ist, desto mehr nimmt die neue Veränderliche z ab; daher bewirkt diese Substitution, daſs in dem transformierten Integral:

$$\Gamma(b) - (a, b) = \int_0^1 \left(\frac{1}{\left(\log \frac{1}{1-z}\right)^{1-b}} - \frac{(1-z)^{a-1}}{z^{1-b}} \right) dz$$

die Stelle, an welcher die beiden Glieder der Integralfunktion unendlich groſs werden, nach dem Anfang $z = 0$ verlegt ist, wie sich auch direkt aus der Betrachtung des Integrals ergibt.

Da z nur Werte von 0 bis 1 beizulegen sind, so lassen sich die beiden Ausdrücke, aus deren Differenz die Integralfunktion besteht, für $\lim b = 0$ in konvergierende Reihen entwickeln. Zunächst ist bekanntlich:

$$\log \frac{1}{1-z} = -\log(1-z) = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots,$$

also:

$$\frac{1}{\log \frac{1}{1-z}} = \frac{1}{z} \cdot \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} + \cdots\right)^{-1} = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{z}{2} + \cdots\right)$$
$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \cdots.$$

Ebenso ist nach dem binomischen Satz:

$$(1-z)^{a-1} = 1 + (1-a)z + \cdots,$$

mithin:

$$\frac{(1-z)^{a-1}}{z} = \frac{1}{z} + 1 - a + \cdots.$$

Daraus folgt:

$$\frac{1}{\log \frac{1}{1-z}} - \frac{(1-z)^{a-1}}{z} = a - \frac{3}{2} + \cdots,$$

und da sämtliche nicht hingeschriebenen, doppelt unendlich vielen Glieder z in ganzer positiver Potenz enthalten, so ist für $z = 0$ die Differenz der beiden unendlichen Ausdrücke *pure* gleich $a - \frac{3}{2}$, also ein fester und bestimmter endlicher Wert. *q. e. d.*

Auch im übrigen, d. h. an keiner anderen Stelle ist das eine oder das andere Glied unserer Integralfunktion unstatthaft unendlich grofs, weder innerhalb der Integrationsgrenzen, wo überhaupt von einer Unstetigkeit nie die Rede ist, noch auch an der oberen Grenze $z = 1$, wo nur in einem Falle $(0 < a < 1)$ das zweite Glied statthaft unendlich grofs wird. Man hat es demnach mit dem zwischen endlichen, festen Grenzen genommenen Integral einer (abgesehen von der erwähnten zulässigen Beschränkung) überall stetigen und endlichen Funktion zu thun, und ein solches Integral besitzt wie die Funktion selbst stets einen durchaus bestimmten, festen endlichen Wert.

Nach allem diesem leuchtet ein, dafs ohne jedes Bedenken

$$(2'') \qquad \lim_{b=0} \left(\Gamma(b) - (a, b)\right) = \int_0^1 \left(\frac{1}{\log \frac{1}{x}} - \frac{x^{a-1}}{1-x}\right) dx$$

gesetzt werden kann, und also der Grenzwert des zweiten Faktors des Produktes in der (2) durch das auf der rechten Seite dieser Relation befindliche bestimmte Integral repräsentiert wird.

Somit entspringt beim Übergang zur Grenze aus der (2) die Formel:

$$(3) \qquad \frac{d\,\Gamma(a)}{da} = \Gamma'(a) = \Gamma(a) \cdot \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{\log \frac{1}{x}} - \frac{x^{a-1}}{1-x}\right) dx\right),$$

und hieraus unmittelbar das andere, bereits angekündigte Resultat:

$$(3_0) \qquad \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \frac{d \log \Gamma(a)}{da} = \int_0^1 \left(\frac{1}{\log \frac{1}{x}} - \frac{x^{a-1}}{1-x}\right) \cdot dx.$$

Die Derivierte von $\Gamma(a)$ ist also durch ein Produkt zweier Integrale ausgedrückt, von denen das zweite gemischten Charakters ist.

64. Die Gaufssche Produktformel der Gammafunktionen. — Vermittelst der soeben gewonnenen Formeln (3) und (3_0) läfst sich ohne Mühe eine sonst nicht leicht zugängliche Eigenschaft der Gammafunktionen herleiten, die sich darauf bezieht, dafs das Produkt von n Gamma, deren Argumente:

$$(1) \qquad a,\ a+\frac{1}{n},\ a+\frac{2}{n},\ \cdots\ a+\frac{n-1}{n}$$

successive um die aufeinander folgenden Multipla eines aliquoten Teiles der Einheit bis excl. zu dieser selbst hin zunehmen, wieder durch eine Gammafunktion ausgedrückt werden kann.

Zum Nachweis dieses Satzes wird man zuvörderst aufser der Gleichung:

$$(2) \qquad \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \frac{d \log \Gamma(a)}{da} = \int_0^1 \left(\frac{1}{\log \frac{1}{x}} - \frac{x^{a-1}}{1-x} \right) \cdot dx$$

die den $n-1$ anderen Werten der Parameter (1) zugehörigen, entsprechenden Gleichungen aufzustellen haben. Dabei ist folgendes zu beachten.

Wird für die Derivierte von $f(x)$ nach x die Bezeichnung $f'(x)$ angewendet, und nun das Argument x der Funktion $f(x)$ in $x+c$, wo c eine reine Konstante bedeuten soll, umgeändert, so braucht man mit Rücksicht darauf, dafs $\frac{d(x+c)}{dx} = 1$ ist, auch nur dieselbe Änderung des Argumentes in $f'(x)$ vorzunehmen, um die Derivierte der Funktion $f(x+c)$ nach x selbst zu haben; diese ist also $f'(x+c)$. — Wird hingegen, was wir im Laufe der Entwickelung auch werden berücksichtigen müssen, das Argument in cx geändert, so tritt noch wegen $\frac{d(cx)}{dx} = c$ der Faktor c hinzu, so dafs man $\frac{df(cx)}{dx} = cf'(cx)$ hat.

Hiernach gilt die im vorigen Paragraphen für $\Gamma'(a)$ erhaltene Formel und desgleichen die obige, eine unmittelbare Folge oder blofse Umschreibung der ersteren darstellende (2) noch vollkommen streng, wenn man überall a durch die einzelnen Werte (1) ersetzt, nur dafs auf der linken Seite immer der Nenner da bestehen bleibt. Bildet man folglich die Summe der auf solche Weise aus der (2) hergeleiteten n Gleichungen, so bekommt man links durch Herausrücken des gemeinschaftlichen Derivationszeichens $\frac{d}{da}$ die Summe von n Logarithmen, die gleich ist dem

Logarithmus des Produktes der n Gamma. Rechts aber ist unter dem Integralzeichen das nach a konstante erste Glied nur $n$mal zu nehmen, während der Zähler des zweiten Gliedes wird:

$$x^{a-1}\left(1 + x^{\frac{1}{n}} + x^{\frac{2}{n}} + \cdots + x^{\frac{n-1}{n}}\right) = x^{a-1} \cdot \frac{1-x}{1-x^{\frac{1}{n}}}.$$

Nach allem diesem resultiert, wenn noch der Abkürzung halber das Produkt:

$$(1_0)\quad \Gamma(a) \cdot \Gamma\left(a + \frac{1}{n}\right) \cdot \Gamma\left(a + \frac{2}{n}\right) \cdots \Gamma\left(a + \frac{n-1}{n}\right) = T$$

gesetzt wird, die Gleichung:

$$\frac{d \log T}{da} = \int_0^1 \left(\frac{n}{\log \frac{1}{x}} - \frac{x^{a-1}}{1-x^{\frac{1}{n}}}\right) dx,$$

so dafs die Derivierte des Logarithmus von dem Produkte der n Gamma durch ein ganz ähnliches bestimmtes Integral ausgedrückt ist — man übersieht sofort die geringen Unterschiede — wie dieselbe Funktion eines einzelnen Gamma.

Wir wollen nun aber versuchen, diejenigen Teile dieser beiden Integrale, die von a abhängig sind, also die zweiten Glieder ihrer Integralfunktionen, völlig identisch zu gestalten. Dazu müssen wir zuvörderst danach trachten, in den letzten Nenner der vorstehenden Gleichung wieder $1 - x$ statt $1 - x^{\frac{1}{n}}$ hineinzubringen. Wir erreichen dies durch die Substitution $x = x'^n$, vermöge welcher in Anbetracht, dafs unter $x^{\frac{1}{n}}$ natürlich die absolute Potenz zu verstehen ist, die Gleichung übergeht in:

$$\frac{d \log T}{da} = \int_0^1 n \left(\frac{x^{n-1}}{\log \frac{1}{x}} - \frac{x^{na-1}}{1-x}\right) dx.$$

Abgesehen also von dem beiden Gliedern der Integralfunktion gemeinschaftlichen Faktor n, unterscheidet sich jetzt ihr zweites Glied nur noch dadurch von dem in der (2), dafs im Exponenten des Zählers na statt a steht. Da aber die (2) für jeden beliebigen positiven Wert des Argumentes Geltung besitzt, so darf man in ihr a auch durch na ersetzen, wofern man nur in Gemäfsheit einer schon im Anfange unserer Analyse gemachten Bemerkung nicht verabsäumt, $\overset{\prime}{\Gamma}(na)$ noch mit n zu multiplicieren. So erzielen wir die Relation:

$$\frac{d \log \Gamma(na)}{da} = \frac{n\overset{\prime}{\Gamma}(na)}{\Gamma(na)} = \int_0^1 n\left(\frac{1}{\log\frac{1}{x}} - \frac{x^{na-1}}{1-x}\right) \cdot dx,$$

welche die Forderung erfüllt, dafs das zweite Glied ihrer Integralfunktion identisch ist mit dem entsprechenden Gliede der vorangehenden Gleichung.

Subtrahieren wir mithin diese beiden Gleichungen voneinander, so fallen die identischen Glieder und damit jeder a enthaltende Ausdruck ganz heraus, und es entspringt die Formel, auf deren Herleitung wir es abgesehen hatten:

$$(3) \qquad \frac{d}{da} \cdot \log \frac{T}{\Gamma(na)} = n \int_0^1 \frac{x^{n-1} - 1}{\log\frac{1}{x}}\, dx.$$

Es bleibt aber noch der rein numerische Wert zu ermitteln, den das nur von n abhängige bestimmte Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung darstellt. Der Abkürzung halber möge derselbe durch k bezeichnet, also:

$$k = n \int_0^1 \frac{x^{n-1} - 1}{\log\frac{1}{x}}\, dx$$

gesetzt werden.

Wiewohl nun nichts leichter wäre als die unmittelbare Auswertung dieses Integrals, allerdings unter Anwendung eines Kunstgriffes, da die unter dem Integralzeichen befindliche Funktion auf keine Weise unbestimmt integrabel ist, so geben wir doch der ohne Rücksichtnahme auf das Integral zu ermöglichenden direkten Wertbestimmung von k den Vorzug.

Da nämlich die (3), die jetzt in der Form:

$$\frac{d}{da} \cdot \log \frac{T}{\Gamma(na)} = k$$

auftritt, besagt, dafs die Derivierte einer Funktion von a eine reine Konstante k ist, so mufs bekanntlich diese Funktion $\log \frac{T}{\Gamma(na)}$ linear in Bezug auf a sein und k zum Koeffizienten von a haben, d. h. es mufs sein:

$$\log \frac{T}{\Gamma(na)} = ka + l,$$

wo l im Gegensatz zu k eine willkürliche Konstante bezeichnet, deren Wert man aber so zu bestimmen hat, dafs sie den Bedingungen der vorliegenden Aufgabe Genüge leistet [29]). Beide Konstanten k und l sind also unbekannt.

Behufs ihrer Ermittelung ist es zweckmäfsig, von den Logarithmen zu den Zahlen übergehend, die der letzten Gleichung äquivalente Relation aufzustellen:

$$\frac{T}{\Gamma(na)} = (e^k)^a \cdot e^l,$$

deren rechte Seite natürlich nicht mehr linear in Bezug auf a ist. Dafür können wir aber jetzt statt k und l die Exponentialgröfsen e^k, e^l selbst zu Unbekannten wählen und durch die einfachen Buchstaben p bezw. q ersetzen, so dafs man, wenn gleichzeitig noch für T sein Wert (1_0) substituiert wird, die Gleichung hat:

$$\frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma\left(a + \frac{1}{n}\right) \cdots \Gamma\left(a + \frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(na)} = p^a \cdot q. \tag{4}$$

Vermittelst dieser Gleichung läfst sich der Wert von p sofort ausfindig machen. In der That, wird die für das Argument $a + \frac{1}{n}$ aus ihr resultierende Beziehung:

$$\frac{\Gamma\left(a + \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(a + \frac{2}{n}\right) \cdots \Gamma\left(a + \frac{n-1}{n}\right) \cdot \Gamma(a+1)}{\Gamma(na+1)} = p^a \cdot p^{\frac{1}{n}} \cdot q$$

durch die (4) dividiert, so heben sich links im Zähler ihre gleichen Faktoren, und man erhält unter Berücksichtigung der Formel $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ unmittelbar:

$$p = n^{-n}.$$

Es bedarf kaum der Erwähnung, daſs mit p zugleich auch unsere ursprüngliche Konstante k gefunden ist; denn aus der p beigelegten Bedeutung ($p = e^k$) flieſst sofort:

$$k = \log p = -n \log n \text{ [30]}.$$

Die (4) lautet nunmehr:

$$(4') \qquad \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma\left(a + \frac{1}{n}\right) \cdots \Gamma\left(a + \frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(na)} = q\, n^{-na},$$

und enthält nur noch die Unbekannte q.

Die Bestimmung dieser Konstanten kann nicht durch eine ähnliche Vertauschung des Argumentes bewerkstelligt werden, wie es bei p der Fall war, wo es aber auch nur galt, die eine der beiden in dem Produkte $p^a q$ enthaltenen Unbekannten zu ermitteln. Hingegen wird sich ihr Wert leicht aus der Relation:

$$(4'') \qquad \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = q \cdot \frac{1}{n},$$

in welche für den speciellen Fall $a = \frac{1}{n}$ die (4′) übergeht, herleiten lassen. Denn in dem auf der linken Seite dieser Relation befindlichen Produkte kann auf je zwei gleich weit vom Anfang und Ende entfernte Faktoren als Gammafunktionen komplementärer Argumente die Formel $\Gamma(a) \cdot \Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$ in Anwendung gebracht, und folglich jedes dieser Teilprodukte vorerst durch einen trigonometrischen Ausdruck ersetzt werden. Um aber dabei, je nachdem n ungerade oder gerade ist, und demgemäſs sich sämtliche Faktoren paarweise vereinigen lassen, oder in der Mitte der Faktor $\Gamma(\frac{1}{2}) = |\sqrt{\pi}|$ [61, (3)] allein übrigbleibt, die eigentlich notwendige Unterscheidung in zwei Fälle zu umgehen, wollen wir, ähnlich wie in den Elementen bei der Summation der arithmetischen Reihe, die (4″) durch sich selbst, aber in umgekehrter Ordnung der Faktoren multiplicieren und den einzelnen Teilprodukten je zweier homologer Faktoren die aus obiger Formel entspringenden trigonometrischen Werte substituieren. So gelangt man, wenn zu Koeffizienten von π unter dem Sinuszeichen die Argumente der Reihe (4″) gewählt werden, zu der Relation:

$$\frac{\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}} = \frac{q^2}{n^2},$$

aus der sofort der Wert von q fliefst:

$$q = \frac{n\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}}.$$

Da der (4″) zufolge q aus einem Produkt von lauter wesentlich positiven Faktoren besteht, so kann man nicht zweifelhaft sein, dafs in dem eben gewonnenen Ausdruck für q unter der Quadratwurzel und, falls n eine gerade Zahl ist, auch unter der Potenz $\pi^{\frac{n-1}{2}}$ ihre absoluten Werte zu verstehen sind[31]).

Dieser Ausdruck für q ist trotz des in ihm enthaltenen Produktes der sinus nur scheinbar transcendent und repräsentiert vielmehr, woferir auch π dazu gerechnet werden darf, eine rein algebraische Gröfse, die sich ohne Mühe auf folgende Weise ermitteln läfst.

Die Gleichung $x^n - 1 = 0$ hat bekanntlich die n Wurzeln:

$$x = e^{\frac{2s\pi}{n}i} \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots n-1),$$

unter denen sich auch, dem Werte $s = 0$ entsprechend, die reelle Wurzel $x = 1$ vorfindet. Daraus folgt, dafs die obige Exponentialgröfse für $s = 1, 2, \ldots n-1$ die $n-1$ Wurzeln der Gleichung $\frac{x^n-1}{x-1} = 0$ liefert, und dafs die Zerlegung dieses Polynoms in lineare Faktoren unter Anwendung des Produktzeichens Π zu der für jeden beliebigen Wert von x gültigen Identität führt:

$$\frac{x^n-1}{x-1} = \prod_{s=1}^{n-1}\left(x - \cos\frac{2s\pi}{n} - i\sin\frac{2s\pi}{n}\right).$$

Hieraus entspringt für $x = 1$, wo die unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ erscheinende linke Seite den Wert n annimmt, nach einigen einfachen Reduktionen die Relation:

$$n = \prod_{s=1}^{n-1}(-2i)\sin\frac{s\pi}{n}\left(\cos\frac{s\pi}{n} + i\sin\frac{s\pi}{n}\right),$$

oder in Anbetracht, dafs offenbar ein konstanter Koeffizient aller Faktoren eines Produktes, in die sovielte Potenz erhoben, als das Produkt Faktoren hat, vor das Zeichen Π gesetzt werden darf:

$$n = (-2i)^{n-1} \prod_{s=1}^{n-1} \sin\frac{s\pi}{n} \cdot e^{\frac{s\pi}{n}i},$$

oder endlich in anderer Anordnung der Faktoren, deren Reihenfolge ja in einem endlichen Produkte ganz beliebig ist:

$$n = (-2i)^{n-1} \prod_{s=1}^{n-1} \sin\frac{s\pi}{n} \prod_{s=1}^{n-1} e^{\frac{s\pi}{n}i}.$$

Da aber:

$$\prod_{s=1}^{n-1} e^{\frac{s\pi}{n}i} = e^{\frac{\pi}{n}i \cdot \sum_1^{n-1} s} = \left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^{n-1} = i^{n-1}$$

ist, so findet sich:

$$n = 2^{n-1} \prod_{s=1}^{n-1} \sin\frac{s\pi}{n}$$

und daraus:

$$\frac{1}{\sqrt{\prod\limits_{s=1}^{n-1} \sin\frac{s\pi}{n}}} = 2^{\frac{n-1}{2}} n^{-\frac{1}{2}}.$$

Vermöge dieses Wertes erhält man für q statt des früheren Ausdrucks:

$$q = n^{\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}},$$

und durch seine Substitution in die (4') die endgültige Formel:

$$(4_0) \quad \frac{\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(na)} = n^{-na+\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Dieselbe hat Gaufs zum Autor. Ihre Herleitung findet sich in einer Abhandlung, in der er nur beiläufig auf die nicht als Integrale, sondern als Fakultäten definierten Gammafunktionen zu sprechen kommt.

Alle übrigen in diesem Kapitel entwickelten Formeln verdankt man Euler selbst.

Vierter Abschnitt.

Einführung komplex imaginärer Parameter. — Aus der Gammafunktion abgeleitete Integrale.

---

65. Einleitung. — Wir gehen jetzt zur Herleitung neuer wichtiger Formeln über, welche wesentlich mit den Eulerschen Integralen zusammenhängen und speciell von der Formel (57):

$$(1) \qquad \int_0^\infty e^{-kx} x^{a-1}\, dx = \frac{\Gamma(a)}{k^a} \qquad (k > 0)$$

ihren Ursprung nehmen.

Ist es nämlich, wie Euler als selbstverständlich voraussetzte, gestattet, in der (1) die reelle positive Konstante k durch die komplex imaginäre Gröfse $k + \theta i$ (von der das einfach Imaginäre nur einen besonderen Fall bildet) zu ersetzen, also die Relation aufzustellen:

$$(2) \qquad \int_0^\infty e^{-(k+\theta i)x} x^{a-1}\, dx = \frac{\Gamma(a)}{(k+\theta i)^a},$$

so liegt es auf der Hand, dafs diese viel allgemeinere Formel eine Fülle neuer Sätze involvieren würde. Nur müfste offenbar auch in ihr von den beiden im übrigen ganz beliebig reellen Gröfsen k, θ der rein reelle Bestandteil k jedenfalls wiederum positiv sein, weil für $-k$ $(k > 0)$ im Unendlichen gleichzeitig mit dem Faktor e^{kx} das ganze Integral unendlich grofs werden und mithin jede Bedeutung verlieren würde.

Doch kann man dieses Vorgehen von Euler an sich für keineswegs gerechtfertigt erachten, vielmehr bedürfte es erst einer eingehenden Untersuchung, ob überhaupt oder unter welchen Voraussetzungen es erlaubt ist, in einem bestimmten Integral etwas Reelles mit einem Imaginären zu vertauschen.

Der Grund ist evident:

Die Einführung eines reellen Parameters in die Gammafunktion $\int_0^\infty e^{-x} x^{a-1}\,dx = \Gamma(a)$ bot nicht die geringste Schwierigkeit, indem die Substitution $x = ky$ die gemäfs dem Theorem von der Transformation der bestimmten Integrale (35) ohne weiteres gültige Formel (1) unmittelbar zur Folge hatte. Aber dieses Theorem hat zur Voraussetzung, dafs durch die Substitution nicht etwa imaginäre Werte in den Ausdruck für die Variable x hineingebracht werden. Denn während in dem ursprünglichen Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ die Variable und mit derselben auch die Funktion $f(x)$ selbst nur reelle Werte zu durchlaufen hat, und demnach alle Intervalle und Ausdrücke, deren Summe das bestimmte Integral ausmacht, durchaus reell sind, entsprächen alsdann in dem aus der Substitution $x = \psi(y)$ hervorgegangenen Integral $\int_\alpha^\beta f(\psi(y)) \cdot \psi'(y)\,dy$ den reellen Werten von x eine Reihe imaginärer Werte von y, und auch seine Grenzen α, β würden imaginär sein. Und obschon solche „Integrale zwischen imaginären Grenzen" wirklich möglich sind und ihre Betrachtung, die wir uns für später vorbehalten [32]), von äufserster Wichtigkeit ist, so leuchtet doch nicht ein, ob und was für ein Zusammenhang zwischen dem ursprünglichen und dem transformierten Integrale besteht. Bei jenem folgen die reellen Zwischenwerte von a bis b stetig und in ein und demselben Sinne aufeinander, wenn auch die Art ihrer Aufeinanderfolge für den Begriff des bestimmten Integrals belanglos ist; bei diesem aber kann, ganz abgesehen davon, dafs hier auch die Art der Aufeinanderfolge eine Rolle spielen würde, von einer natürlichen Aufeinanderfolge, die es für imaginäre Gröfsen überhaupt nicht gibt, gar nicht die Rede sein. Und was die Grenzen anbetrifft, so gehört in der (1) die obere Grenze ∞ zu den reellen Gröfsen, in dem transformierten Integral aber würde sie unendlich imaginär sein, was etwas ganz anderes ist. In der That, die Substitution $x = (k + \theta i)y$ ergäbe den komplex imaginären Ausdruck:

$$y = \frac{k}{k^2 + \theta^2} x - \frac{\theta}{k^2 + \theta^2} x \cdot i,$$

dessen beide reellen Bestandteile gleichzeitig mit x unendlich würden, und zwar in dem ganz bestimmten Verhältnis von k zu $-\theta$. Es vollzöge sich somit der Übergang von der reellen unteren Grenze 0 zu der unendlich imaginären oberen Grenze durch eine Reihe imaginärer Werte. Ob aber, gleichwie bei den reellen Integralen, die Summe aller in Betracht zu ziehenden Differentialelemente auch hier noch das ursprüngliche Integral repräsentiert[33]), wissen wir nicht.

Gleiche Bedenken erheben sich gegen das weitere Vorgehen von Euler, durch welches er den eben erörterten Schwierigkeiten begegnen zu können glaubt. Er erklärt es für zulässig, einfach in dem neuen Integral die obere Grenze statt unendlich imaginär in gewöhnlichem Sinne unendlich grofs zu nehmen, was darauf hinauskäme, nach Ersetzung des reellen Parameters k durch das komplexe $k + \theta i$ in dem auf der linken Seite der (2) befindlichen Integral die Variable nur relle Werte successive von $x = 0$ bis $x = \infty$ durchlaufen zu lassen. Selbstverständlich gehörte alsdann dies Integral nicht mehr zu der Kategorie der Integrale zwischen imaginären Grenzen, sondern wäre als ein Integral in ganz gewöhnlichem Sinne aufzufassen, nur dafs es eine imaginäre Konstante als Parameter in sich enthielte. — Bei näherer Prüfung wird sich aber herausstellen, dafs dieses Verfahren nur unter gewissen Voraussetzungen in Anwendung gebracht werden darf. Speciell in dem uns vorliegenden Falle wird sich Eulers Schlufsfolgerung als berechtigt erweisen, und, da sich auch gleichzeitig der Wert, welcher der auf der rechten Seite der Gleichung (2) befindlichen Potenz $(k + \theta i)^a$ beizulegen ist, eindeutig wird bestimmen lassen, die Gültigkeit dieser Formel in dem vorhin interpretierten Sinne vorbehaltlos dargethan sein. Denn was den letzteren Punkt betrifft, so besteht ein wesentlicher Unterschied zwischen einer Potenz k^a mit reeller positiver Basis k und der obigen Potenz, deren Basis komplex ist. Jene besitzt stets, was auch der Exponent sei, einen vor allen anderen ausgezeichneten, reellen, positiven Wert, den man alsdann immer allein im Auge hat. Diese aber ermangelt durchaus eines solchen ausgezeichneten Wertes, und da sie in Anbetracht ihres Exponenten a (der unter Ausschlufs ganzer Zahlenwerte sowohl rational als irrational sein kann) stets mehrdeutig ist, so leuchtet an sich nicht ein, ob überhaupt irgend einer oder welcher ihrer Werte die (2) befriedigen würde. Dafs aber nur ein Wert dieser Gleichung gerecht wird, folgt daraus, dafs die einzelnen Faktoren der Integralfunktion: die Exponentialgröfse e^{-kx}, die Potenz x^{a-1}, für welche wegen ihrer überall positiven Basis immer ein ausgezeichneter, allein gültiger Wert vorhanden ist, und endlich der Faktor $e^{-\theta x i}$ (durch dessen Zerlegung in $\cos\theta x - i\sin\theta x$ eine Zweiteilung des Integrals bewirkt wird) sämtlich eindeutig sind, mithin auch das Integral selbst nur einen einzigen, festbestimmten Wert repräsentiert.

In die der Formel (2) zu Grunde liegende Gleichung (1) ist der Parameter k durch eine Substitution eingetreten. Da es aber auch zahlreiche Integrale gibt, die einen anderswoher stammenden Parameter oder von vornherein eine Konstante in sich enthalten, so beschränken wir die anzustellende Untersuchung nicht auf den speciellen Fall der Gleichungen (1) und (2), sondern erweitern die Aufgabe dahin, ganz allgemein die Bedingungen ausfindig zu machen, unter denen es gestattet ist, in einem fertigen und ausgewerteten bestimmten Integral eine durchaus reelle Konstante, mag dieselbe übrigens Einschränkungen unterliegen oder nicht, mit einer komplex imaginären Gröfse zu vertauschen, ohne dafs also durch diese Vertauschung das Integral sinnlos werden, oder, abgesehen von dem neuen Parameter, eine Wertveränderung erleiden dürfte.

Wie an den folgenden Beispielen klar zu Tage treten wird, ist das hinsichtlich dieser Frage verschiedenartige Verhalten der bestimmten Integrale bedingt durch ihre besondere Natur und Beschaffenheit [34]).

I. In der Eulerschen Formel [36, (4)]:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi} \qquad (0 < a < 1) \tag{3}$$

ist die Ersetzung des reellen Parameters a durch die komplexe Gröfse $a + bi$ zulässig. Man gewinnt dadurch die allgemeinere Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a+bi-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin(a+bi)\pi} \qquad (0 < a < 1), \tag{3_0}$$

in der b ohne Einschränkung beliebig reell gesetzt werden darf, der Bestandteil a sich aber innerhalb derselben engen Grenzen 0 und 1 wie in der (3) bewegen mufs, weil sonst wieder wegen des Faktors x^{a-1} die Integralfunktion an der unteren oder oberen Grenze unstatthaft unendlich werden würde (54, I).

Die Berechtigung zu dieser Substitution geht schon daraus hervor[35]), dafs die (3_0) auch direkt hätte abgeleitet werden können und dann die (3) als speciellen Fall ($b = 0$) in sich enthalten hätte.

Auch in den beiden anderen Eulerschen Formeln (4) des § 36 dürfen in ähnlicher Weise die Parameter imaginär genommen werden.

II. Das schon mehrfach betrachtete Integral $\int\limits_0^\infty \cos(x^2)\,dx$ (46; 48) drückt bekanntlich einen festen, rein numerischen Zahlenwert aus. Durch die Substitution $x = x' \cdot |\sqrt{\alpha}|$ wird in dieses Integral ein Parameter eingeführt, und, wenn wir den uns noch unbekannten Wert des Integrals durch c bezeichnen, die Relation gewonnen:

$$\int\limits_0^\infty \cos(\alpha x^2) \cdot dx = \frac{c}{|\sqrt{\alpha}|}. \tag{4}$$

Es springt in die Augen, dafs α positiv vorausgesetzt werden mufs, weil für ein negatives α das Integral selbst durchaus reell bliebe, während die seinen Wert repräsentierende Konstante $\frac{c}{|\sqrt{\alpha}|}$ imaginär würde, was natürlich sinnlos ist. So sieht man auch an diesem Beispiel, wie schon im Bereich des Reellen ganz von selbst sich Beschränkungen für den Parameter einstellen können.

Die Ersetzung aber des reellen α durch das komplexe $\alpha + \beta i$ in der Formel (4) würde in jedem Falle zu totaler Sinnlosigkeit führen. Man hätte dann:

$$\cos(\alpha x^2 + \beta x^2 i) = \cos(\alpha x^2)\cos(\beta x^2 i) - \sin(\alpha x^2)\sin(\beta x^2 i),$$

und um von den beiden aus dieser Entwickelung hervorgehenden und, abgesehen von dem Faktor i des zweiten Gliedes, gleichartigen Teilen nur den ersten, nämlich:

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \cos(\alpha x^2)\,(e^{-\beta x^2} + e^{\beta x^2})\,dx$$

näher ins Auge zu fassen, so würde hier, wie auch das Zeichen von β sei, zwar diejenige Exponentialgröfse, deren Exponent negativ ist, im Unendlichen sehr schnell abnehmen, also dieser Teil des Integrals einen Sinn behalten, die andere aber mit x zugleich beständig wachsen und mithin für sich allein das Integral unendlich grofs machen. Da aber nun gar noch der Faktor $\cos(\alpha x^2)$ hinzukommt, welcher unaufhörlich und in immer kleineren Intervallen sein Zeichen wechselt, so zerfiele das Integral in unendlich viele Teilintegrale, die successive in immer engeren und dabei immer höheren Schwankungen unausgesetzt aus dem Positiven ins Negative hin und her gehen, und wäre demzufolge nicht einmal unendlich grofs, sondern ohne jede Bedeutung [36]).

Die (4) ist also auf ein komplexes α nicht ausdehnbar, und selbst wenn dies der Fall wäre, so erwüchse noch die andere erhebliche Schwierigkeit, den bevorzugten und gültigen Wert der Quadratwurzel von $\alpha + \beta i$ ausfindig zu machen.

Aus diesen Beispielen erhellt, welch ungeheure Erleichterung es verschaffen würde, wenn sich in jedem einzelnen Falle die Entscheidung über die Zulässigkeit der fraglichen Substitution nach allgemein gültigen Regeln treffen liefse. In der That existieren solch allgemein anwendbare Kriterien, und unsere nächste Aufgabe mufs es jetzt sein, dieselben aufzusuchen. Dazu sind wir genötigt, etwas weit auszuholen und zuvörderst eine Reihe äufserst wichtiger, charakteristische Grundeigenschaften komplexer Funktionen betreffender Vorfragen zu erledigen.

Diese Präliminarien machen den Gegenstand des folgenden Kapitels aus.

Erstes Kapitel.

Fundamentaltheoreme über Funktionen komplex imaginärer Argumente. — Stetigkeit bestimmter Integrale in Bezug auf ihre Parameter.

66. Mehrdeutigkeit der inversen Funktionen, speciell der gebrochenen Potenz $(x + yi)^{\frac{m}{n}}$. — An erster Stelle handelt es sich um folgende Thatsache, auf die man erst in neuester Zeit aufmerksam geworden ist, und die früher, wo sie verborgen war, häufig zu Unrichtigkeiten Veranlassung gegeben hat.

Es liege eine rein analytische, sei es explicite durch irgend welche Grundoperationen oder implicite durch auf solchen Operationen beruhende Gleichungen mathematisch definierte, reguläre Funktion vor. Dieselbe enthalte nichts Imaginäres und sei innerhalb des ganzen, ihrem reellen Argument zugewiesenen Umfanges durchaus stetig, d. h. überall eindeutig und bestimmt, endlich und allmählich veränderlich. Stets kann man alsdann selbstverständlich durch bloſse Vertauschung ein zweiteilig imaginäres Argument in sie einführen, aber nicht kann man verlangen, daſs nun auch die imaginäre Funktion immer für den ganzen Umfang des Wertegebietes der beiden reellen Bestandteile der komplexen Gröſse sämtliche drei oben aufgeführten Bedingungen der Stetigkeit erfülle.

Man hat hinsichtlich dieser Frage zu unterscheiden zwischen den eindeutigen oder direkten und den aus jenen abgeleiteten inversen oder vieldeutigen Funktionen. Direkte Funktionen sind z. B. alle durch die vier Grundoperationen gebildeten algebraischen Ausdrücke, die ganzen Potenzen, die Exponentialgröſse, die trigonometrischen Funktionen. Zu den inversen Funktionen gehören die Wurzeln oder gebrochenen Potenzen und die Logarithmen. Nur diese zeigen das oben gekennzeichnete Verhalten, die direkten Funktionen hingegen sind sämtlich für alle nur möglichen Werte nicht nur ihres reellen, sondern auch eines an seine Stelle getretenen komplexen Argumentes durchaus stetig und eindeutig, und wie man sie auch von einer Stelle zu einer anderen hinbringen mag, immer stöſst man auf denselben ganz bestimmten Wert, den sie an dieser Stelle überhaupt nur besitzen.

Auch erleidet eine solche Funktion nicht etwa dadurch, daſs sie für gewisse Werte ihres Argumentes, wie z. B. $\frac{1}{x}$ für $x = 0$, unendlich wird, eine Unterbrechung ihrer Stetigkeit; vielmehr ist sie auch dann in ihrem ganzen Verlaufe bis zu dieser Stelle hin durchaus einwertig und stetig veränderlich.

Das gegenteilige Verhalten aber eines jeden einzelnen der verschiedenen Werte, deren eine mehrdeutige Funktion fähig ist, soll an der zu dieser Untersuchung ganz besonders sich eignenden gebrochenen Potenz

$$x^{\frac{m}{n}}$$

des näheren dargethan werden.

Der gröfseren Klarheit und Einfachheit halber werde festgesetzt, dafs der Nenner n des in seinen kleinsten ganzen Zahlen ausgedrückten Exponenten $\frac{m}{n}$ stets positiv sei, der Zähler m aber ebensogut negative wie positive Werte annehmen darf. Der Nenner n mufs natürlich gröfser als 1 sein, weil wir es sonst mit einer direkten Funktion zu thun hätten, die nicht in den Kreis unserer Betrachtung hineinfällt.

Die Basis x werde zunächst reell genommen.

Ist sie dann positiv, so besitzt die Potenz unter ihren n Wurzeln stets einen vor allen übrigen ausgezeichneten Wert, der allein wie x selbst reell und positiv und in dem ganzen Umfange von $x = 0$ bis $x = \infty$ durchaus stetig und eindeutig ist.

Ist aber die Basis negativ reell, so hat man zu unterscheiden, ob der Nenner n des Exponenten gerade oder ungerade ist. Im letzteren Falle befindet sich unter den n Wurzeln der Potenz ebenfalls stets eine einzige reelle und zwar, je nachdem m gerade oder ungerade ist, positive oder negative Wurzel. Ist hingegen n gerade (also m ungerade) [37], so sind sämtliche n Wurzeln imaginär, und keine von ihnen zeichnet sich vor den anderen aus.

Nun werde das reelle Argument x mit dem komplexen $x + yi$ vertauscht. Dann liegt es uns in Gemäfsheit der zu Anfang des Paragraphen formulierten Aufgabe ob, für die aus dieser Substitution hervorgehende gebrochene imaginäre Potenz

$$(x + yi)^{\frac{m}{n}} \tag{1}$$

den Nachweis zu führen, dafs es unter ihren n Wurzeln keine einzige gibt — es sei denn $n = 1$ —, die in dem oben interpretierten Sinne in dem ganzen Umfange des sich von $-\infty$ bis ∞ erstreckenden Bereiches der Werte sowohl von x als von y eine durchaus stetige Funktion dieser beiden Variabeln (50) sei. Vielmehr wird sich herausstellen, dafs die Bedingung der Einwertigkeit mit den übrigen Bedingungen der Stetigkeit unvereinbar ist.

Zu diesem Behufe ist zuvörderst der Potenz (1) eine handlichere Gestalt zu geben, in der sich ihre n verschiedenen Werte leicht voneinander unterscheiden lassen.

Man bringe die komplexe Zahl $x + yi$ auf die sogenannte reducierte Form:

$$x + yi = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \varrho\, e^{\varphi i},$$

wo man jetzt gewöhnlich das immer absolut zu nehmende ϱ den Modul und φ das Argument des imaginären Ausdrucks zu nennen pflegt.

Zur völlig unzweideutigen Bestimmung des Moduls ϱ und der beiden trigonometrischen Funktionen vermittelst der Variablen x, y dienen alsdann die aus den Gleichungen

$$x = \varrho\cos\varphi, \quad y = \varrho\sin\varphi$$

entspringenden Werte:

$$\varrho = |\sqrt{x^2 + y^2}|$$

und

(2) $$\cos\varphi = \frac{x}{\varrho}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\varrho}.$$

Was den arcus φ selbst anlangt, so werden die Relationen (2) durch unendlich viele verschiedene Werte desselben erfüllt, von denen jedoch stets nur einer innerhalb vier aufeinander folgender Quadranten liegt. Wird ein ganz beliebiger, aber festbestimmter unter diesen Werten durch φ_0 bezeichnet, so sind sie sämtlich in

(2') $$\varphi = \varphi_0 + 2s\pi$$

enthalten, wo s irgend eine ganze Zahl bedeutet.

Hiernach hat man für die Potenz (1) den Ausdruck:

(3) $$(x + yi)^{\frac{m}{n}} = \varrho^{\frac{m}{n}} e^{\frac{m}{n}\varphi_0 i} e^{\frac{2sm\pi}{n} i} \quad (s = -\infty, \ldots -1, 0, 1, \ldots \infty),$$

in welchem unter $\varrho^{\frac{m}{n}}$ stets sein ausgezeichneter reeller positiver Wert verstanden werden soll, und da auch φ_0 festbestimmt ist, so wirft sich alle Vieldeutigkeit auf das in der letzten Exponentialgröfse enthaltene s. Diese Exponentialgröfse bleibt aber für je zwei um n verschiedene Werte von s ungeändert, so dafs der

Ausdruck (3) schon alle nur mögliche Allgemeinheit besitzt, wenn man s die Werte:

$$0, 1, 2, \ldots n - 1$$

oder überhaupt nur n irgendwo in der unendlichen Zahlenreihe aufeinander folgende Werte beilegt.

Von diesen n Wurzeln der (3) greifen wir nun eine bestimmte, aber gleichviel welche heraus, was geschieht, indem man für s einen beliebigen, aber bestimmten seiner n möglichen Werte auswählt, und legen uns die Frage vor, wie man sich zu benehmen hat, damit, wenn x und y sich irgendwie stetig ändern, auch diese Wurzel sich stetig ändere.

Wir werden finden, dafs dies nur durch eine stetige Änderung von φ_0 erreicht werden kann, dafs man dabei aber auf einen Widerspruch geführt wird.

Der gröfseren Anschaulichkeit halber bedienen wir uns bei dieser Untersuchung der graphischen Darstellungsweise und fassen die Variablen x, y als rechtwinklige Koordinaten in der unendlichen Ebene auf. Da alsdann durch die verschiedenen möglichen Kombinationen von x und y alle Punkte der Ebene umfafst werden, so läfst sich die stetige Veränderung der Variablen immer durch eine Kurve veranschaulichen, die der bewegliche Punkt x, y zu durchlaufen hat, und jeder einzelne Punkt dieser Kurve kann zum Repräsentanten der Funktion (3) für das zugehörige Wertepaar x, y gewählt werden, so dafs durch die Kurve selbst das Gesetz der Veränderlichkeit der Funktion (3) graphisch zur Darstellung gelangt, ihr Wert aber dabei ganz aufser acht gelassen wird.

Die geometrische Bedeutung der abhängigen Veränderlichen ϱ, φ ist nun ohne weiteres klar. Das absolut zu nehmende $\varrho = |\sqrt{x^2 + y^2}|$ ist nichts anderes als der vom Nullpunkt O nach dem betreffenden Punkte x, y gehende Radiusvektor, und der Winkel, den dieser mit der positiven Richtung der OX bildet, nichts anderes als derjenige Wert des zugehörigen Argumentes φ, der innerhalb der vier ersten Quadranten liegt. — Auch erhellt auf den ersten Blick, dafs ϱ sich gleichzeitig mit x und y durchaus stetig ändert und überall eindeutig ist.

Das Verhalten von φ aber und der Funktion (3) selbst ist noch einer eingehenderen Betrachtung zu unterziehen.

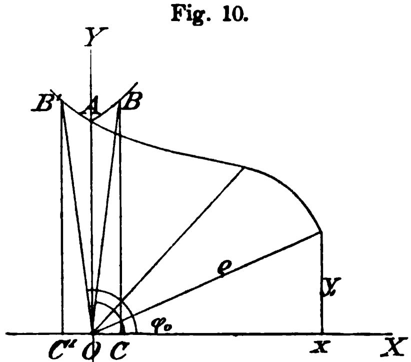
Vor allem hat man sich zu entscheiden, innerhalb welcher vier aufeinander folgender Quadranten der durch φ_0 bezeichnete Wert von φ gewählt werden soll, und festzusetzen, dafs es nicht gestattet sein soll, demselben im Verlaufe seiner Bewegung an irgend einer Stelle willkürlich einen anderen der Werte (2′) zu substituieren oder ein beliebiges Multiplum der Peripherie hinzuzulegen, und ihn durch diese sprungweise Veränderung seines Wertes in irgend vier andere sich folgende Quadranten zu werfen. Unter diesen Voraussetzungen ist der Winkel φ_0, wie die Diskussion der Relationen (2):

$$(2_0) \qquad \cos\varphi_0 = \frac{x}{\varrho}, \quad \sin\varphi_0 = \frac{y}{\varrho},$$

von denen er allein noch abhängig ist, in unzweideutiger Weise zeigen wird, ebenfalls, wie ϱ, mit dem er sich gleichzeitig ändert, eine durchaus stetige und einwertige Funktion der Variablen x, y.

Seine Gröfse und Lage innerhalb der vier Quadranten bei Beginn der Bewegung wird durch die Anfangswerte von x und y direkt bestimmt. Solange alsdann im Verlaufe der Bewegung $\frac{x}{\varrho}$ und $\frac{y}{\varrho}$ echte Brüche sind, verbleibt er in demselben Quadranten und besitzt an jeder Stelle einen einzigen, festbestimmten Wert. Nur wenn einer dieser Quotienten gleich ± 1, der andere gleich 0 wird, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn die Kurve der x, y eine der Achsen trifft, liegen beiderseits dieser Achse, dem zugehörigen Werte ± 1 unendlich benachbart, zwei gleiche Werte des ersteren Quotienten. Ist z. B. [38]) (Fig. 10) $\frac{|y|}{\varrho} = 1$, $x = 0$, d. i. $|\sin\varphi_0| = 1$, $\cos\varphi_0 = 0$, also der bewegliche Punkt nach A auf der OY gelangt, so entsprechen dem folgenden Wertepaare x, y zwei gleiche, in demselben und im anstofsenden Quadranten gelegene Werte des sinus (BC, $B'C''$), von welchen jedoch nur derjenige in Betracht kommt, der auch gleichzeitig der andern Bedingungsgleichung, $\cos\varphi_0 = \frac{x}{\varrho}$, Genüge

Fig. 10.

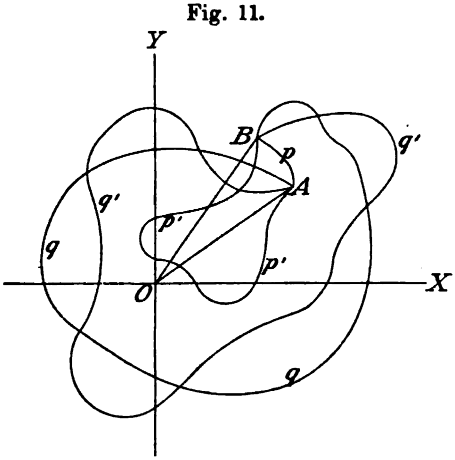


leistet, also, je nachdem die zugehörige Abscisse x ihr bisheriges Zeichen beibehält oder wechselt, in den früheren Quadranten zurückkehrt oder in den anliegenden übergeht.

Somit ist die Stetigkeit und Einwertigkeit des Winkels φ_0 erwiesen. Gleichwohl ist hinsichtlich seiner Eindeutigkeit die Einschränkung zu machen — und diese Klausel darf nicht vernachlässigt werden — dafs sein Wert an jeder Stelle nur bei Berücksichtigung des von ihm zurückgelegten Weges ein festbestimmter ist.

Denn der Punkt x, y bewege sich (Fig. 11) von der anfänglichen Stelle A nach der beliebigen Stelle B hin, und zwar zunächst direkt, worunter wir verstehen wollen: zwar auf einer sonst ganz beliebigen Kurve (z. B. p oder p'), aber ohne dabei einen ganzen Umlauf durch die vier betreffenden, sich folgenden Quadranten zurückzulegen. Dann wird sich der Winkel φ_0, wie auch immer, stets nur um den Winkel BOA stetig geändert haben. Ebensogut kann sich aber auch der Punkt vermittelst eines völligen Umlaufes um die vier Achsen herum oder auch vermittelst eines k-fachen Umlaufes von A nach B hinbewegen, was wiederum auf die mannigfachste Art und Weise vollführt werden kann (z. B. auf q oder q'). Dann ist offenbar der nunmehr zu B gehörige Winkel von dem früheren um 2π bezw. $2k\pi$ verschieden, d. h. die Änderung, die der Ausgangswinkel φ_0 erfahren hat, beträgt jetzt, je nachdem die Umläufe in dem einen oder dem anderen Sinne stattgefunden haben, $BOA \pm 2\pi$ bezw. $BOA \pm 2k\pi$.

Fig. 11.



Hieraus ersieht man, dafs φ_0 an jeder Stelle, einschliefslich der Ausgangsstelle A selbst (denn die Bewegung von A nach A zurück bildet ja nur einen speciellen Fall der allgemeinen Bewegung des Punktes x, y) ganz verschiedene Werte annehmen kann, und dafs sein wahrer Wert in dem beliebigen Punkte B von der Art und Weise abhängt, wie man von dem Element A zu dem Element B übergegangen ist, d. h., wenn man sich so ausdrücken darf, nicht blofs durch Anfang und Ende des Weges, sondern auch durch die dazwischenliegenden Werte bestimmt wird, durch diese jedoch nur insoweit, als die Zahl der Umläufe oder die schliefsliche Totalveränderung des Winkels in Betracht zu ziehen ist [39]).

Was die analytische Bedeutung eines Umlaufes anlangt, so läfst sie sich leicht dahin erklären, dafs x und y beide einzeln durch Null hindurch aus dem Positiven ins Negative oder aus dem Negativen ins Positive übergehen und wieder dahin zurückkehren [40]).

Übrigens wird bei dieser ganzen Untersuchung der Veränderlichkeit von φ_0 vorausgesetzt, dafs nicht beide Variabeln gleichzeitig zu Null werden, oder die Kurve nicht durch den Nullpunkt gehe, weil sich sonst, wie wir weiter unten (67) des näheren darthun werden, bezüglich der Stetigkeit und des Wertes von φ_0 Zweifel erheben würden.

Nunmehr kommen wir zu der Wurzel (3) selbst.

Von ihren drei Faktoren ist der Faktor $e^{2s\cdot\frac{m\pi}{n}i}$, in dem wir s einen festbestimmten Wert beigelegt haben, eine reine Konstante. Die beiden anderen Faktoren aber sind durchaus stetige Funktionen: $\varrho^{\frac{m}{n}}$, wie schon früher bemerkt, und

$$e^{\frac{m}{n}\varphi_0 i} = \cos\frac{m}{n}\varphi_0 + i\sin\frac{m}{n}\varphi_0$$

wegen der erwiesenen Stetigkeit und Einwertigkeit von φ_0 [41]).

Daraus folgt, dafs auch eine jede bestimmte der n Wurzeln der Potenz $(x+yi)^{\frac{m}{n}}$ — denn man darf ja für s jeden beliebigen seiner n verschiedenen Werte wählen — in dem ganzen Umfange der Werte von x und y (mit alleinigem Ausschlufs des Systems 0,0) selbst eine stetig veränderliche Funktion dieser beiden Variablen ist. Und die Möglichkeit davon haben wir auch nicht geleugnet.

Hingegen soll jetzt der Nachweis geführt werden, dafs keine von diesen n stetigen Funktionen in dem ganzen Bereich *der möglichen Werte von x und y auch zugleich einwertig verläuft.*

Zu diesem Zwecke wollen wir zuvörderst die n Wurzeln getrennt voneinander darstellen, um deutlich hervortreten zu lassen, dafs sie thatsächlich sämtlich um endliche Gröfsen voneinander verschieden sind, mithin die Konstanz von s unerläfsliche Vorbedingung ihrer stetigen Veränderlichkeit ist.

Ausgehend von der bestimmten Wurzel (3), erhält man die anderen $n - 1$ Wurzeln, wenn man in der Exponentialgröfse $e^{2s \cdot \frac{m\pi}{n} i}$ den Faktor s des Exponenten durch $s + \nu$ oder $s - \nu$ ersetzt und ν einzeln die Werte

(4) $$1, 2, 3, \ldots n - 1$$

beilegt. Dadurch tritt in der (3) der Faktor $e^{\pm \frac{\nu}{n} \cdot 2m\pi i}$ hinzu, und da derselbe gleich 1 nie sein kann (denn dazu müfste $\nu = 0$ oder n sein) und für jeden der vorstehenden Werte offenbar einen distinkten endlichen Wert annimmt, so gilt dasselbe auch von den einzelnen Wurzeln selbst, einschliefslich derjenigen, für welche, falls m ungerade, $\frac{\nu}{n} = \frac{1}{2}$ [42]) und der neue Faktor gleich -1 ist. Nur wenn die (3) gleich Null wäre, was eintreten würde, wenn ϱ, d. h. gleichzeitig x und y gleich Null ist, dürfte man s beliebig ändern, ohne die Wurzel unstetig zu machen. Doch kommt dieser Fall, den wir oben ausdrücklich ausgenommen haben, nicht weiter in Betracht.

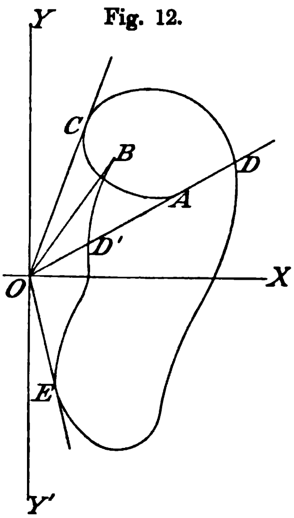
Die stetige Veränderlichkeit der einzelnen Wurzeln kann also lediglich, wie wir auch gleich anfangs hervorgehoben haben, durch die stetige Veränderung von φ_0, nicht aber auch durch eine (unstetige) Veränderung von s bewirkt werden.

Nun haben wir aber oben gesehen, dafs bei der Bewegung von A nach B auch für ein festes, unveränderliches s der zu B gehörige Schlufswinkel entweder das in den ursprünglich ausgewählten vier Quadranten gelegene φ_0, oder dieses $\varphi_0 \pm 2\pi$ oder $\varphi_0 \pm 2\nu\pi$ ist, je nachdem man zu B ohne einen vollständigen Umlauf oder vermittelst *eines* oder eines νfachen Umlaufes gelangt ist. Dementsprechend wird auch in der (3) die Exponentialgröfse $e^{\frac{m}{n}\varphi_0 i}$ entweder unverändert bestehen bleiben, oder durch $e^{\frac{m}{n}(\varphi_0 \pm 2\pi) i}$ bezw. durch $e^{\frac{m}{n}(\varphi_0 \pm 2\nu\pi) i}$ zu ersetzen sein und alsdann einen total anderen Wert annehmen. Denn es tritt dadurch genau wie vorher bei der Vertauschung von s mit $s \dot{\pm} \nu$ und mit genau derselben Wirkung der Faktor $e^{\pm \frac{\nu}{n} \cdot 2m\pi i}$ hinzu[43]), der, außer wenn ν ein Multiplum von n ist, nie gleich 1 sein kann. Der einzige Unterschied besteht darin, daß jetzt ν eine beliebige ganze Zahl und nicht bloß einer der Werte (4) ist, doch ist klar, daß durch diese letzteren schon die verschiedenen Werte, deren der neue Faktor fähig ist, erschöpft sind[44]).

Das Endergebnis unserer Untersuchung ist demnach, daß man auch ohne Änderung von s und obwohl die ganze Funktion (3) sich stetig ändert, allein infolge der verschiedenen Art, wie man von A nach B hingelangt, jede Wurzel statt jeder bekommen kann, und daß es mithin nicht möglich ist, irgend eine von ihnen herauszugreifen, die eine solche Funktion ihrer Elemente x, y wäre, daß sie an jeder Stelle notwendig einwertig bliebe. Selbstverständlich stößt man zwar nie auf einen falschen Wert, aber möglicherweise spielen die einzelnen Wurzeln ineinander über.

67. Notwendige Bedingungen der Einwertigkeit der inversen Funktionen komplexer Argumente. — Da, wie man sich im vorhergehenden überzeugt hat, die Vieldeutigkeit der komplexen inversen Funktionen lediglich darin ihren Grund hat, daß für x und y der ganze Umfang ihrer Werte zugelassen und dadurch vollständige Umläufe ermöglicht wurden, so leuchtet ein, daß durch Aufstellung solcher Beschränkungen für die Werte von x und y, durch welche die Möglichkeit jedes Umlaufes vernichtet wird, ihre mit Stetigkeit verbundene Einwertigkeit wird erzielt werden können. So z. B., wenn man festsetzt[45]), daß, während y ganz beliebig bleibt, x nur positive Werte soll annehmen dürfen. Mag alsdann die Kurve in noch so viel Windungen von A nach B geführt sein (Fig. 12), dies hindert nun nicht[46]), daß der Winkel φ_0 sich schließlich immer nur

Fig. 12.



um BOA selbst wird geändert haben. Zuerst wächst er bis C, nimmt dann bis D um ebensoviel ab, nimmt noch weiter ab bis E, wächst dann wieder um soviel (bis D') und noch um BOA, so dafs sich immer Inkrement und Dekrement gegenseitig zerstören und schliefslich die ganze Änderung eben nur jenes BOA ausmacht. Überhaupt liegen dann alle für φ_0 noch möglichen Werte nur auf der positiven Seite der Ordinatenachse und können sich höchstens um π voneinander unterscheiden, weshalb man auch am geeignetsten für die Stelle, welche dieses Element in der unendlichen Ausdehnung einnehmen soll, das Intervall von $-\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2}$ auswählen wird.

Die oben gemachten Einschränkungen können auch durch andere ersetzt werden, welche dieselbe Wirkung haben, also jeden Umlauf unmöglich machen oder, was auf dasselbe hinausläuft, verhindern, dafs der Punkt 0, 0 innerhalb der zurückgelegten Kurve liege.

Der Punkt 0, 0 erweist sich also hier als kritischer Punkt.

Derselbe darf auch niemals auf dem Wege der Kurve selbst liegen. Denn ginge die Kurve durch den Nullpunkt, so würde in ihm völlige Unbestimmtheit herrschen: der Modul ϱ und mit ϱ der ganze Ausdruck (3) in § 66 würden, wie man auch anfänglich φ_0 und s gewählt hätte, gleich Null; alle Wurzeln wären hier vereinigt, und da der Ausdruck als gleich Null auch bei einer Vertauschung des Wertes von s nicht unstetig wird, so kann man nun von hier aus jede Wurzel verfolgen, um nach B zu gelangen oder nach A zurückzukehren. Auch könnte man sich ja in dem Nullpunkte selbst beliebig viel Umläufe vollzogen denken. Allerdings tritt alles dies nur ein, wenn der Exponent $\frac{m}{n}$ positiv ist, da für einen negativen Wert desselben $\varrho^{\frac{m}{n}}$ im Punkte 0, 0 nicht Null, sondern unendlich wird. Das spielt aber in der vorliegenden Frage dieselbe Rolle.

Unter diesen Bedingungen und den obigen oder anderen geeigneten Voraussetzungen ist also φ_0 und eine jede der n Wurzeln der Potenz $(x + yi)^{\frac{m}{n}}$ durchaus überall einwertig. Wird demnach y völlig beliebig gelassen, aber

$$x \geqq 0$$

angenommen, so stellt eine jede der n Wurzeln der Potenz:

$$(x + y i)^{\frac{m}{n}} = \varrho^{\frac{m}{n}} e^{\frac{m}{n}\varphi_0 i} e^{2s\frac{m\pi}{n}i} \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq \varphi_0 \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

für

$$s = k, k + 1, k + 2, \ldots k + n - 1 \qquad (k \text{ beliebig ganz})$$

eine Funktion von x und y dar, die in dem ganzen für x und y freigelassenen Bereich an jeder Stelle, wie man auch zu derselben sich hinbewegen mag, völlig bestimmt, einwertig und stetig veränderlich ist.

Genau ebenso, auch betreffs des zu führenden Nachweises, verhält es sich mit dem Logarithmus eines zweiteilig imaginären Argumentes:

$$\log (x + y i),$$

der sogar unendlich viele Wurzeln besitzt. Auch hier entscheidet die Zahl der Umläufe über den schliefslichen Wert, der der betreffenden Wurzel zukommt.

Statt 0, 0 könnte der kritische Punkt auch ein anderer Punkt x, y sein.

Auch gibt es vieldeutige Funktionen, wo mehrere solcher kritischen Punkte vorhanden sind.

Immer aber wird, wenn man nur irgendwie durch geeignete Beschränkungen jeden Umlauf unmöglich gemacht hat, die Funktion, wie man sich auch weiter bewegt, eine eindeutig bestimmte und stetige sein.

68. Lehrsatz von der Identität zweier imaginärer Funktionen. — „Angenommen, es seien in dem in den vorangehenden Paragraphen präcisierten Sinne

$$\varphi(x + y i) \quad \text{und} \quad \psi(x + y i)$$

zwei in ein und demselben bestimmten, unendlich grofsen oder endlichen Umfange für x und y, also, geometrisch aufgefafst, innerhalb desselben bestimmten, ganz beliebigen, aber zusammenhängenden Flächenraumes durchaus stetige und an jeder Stelle eindeutige Funktionen des imaginären Argumentes $x + y i$, so ist nur vonnöten, dafs diese beiden Funktionen auf einer noch so kleinen, geraden oder beliebig krummen, innerhalb jenes Flächenraumes gelegenen Linie übereinstimmen, d. i. analytisch, in einem noch so kleinen Intervalle stetig aufeinander folgender

Wertsysteme von x und y einander gleich seien, damit sie dann auch innerhalb des ganzen in Rede stehenden Flächenraumes völlig identisch seien, also für dies ganze Intervall die Identität stattfinde:

$$(1) \qquad \varphi(x + yi) = \psi(x + yi)."$$

Dieser ungemein wichtige und fruchtbare Satz wird mit Hülfe des Theorems in den „Anwendungen" § 32 bewiesen, dem zufolge eine Funktion

$$f(\xi + \eta i)$$

des zweiteilig imaginären Argumentes $\xi + \eta i$ unter der Voraussetzung, dafs sie für alle die Ungleichheit $\xi^2 + \eta^2 \leqq r^2$ erfüllenden Werte von ξ und η, also innerhalb des um den Nullpunkt mit einem beliebig grofsen, aber festbestimmten Radius r beschriebenen Kreises $r^2\pi$ genau den Charakter an sich trägt, den wir den Funktionen φ und ψ vindiciert haben, stets für alle jene Werte von ξ und η in eine nach ganzen Potenzen des Binoms $\xi + \eta i$ fortschreitende, unendliche konvergierende Reihe:

$$f(\xi + \eta i) = A_0 + A_1(\xi + \eta i) + A_2(\xi + \eta i)^2 + \cdots$$
$$(\xi^2 + \eta^2 \leqq r^2)$$

entwickelbar ist, in der die Koeffizienten A auch imaginär sein können.

Der Beweis wird genau auf die Art geführt, wie man in den Elementen aus einem beschränkteren Gesichtspunkte darthut, dafs zwei innerhalb derselben Grenzen konvergente Potenzreihen überall in diesem ganzen Intervall identisch sind, sobald sie nur in einem noch so kleinen Teilintervall übereinstimmen.

Der Kürze und gröfseren Klarheit halber gestalten wir den Beweis wieder geometrisch, was um so mehr erlaubt ist, als sein analytischer Sinn ohne weiteres einleuchtet und die Geometrie hier nur als Ausdrucksmittel gebraucht wird, durch dessen Anwendung man der Analysis, die sich selbst genügt, nichts vergibt.

Fig. 13 zeigt die innerhalb des betreffenden, beliebig gestalteten und beliebig grofsen Flächenraumes F gelegene Strecke σ, auf der zwischen φ und ψ Übereinstimmung herrschen soll. Um einen beliebigen Punkt dieses Raumes, am füglichsten um den Anfangspunkt der Linie σ, dessen Koordinaten in Bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem a, b sein mögen, beschreibe man einen Kreis mit einem beliebigen, jedoch so gewählten Radius r, dafs er die ganze Linie σ umschliefst und mit keinem noch so kleinen Teile aufserhalb F fällt. Dann verlege man den Anfangspunkt der Koordinaten in den Punkt a, b, so dafs, wenn die neuen, den ursprünglichen parallelen Koordinaten ξ, η genannt werden,

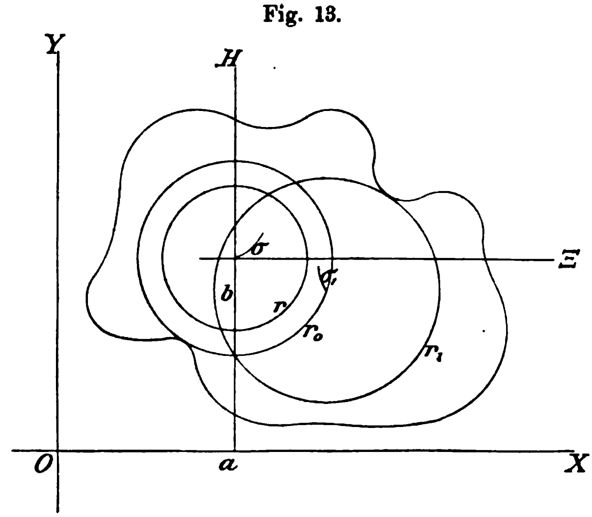
$$x = \xi + a, \quad y = \eta + b$$

ist und unsere beiden Funktionen in:

$$(2) \qquad \varphi(a + bi + \xi + \eta i), \quad \psi(a + bi + \xi + \eta i)$$

übergehen. In besonderen Fällen könnte die Linie σ auch ein Stück der η-Achse oder der ξ-Achse selbst sein, wenn ihr Ele-

Fig. 13.



ment ξ konstant gleich Null bliebe und sich nur η von 0 bis etwa η_1 änderte, bezw. wenn η konstant gleich Null bliebe und ξ von 0 bis ξ_1 ginge; in jedem anderen Falle liegt die Linie σ schief gegen beide Achsen.

Da nun die beiden Funktionen (2) in dem ganzen Raume F, um so mehr innerhalb des um den Punkt a, b, d. i. den Punkt $\xi = 0$, $\eta = 0$ beschriebenen Kreises $r^2\pi$ alle durch das oben angezogene Lemma für die Funktion $f(\xi + \eta i)$ des Argumentes $\xi + \eta i$ geforderten Bedingungen erfüllen, so sind sie für alle innerhalb des Kreises $r^2\pi$ oder auf seiner Peripherie gelegenen Werte von ξ, η durch die konvergierenden Potenzreihen:

$$(2')\begin{cases} \varphi(a+bi+\xi+\eta i) = A_0 + A_1(\xi+\eta i) + A_2(\xi+\eta i)^2 + \cdots, \\ \psi(a+bi+\xi+\eta i) = B_0 + B_1(\xi+\eta i) + B_2(\xi+\eta i)^2 + \cdots \end{cases}$$
$$(\xi^2 + \eta^2 \leqq r^2)$$

darstellbar.

Für alle Punkte auf der Linie σ hat man aber nach der Voraussetzung:

$$\varphi(a + bi + \xi + \eta i) = \psi(a + bi + \xi + \eta i),$$

also wegen der (2'):

$$(2_0)\qquad \begin{aligned} & A_0 + A_1(\xi + \eta i) + A_2(\xi + \eta i)^2 + \cdots \\ & = B_0 + B_1(\xi + \eta i) + B_2(\xi + \eta i)^2 + \cdots, \end{aligned}$$

folglich, für $\xi = 0$, $\eta = 0$:

$$\varphi(a + bi) = \psi(a + bi) \quad \text{oder} \quad A_0 = B_0,$$

und daher auch:

$$\begin{aligned} & A_1(\xi + \eta i) + A_2(\xi + \eta i)^2 + \cdots \\ & = B_1(\xi + \eta i) + B_2(\xi + \eta i)^2 + \cdots. \end{aligned}$$

Dividiert man diese Gleichung durch $\xi + \eta i$, wobei aber ξ, η auch nur Wertsysteme der Linie σ beizulegen sind, mit Ausschlufs des Systems 0, 0, für welches jedes Glied die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmen würde, so kommt:

$$A_1 + A_2(\xi + \eta i) + \cdots = B_1 + B_2(\xi + \eta i) + \cdots,$$

also wiederum für $\xi = 0$, $\eta = 0$:

$$A_1 = B_1.$$

Fährt man in derselben Weise fort, so erhält man ferner:

$$A_2 = B_2, \ldots,$$

mithin wegen der (2'):

$$\varphi(a + bi + \xi + \eta i) = \psi(a + bi + \xi + \eta i) \qquad (\xi^2 + \eta^2 \leqq r^2),$$

so dafs mit aller Strenge, die nichts zu wünschen läfst, bereits bewiesen ist, dafs unsere beiden Funktionen nicht nur auf der Linie σ, sondern überall (also auch auf jeder anderen beliebigen Strecke) innerhalb des Kreises $r^2\pi$ und auch auf seiner Peripherie übereinstimmen. Damit dieser Kreis gleich seinen gröfstmöglichen Raum umfasse, kann man ihn mit einem solchen Radius r_0 beschreiben, dafs er den Flächenraum F berührt, aber nirgend überschreitet.

Durch Anwendung desselben Verfahrens auf eine neue, beliebige, an die Peripherie dieses Kreises verlegte Strecke σ_1 wird die Identität der beiden Funktionen für ein neues Stück des Flächenraumes F, den Kreis $r_1^2\pi$, dargethan. Und durch so oftmalige Wiederholung des Verfahrens, als es notwendig ist, ergibt sich durch Approximation schliefslich die Identität (1) der beiden Funktionen für den ganzen Raum F.

Der Beweis hat zur notwendigen Voraussetzung, dafs die beiden Funktionen nicht nur in einem Punkte oder in noch so vielen isolierten Punkten, sondern für eine Reihe sich stetig folgender Wertsysteme x, y miteinander übereinstimmen.

Ist überall in dem Beweise $\eta = 0$, so bezieht er sich auf den entsprechenden, oben erwähnten Satz aus den Elementen.

Mit Hülfe dieses Prinzips sind wir nun im stande, unmittelbar die Gültigkeit der Formel (2) des § 65 zu erweisen. Doch ehe wir dazu schreiten, schalten wir, um uns demnächst nicht nochmals unterbrechen zu müssen, in diese Präliminarien die folgenden allgemeinen Sätze ein[47]), die uns Kriterien an die Hand geben werden für die Beurteilung der Stetigkeit bestimmter Integrale in Bezug auf die in ihnen enthaltenen Parameter.

Stetigkeit bestimmter Integrale in Bezug auf ihre Parameter.

69. Stetigkeit des Integrals bei endlicher Entfernung der Grenzen. — Wenn in dem bestimmten Integral:

$$\int_a^b f(x, k)\, dx \tag{1}$$

die Grenzen a und b feste, in endlicher Entfernung voneinander liegende, konstante, also vom Parameter k unabhängige Zahlenwerte sind und $f(x, k)$ selbst eine stetige, überall endliche Funktion von k ist, dann ist das Integral (1) auch eine stetige Funktion von k.

Es ist nachzuweisen, dafs einer unendlich kleinen Änderung ∂k von k auch eine unendlich kleine Änderung des Integrals (1) entspricht.

Setzen wir die dem Zuwachs ∂k zugehörige, nach der Voraussetzung ebenfalls unendlich kleine Änderung der Funktion $f(x,k)$:

$$f(x, k + \partial k) - f(x, k) = \partial f(k, x),$$

so wird für den neuen Funktionalwert $f(x, k + \partial k)$ das Integral (1):

$$\int_a^b \big(f(x,k) + \partial f(k,x)\big)\,dx = \int_a^b f(x,k)\,dx + \int_a^b \partial f(k,x)\,dx,$$

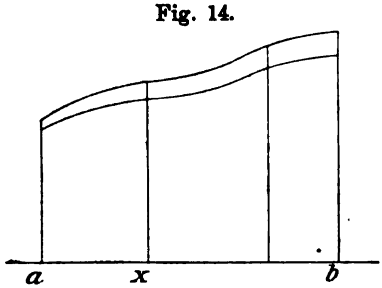
so daſs die Änderung, welche es erleidet, wenn der Parameter um ∂k zunimmt, durch das Integral:

$$\int_a^b \partial f(k,x)\,dx$$

ausgedrückt ist. Dasselbe ist aber, da die Integralfunktion $\partial f(k,x)$ überall unendlich klein und die Entfernung der Grenzen $b - a$ endlich ist, selbst unendlich klein.

Noch einfacher erhellt dies Resultat aus der geometrischen Anschauung. Für jeden Wert von k ist $f(x,k)$ eine ganz bestimmte Kurve (Fig. 14), von der man zu der benachbarten desselben Geschlechts übergeht, wenn man den Parameter unendlich wenig um ∂k ändert. Da aber $f(x,k)$ eine stetige Funktion von k ist, so beträgt ihre zugehörige Änderung für jeden Wert von x unendlich wenig, oder ist der Unterschied der beiden Ordinaten an jeder Stelle unendlich klein. Der den Unterschied der beiden Integrale darstellende, zwischen den beiden Kurven liegende, überall unendlich schmale Flächenraumstreifen muſs also bei seiner endlichen, von a bis b sich erstreckenden Länge ebenfalls unendlich klein sein.

Fig. 14.



Es ist ersichtlich, daſs zur exakten Erfüllung vorstehenden Satzes diese endliche Entfernung der Integrationsgrenzen wesentliche Bedingung ist. Denn bei unendlicher Länge könnte jener Streifen trotz seiner durchweg unendlichen Schmalheit wenigstens an gewissen privilegierten Stellen endlich oder sogar unendlich werden, und dann kann es sich ereignen, daſs das Integral nicht stetig ist, selbst wenn es die Integralfunktion wäre.

In diesem Falle, sowie bei etwaiger Unstetigkeit der Funktion, wo der Nachweis der Stetigkeit des Integrals sich bisweilen schwieriger gestaltet, bedient man sich des folgenden Kriteriums.

70. Stetigkeit des Integrals bei unendlicher Entfernung der Grenzen oder bei einer Unstetigkeit der Funktion. — Soll von einem Integral von unendlicher Ausdehnung, oder dessen Funktion an irgend einer Stelle unendlich grofs wird (so dafs daselbst von einem festen oder unendlich kleinen Zuwachs der hier bis ins Unendliche reichenden Ordinate nicht die Rede sein kann), die Stetigkeit in Bezug auf einen Parameter untersucht werden, so wendet man den Kunstgriff oder, da dies Wort fast zu viel besagt, das Verfahren an, dafs man das Integral in zwei Teilintegrale zerlegt, von denen das eine endliche Ausdehnung und eine überall endliche und stetige Funktion aufweist, und das mithin in Gemäfsheit des vorigen Satzes selbst eine stetige Funktion des Parameters ist. Dann mufs das andere Teilintegral notwendig von unendlicher Ausdehnung, oder seine Funktion an gewissen Stellen unendlich grofs sein.

Läfst sich nun zeigen, dafs dieses Teilintegral für jeden Wert des Parameters kleiner gemacht werden kann als jede beliebige noch so kleine Gröfse, dann ist die Stetigkeit des gegebenen Integrals vollkommen erwiesen. Denn falls dasselbe im Unendlichen oder an irgend einer Stelle unstetig wäre, so hiefse das, es müfste an dieser Stelle irgend einen endlichen oder unendlichen Sprung machen, und zwar, da derselbe in dem ersten, stetigen Teilintegral nicht liegen kann, in dem zweiten Teilintegral. Dieses aber kann an jeder Stelle unendlich klein, also kleiner gemacht werden als jener Sprung an der Unstetigkeitsstelle. Das wäre ein Widerspruch und ein Beweis für die Stetigkeit des Integrals.

Häufig ist es bei dieser Untersuchung auch erforderlich, das Integral in drei oder noch mehr Teilintegrale zu zerlegen.

Übrigens findet dieses Prinzip nicht blofs auf Integrale, sondern auch auf Funktionen, deren Stetigkeit dargethan werden soll, überhaupt Anwendung.

Zweites Kapitel.

Die Formel $\int\limits_0^\infty e^{-(k+\theta i)x} x^{a-1} dx = \Gamma(a)\cdot(k+\theta i)^{-a}$ $(k>0)$ und ihre speciellen Fälle.

71. Beweis der Formel. — Um die Gültigkeit der Formel:

$$(1) \qquad \int\limits_0^\infty e^{-(k+\theta i)x} x^{a-1} dx = \Gamma(a)\cdot(k+\theta i)^{-a} \qquad (k>0)$$

für beliebige reelle Werte von θ, aber nur positive Werte von k zu erweisen, ist es nach Anleitung der Sätze des vorangehenden Kapitels erforderlich, darzuthun, dafs die auf ihren beiden Seiten befindlichen Ausdrücke:

$$(2) \qquad \int\limits_0^\infty e^{-(k+\theta i)x} x^{a-1} dx$$

und

$$(3) \qquad \Gamma(a)\cdot(k+\theta i)^{-a},$$

als Funktionen des imaginären, flüssigen Argumentes $k+\theta i$ aufgefafst, in dem ganzen Umfange der für die beiden Variablen k, θ zugelassenen reellen Werte durchaus stetig veränderlich, überall endlich und eindeutig, und aufserdem auf irgend einer innerhalb dieser Ausdehnung gelegenen Strecke identisch sind.

Was zunächst die imaginäre Potenz $(k+\theta i)^{-a}$ betrifft, in der das rationale oder irrationale positive a die Stelle eines ihm gleichen oder doch beliebig angenäherten irreduktiblen Bruches $\frac{m}{n}$ vertritt (36)[48], so besitzt sie gemäfs § 67 die n Wurzeln:

$$(k+\theta i)^{-a} = \left|(k^2+\theta^2)^{-\frac{a}{2}}\right| \cdot e^{-a\varphi_0 i} e^{-a\cdot 2s\pi i}$$
$$(s = 0, 1, 2, \ldots n-1),$$

die wegen der Beschränkung von k auf positive Werte, und wenn der Winkel φ_0 durch die Gleichungen:

$$\cos\varphi_0 = \frac{k}{\varrho}, \quad \sin\varphi_0 = \frac{\theta}{\varrho} \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq \varphi_0 \leqq \frac{\pi}{2};\ \varrho = |\sqrt{k^2+\theta^2}|\right)$$

eindeutig bestimmt ist, sämtlich die Bedingungen der Stetigkeit und Einwertigkeit erfüllen. Dasselbe gilt, da der Faktor $\Gamma(a)$

als rein numerische Konstante nicht in Betracht kommt, von dem ganzen Ausdruck (3), so dafs dieser Punkt des Beweises erledigt ist.

Natürlich kann aber nur eine von diesen n Wurzeln gültig sein, d. h. den einzigen festbestimmten Wert ausdrücken, den, wie schon in § 65 (S. 128) bemerkt, das Integral (2) besitzt. Es ist dies, wie sich weiter unten herausstellen wird, die dem Werte $s=0$, für welchen der Faktor $e^{-a\cdot 2s\pi i}$ sich auf 1 reduciert, zugehörige Wurzel:

$$(4') \qquad (k+\theta i)^{-a} = \left|(k^2+\theta^2)^{-\frac{a}{2}}\right| \cdot e^{-a\varphi_0 i},$$

der man noch folgende einfachere Gestalt geben kann. Da es stets nur ein einziges und völlig bestimmtes, den obigen Bedingungsgleichungen genügendes φ_0 gibt, das, weil $\cos\varphi_0$ immer positiv ist, im ersten positiven oder ersten negativen Quadranten liegt, je nachdem $\theta \gtrless 0$ ist, so reicht es, indem man dadurch nicht ungenau werden kann, aus, φ_0 durch eine einzige trigonometrische Funktion, am füglichsten durch die Tangente zu bestimmen und demgemäfs ohne noch weitere Definitionsbedingungen

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{\theta}{k}, \quad \varphi_0 = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{\theta}{k} \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq \varphi_0 \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

zu setzen. Man erhält alsdann für die betreffende Wurzel, je nachdem der Exponent a oder $-a$ ist, den Ausdruck:

$$(4) \qquad (k+\theta i)^{\pm a} = \left|(k^2+\theta^2)^{\pm\frac{a}{2}}\right| \cdot e^{\pm ia\cdot \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{\theta}{k}} \qquad (k>0).$$

Wir werden noch häufig solchen imaginären Potenzen für ein nur positives k begegnen und dann immer darunter diese Wurzel verstehen.

Indem wir jetzt in dem Beweise weiter gehen, legen wir in der vorstehenden Formel θ den speciellen Wert 0 bei, für welchen die Exponentialgröfse gleich 1 wird, mithin die Potenz $(k+\theta i)^{-a}$ für jedes beliebige positive k sich auf

$$|k^{-a}|$$

reduciert. Und da für denselben Wert $\theta=0$ das Integral (2) direkt in $\int\limits_0^\infty e^{-kx}x^{a-1}\,dx$ übergeht, so folgt mit Rücksicht auf die thatsächlich bestehende Gleichung (57):

$$\int_0^\infty e^{-kx}\, x^{a-1}\, dx = \Gamma(a) \cdot |k^{-a}| \qquad (k > 0),$$

dafs die Werte, welche die Funktionen (2) und (3) für den speciellen Fall $\theta = 0$ annehmen, einander gleich sind, dafs also, wenn man in der unendlichen Ebene die rechtwinkligen Achsen der k und der θ konstruiert, auf einer gewissen Strecke, nämlich auf der ganzen positiven Achse der k, Identität zwischen diesen beiden Funktionen von $k + \theta i$ stattfindet. Daraus folgt dann in Gemäfsheit des in § 68 entwickelten Prinzips unter der Voraussetzung, dafs auch das Integral (2) eine stetige Funktion von $k + \theta i$ ist, die Identität der beiden Funktionen (2) und (3) oder die Gültigkeit der Gleichheit (1) in der ganzen unendlichen Ebene auf der Seite der positiven k.

Es ist aber wohl zu beachten, dafs sich obige Koinzidenz für $\theta = 0$ nur einstellt, wenn in der erst supponierten Gleichung (1), die für jeden beliebigen reellen Wert von θ einschliefslich des Wertes Null statthaben soll, die auf der rechten Seite befindliche Funktion (3) für diesen speciellen Fall sich auf $\Gamma(a) \cdot |k^{-a}|$ reduciert. Dies geschieht aber einzig für die dem Werte $s = 0$ entsprechende Wurzel, für welchen allein der Faktor $e^{-a \cdot 2s\pi i}$ gleich 1 wird, während er für alle anderen Werte von s von 1 verschieden ist. Es ist uns daher nicht freigestellt, eine beliebige der n Wurzeln der Potenz $(k + \theta i)^{-a}$ herauszugreifen, sondern wir sind gezwungen, die Wurzel (4′) zu wählen, die also allein der Aufgabe Genüge leistet.

Wir kommen nun zu dem noch ausstehenden Teil des Beweises, dafs auch das Integral (2) eine stetige, eindeutige Funktion von $k + \theta i$ ist.

Seine Einwertigkeit ist uns schon aus § 65 bekannt, erhellt aber auch daraus, dafs k und θ nur in einer Exponentialgröfse auftreten, die ihrer Natur nach als direkte Funktion stets eindeutig ist.

Zum Nachweise seiner Stetigkeit zerlegen wir das Integral in die Summe seines reellen und seines imaginären Bestandteiles. Da diese sich nur durch die trigonometrische Funktion voneinander unterscheiden, so können wir uns auf die Betrachtung des einen, z. B. des reellen Teiles:

$$(5) \qquad \int_0^\infty e^{-kx} \cos\theta x \cdot x^{a-1}\, dx$$

beschränken.

Zunächst prüfen wir dies Integral in Bezug auf seine von θ abhängige Stetigkeit, indem wir unterdes k als konstant ansehen, und setzen dabei fürs erste $a > 1$ voraus, damit es nicht wegen des Faktors $\frac{1}{x^{1-a}}$ an der unteren Grenze unendlich grofs werde. Denn wenn auch dadurch die Existenz des Integrals nicht gefährdet würde (da $0 < a < 1$), so besäfse es doch alsdann neben seiner unendlichen Ausdehnung auch eine unendlich grofse Ordinate, und das soll vorderhand vermieden werden.

Gemäfs dem im vorangehenden Paragraphen angegebenen Verfahren setzen wir:

$$\int_0^\infty e^{-kx} \cos\theta x \cdot x^{a-1}\,dx = \int_0^p (\ )\,dx + \int_p^\infty (\ )\,dx,$$

wo p einen positiven ganz beliebigen und beliebig grofsen, aber von vornherein fixierten endlichen Wert bezeichnet. Dann ist immer, so grofs auch p sei, das von 0 bis p erstreckte Integral von endlicher Ausdehnung und, da seine Funktion durchaus endlich und stetig nach θ ist, selbst stetig in Bezug auf diese Variable (69). Was aber das zweite Teilintegral anbetrifft, so ist in Anbetracht, dafs $\cos\theta x$ immer zwischen $+1$ und -1 hin und her geht, jedenfalls, was auch θ sein mag, sein numerischer Wert:

$$\left|\int_p^\infty e^{-kx} \cos\theta x \cdot x^{a-1}\,dx\right| \leqq \int_p^\infty e^{-kx} x^{a-1}\,dx.$$

Dies letztere Integral wird aber bekanntlich für ein hinlänglich grofses p beliebig klein, weil, wie schon öfters bemerkt, e^{-kx} ohne Vergleich schneller abnimmt, als x^{a-1} wächst. Wählt man also gleich von vornherein p grofs genug, so kann man das zweite Teilintegral für jeden Wert von θ trotz seiner unendlichen Ausdehnung so klein machen, als man nur will. Mithin (70) kann das Integral (5) nicht unstetig sein in Bezug auf θ.

Ebenso würde man, während alsdann θ festgehalten wird, seine von k abhängige Stetigkeit beweisen.

Wäre aber $0 < a < 1$, so müfste man das Integral (5) in drei Teilintegrale zerlegen (70), nämlich oben, wie vorher, ein sehr grofses p und unten ein so kleines ε als Zwischengrenzen einschalten, dafs dieses untere Teilintegral von 0 bis ε ebenfalls so klein wird, als man nur immer will (43).

Also ist das Integral (5) und gleicherweise das ganze Integral (2) durchaus stetig in Bezug auf $k + \theta i$, und damit auch das letzte Erfordernis zur Gültigkeit der Gleichung (1) erfüllt.

72. Die beiden Teile des Integrals. — Die im vorigen Paragraphen mit der allergröfsten Strenge bewiesene Formel enthält eine aufserordentliche Fülle neuer Resultate.

Zuerst entspringen aus ihr durch Isolierung des reellen und imaginären Teils die beiden Gleichungen:

$$(1)\quad \begin{cases} \int\limits_0^\infty e^{-kx}\cos\theta x\cdot x^{a-1}\,dx = \dfrac{\Gamma(a)}{\left|(k^2+\theta^2)^{\frac{a}{2}}\right|}\cdot\cos\left(a\cdot\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\theta}{k}\right), \\ \int\limits_0^\infty e^{-kx}\sin\theta x\cdot x^{a-1}\,dx = \dfrac{\Gamma(a)}{\left|(k^2+\theta^2)^{\frac{a}{2}}\right|}\cdot\sin\left(a\cdot\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\theta}{k}\right) \end{cases}$$

$$(k > 0).$$

Es sind aber wohl die Beschränkungen zu beachten, unter denen die Grundformel abgeleitet ist. Während θ ganz beliebige Werte haben darf, mufs k notwendig und wesentlich positiv sein, darf also auch nicht gleich Null gesetzt werden. Denn dieser Parameter datiert aus der Formel $\int\limits_0^\infty e^{-kx}x^{a-1}\,dx = \frac{\Gamma(a)}{k^a}$, welche für $k = 0$ auf das Integral $\int\limits_0^\infty x^{a-1}\,dx$ und zu der nichtssagenden Identität $\infty = \infty$ führt und schon ihrer Abstammung nach, als aus der Substitution $x = ky$ hervorgegangen, die dann gar nicht vorhanden oder möglich wäre, diesen speciellen Wert nicht verträgt.

Mit den Formeln (1) jedoch verhält es sich anders. Zunächst ist klar, dafs die Integrale:

$$(2)\qquad \int\limits_0^\infty \frac{\cos\theta x}{x^{1-a}}\,dx,\qquad \int\limits_0^\infty \frac{\sin\theta x}{x^{1-a}}\,dx \qquad (0 < a < 1),$$

welche man auf ihrer linken Seite gewinnt, wenn man $k = 0$ setzt und sich auf unter 1 liegende Werte von a beschränkt, in Gemäfsheit des in § 47 entwickelten Kriteriums einen Sinn behalten und bestimmte endliche Werte ausdrücken, da ja die mit dem Faktor sinus oder cosinus behaftete Funktion $\frac{1}{x^{1-a}}$ mit wachsendem x bis zu Null abnimmt. Nur der specielle Fall $\theta = 0$ ist auszuschliefsen, weil dann der trigonometrische Faktor wegfiele, auf dessen Vorhandensein gerade die Existenz der vorstehenden Integrale beruht. Es ergäbe sich dann nur $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^{1-a}} = \infty$, bezw. $\int\limits_0^\infty 0 \cdot dx = 0$. Dafs aber in den Integralen (2) $a < 1$ sein mufs, ist einleuchtend. Denn für $a > 1$ hätte man, was auch θ sei, unter dem Integralzeichen die mit x zugleich wachsende Funktion x^{a-1}. Wenigstens würde dieselbe an unendlich vielen Stellen, wo $|\cos\theta x|$ oder $|\sin\theta x|$ gerade gleich 1 ist, immer gröfser und vertrüge daher, obwohl sie unausgesetzt vom Positiven ins Negative übergeht, kein Integral von unendlicher Ausdehnung: gerade wie eine unendliche Reihe, deren Glieder zwar abwechselnd positiv und negativ sind, aber, anstatt abzunehmen, immerfort wachsen, nicht konvergiert. Überhaupt wäre diesen Integralen mit ihren zu beiden Seiten der Abscissenachse in immer engeren und höher gehenden Windungen verlaufenden Flächenräumen gar kein Sinn beizumessen.

Ob aber selbst unter diesen Beschränkungen auch die Gleichungen (1) für $k = 0$ noch Gültigkeit haben, oder ob die Integrale (2) den Wert repräsentieren, welchen die Ausdrücke auf der rechten Seite der (1) für $k = 0$ annehmen, ist damit noch nicht erwiesen und eine andere Frage. Denn wenn eine Gleichung für eine in ihr enthaltene Gröfse nur bis zu einem gewissen Grenzwert statthat, so ereignet es sich ebenso häufig, dafs sie für diesen Grenzwert selbst auch noch gilt, wie das Gegenteil zutreffen kann. Die Frage ist aber für unsere Gleichungen (1) in der That zu bejahen, denn es läfst sich ganz einfach zeigen, dafs für ein beliebiges, aber festes θ ihre beiden Seiten, solange k positiv ist, stetige Funktionen in Bezug auf k sind, bis $k = 0$ einschliefslich. Dann folgt aus dieser Stetigkeit bis $k = 0$ incl. und aus der Gleichheit der Ausdrücke bis $k = 0$ excl. auch ihre Gleichheit für $k = 0$. Mit anderen Worten, während man schon weifs, dafs die Gleichungen für ein wesentlich positives, also auch ein immer kleiner werdendes k bestehen, hat man nur darzuthun, dafs die Integrale links — von den Ausdrücken rechts als von endlichen Funktionen versteht sich die Stetigkeit bis $k = 0$ incl. ganz von selbst — für ein bis ins Unendliche abnehmendes k genau in denjenigen Wert übergehen, den sie annehmen würden, wenn man direkt in ihnen $k = 0$ setzte. Denn dadurch wird erwiesen, daſs für einen unendlich wenig von Null verschiedenen Wert des Argumentes k auch seine Funktion nur eine unendlich kleine Änderung erleidet, also bis $k = 0$ incl. stetig ist.

Zur Entscheidung in dieser Frage gibt es einen allgemeinen Satz, den wir im folgenden Paragraphen behandeln wollen.

73. Das Integral

$$\int_0^\infty e^{-kx} \cdot \varphi(x)\, dx \qquad (k > 0) \tag{1}$$

für den Grenzwert $k = 0$. — „Wenn das bestimmte Integral (1) trotz seiner unendlichen Ausdehnung einen Sinn besitzt und stetig ist in Bezug auf den Parameter k bis zu $k = 0$ hin, so geht es unter der Voraussetzung, daſs auch von dem für $k = 0$ aus der (1) entspringenden Integral:

$$\int_0^\infty \varphi(x)\, dx \tag{2}$$

die Rede sein kann, für ein bis zu Null abnehmendes k stets in den endlichen, festbestimmten Wert über, den das Integral (2) ausdrückt."

Zum Verständnis des Satzes ist im Anschluſs an eine bereits im vorigen Paragraphen gemachte Bemerkung hervorzuheben, daſs das Integral (1) keineswegs immer für $\lim k = 0$ einen festbestimmten Wert anzunehmen braucht, sondern auch unendlich oder unbestimmt werden kann. So drückt z. B. das Integral $\int_0^\infty e^{-kx} \cdot x\,dx$, welches durch auf den Faktor e^{-kx} angewandte teilweise Integration ausgemittelt wird, für $k > 0$ den endlichen Wert $\frac{1}{k^2}$ aus, gibt aber für $k = 0$: $\int_0^\infty x\,dx = \infty$. Und was die im übrigen ganz beliebige Funktion $\varphi(x)$ anbetrifft, so muſs sie, obwohl das Integral (1) zu seiner Endlichkeit nur erforderte, daſs sie mit wachsendem x nicht so stark zunehme, um das Abnehmen der Exponentialgröſse zu destruieren, gleichwohl, wie ebenfalls aus obigem Beispiel erhellt, im Unendlichen immer kleiner werden, weil sonst das unendlich ausgedehnte Integral (2) sinnlos werden würde.

Zum Beweise des Satzes wenden wir teilweise Integration auf den Faktor $\varphi(x)$ an. Der Kürze halber setzen wir:

$$\int_0^x \varphi(x)\,dx = f(x), \text{ also } \varphi(x) = f'(x).$$

Dann wird $f(x)$, das selbstredend eine ganz bestimmte und natürlich stetige Funktion von x sein muſs, für $x = 0$ selbst zu Null, während es für $x = \infty$ nichts anderes ist als das nach der Voraussetzung gleichfalls einen endlichen und bestimmten Wert repräsentierende Integral (2). Man hat demnach:

$$f(0) = 0; \quad f(\infty) = \int_0^\infty \varphi(x)\,dx.$$

Die teilweise Integration ergibt nun:

$$\int_0^\infty e^{-kx}\varphi(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-kx}f'(x)\,dx = [e^{-kx}f(x)]_0^\infty + k\int_0^\infty f(x)\cdot e^{-kx}\,dx,$$

oder mit Rücksicht darauf, daſs das geschlossene Glied für beide Grenzen ausfällt, einfach die Relation:

$$\int_0^\infty e^{-kx}\,\varphi(x)\,dx = k\int_0^\infty f(x)\,e^{-kx}\,dx \qquad (k > 0),$$

unbedingt gültig, solange k nicht gleich Null ist.

Es kommt aber nun darauf an, zu zeigen, daſs für ein bis zu Null abnehmendes k der Ausdruck auf der rechten Seite *pure* $f(\infty)$ wird, oder das Integral (2) zur Grenze hat. Dazu ist jedoch seine Form noch unangemessen, weil mit abnehmendem k der Faktor k schlieſslich gleich Null, der andere Faktor aber, das Integral, gröſser und gröſser wird, da alsdann für wachsende Werte von x die Exponentialgröſse mit überall numerisch kleinerem Exponenten immer langsamer abnimmt.

Aus diesem Grunde zerlege man das Integral in zwei Teilintegrale, von 0 bis m und von m bis ∞, wo das positive m eine das Resultat nicht beeinflussende Hülfsgröſse ist, die man an sich ganz willkürlich und beliebig klein oder beliebig groſs wählen kann, die sich aber für unseren Zweck mit abnehmendem k ebenfalls in ganz bestimmter Weise wird ändern müssen, und da ist es eben die Hauptsache, zu erkennen, wie diese Änderung beschaffen sein muſs.

Wir setzen also zunächst für ein noch unbestimmt gelassenes, aber konstantes m:

$$\int_0^\infty e^{-kx}\,\varphi(x)\,dx = k\int_0^m f(x)\cdot e^{-kx}\,dx + k\int_m^\infty f(x)\cdot e^{-kx}\,dx$$

und wenden nun auf beide Teilintegrale, die einen immer positiven Faktor e^{-kx} enthalten, den so ergiebigen Mittelwertsatz an (15). Wir gewinnen dadurch, da $\int ke^{-kx}dx = -e^{-kx} + C$ ist, die Relation:

$$(3)\qquad \int_0^\infty e^{-kx}\,\varphi(x)\,dx = (1 - e^{-km})\cdot f(m\varepsilon) + e^{-km}\cdot f(m+p)$$
$$(0 \leqq \varepsilon \leqq 1),$$

wo p eine gewisse, obschon unbekannte positive Gröfse bezeichnen soll.

Obgleich hier die Summe der beiden Faktoren von f gleich 1 ist, wie es auch entsprechend dem Werte $\int_0^\infty ke^{-kx}dx = 1$ der Fall sein mufs, so hätte die Anwendung desselben Theorems auf das ungeteilte Integral doch nichts Benutzbares, sondern nur $f(\infty\cdot\varepsilon)$ ergeben, was lediglich besagt, dafs das Integral (1) einen Mittelwert der Funktion $f(x)$ zwischen den extremen Werten ihres Argumentes annimmt, uns aber denselben nicht kennen lehrt.

Aber auch betreffs der (3) mufs unser Bestreben auf die Beseitigung der in ihr enthaltenen unbekannten Mittelwerte gerichtet sein. Dazu dient, indem wir sie in geeigneter Weise sich ändern lassen, die Hülfsgröfse m. Das erste Glied auf der rechten Seite mufs jedenfalls gleich Null werden, weil sonst der unbestimmte Wert $f(m\varepsilon)$ bestehen bliebe. Da das Glied die Form eines Produktes hat, so verschwindet es gleichzeitig mit einem beliebigen seiner beiden Faktoren. Der Faktor $f(m\varepsilon)$ wird zu Null, wenn m bis Null abnähme. Dies darf aber nicht geschehen, weil sonst im zweiten Gliede der unbestimmte Wert $f(p)$ bestehen bliebe. Der andere Faktor wird zu Null, wenn e^{-mk} gleich 1 wird, oder der Exponent mk mit abnehmendem k gegen Null konvergiert. Dies träte zwar selbstverständlich für ein mit k zugleich abnehmendes m ein, was aber, wie eben bemerkt, nicht zum Ziele führen würde. Auch wenn m konstant bliebe, würde zwar mk Null zur Grenze haben, aber das unbestimmte $f(m+p)$ im zweiten Gliede nicht verschwinden. Nur wenn m bis ins Unendliche wüchse, würde dieser Faktor schliefslich in $f(\infty)$ oder in den festen endlichen Wert (2) übergehen. Daher müssen wir, um zwar nicht falsche, aber doch nichtssagende Resultate zu vermeiden, wenn es möglich ist, m so wählen, dafs es die letztere Bedingung erfüllt, aber trotzdem mk mit gleichzeitig abnehmendem k gegen Null konvergiert. In der That erreichen wir dies, wenn wir z. B. $m = \frac{1}{\sqrt{k}}$, also $mk = \sqrt{k}$ setzen; aber auch für jeden beliebigen anderen Wert von m, der sich in den Schranken dieser Bedingung hielte, nähert sich km immer, wenn auch langsamer, zugleich mit k unaufhörlich der Null, und verschwindet, da alsdann $\lim\limits_{km=0} e^{-km} = 1$, also $\lim\limits_{km=0} (1 - e^{-km}) = 0$ und f überall endlich ist, das ganze erste Glied auf der rechten Seite der (3), während ihr zweites Glied sich auf

$$\lim_{m=\infty} f(m+p) = f(\infty) = \int_0^\infty \varphi(x)\,dx$$

reduciert.

Das Resultat ist demnach:

$$\lim_{k=0} \int_0^\infty e^{-kx}\varphi(x)\,dx = \int_0^\infty \varphi(x)\,dx$$

und besagt, dafs das Integral links bis $k = 0$ incl. stetig ist und für ein bis Null hin abnehmendes k das aus ihm für $k = 0$ sich direkt ergebende Integral rechts zur Grenze hat.

Einer so eingehenden Behandlung sind derartige Fragen zu unterziehen, will man nicht oberflächlich erscheinen. Dann erkennt man aber auch immer auf den ersten Blick, wie es sich mit den in Rede stehenden Integralen verhält.

Anmerkung. — In dem vorstehend bewiesenen Prinzip tritt von neuem die zwischen den bestimmten Integralen und den unendlichen Reihen bestehende Analogie klar zu Tage, indem es auch für diese folgenden ganz ähnlichen, zuerst von Abel in seiner Untersuchung über die binomische Reihe gründlich bewiesenen, hübschen Satz gibt:

„Wenn eine nach Potenzen von x geordnete unendliche Reihe nicht in dem ganzen Umfange aller möglichen Werte von x, sondern nur innerhalb gewisser Grenzen oder bis zu einem gewissen Grenzwerte hin konvergent ist, darüber hinaus aber divergiert, so kann sie an der Grenzstelle selbst entweder auch noch konvergent, oder aber divergent oder unbestimmt sein. Im ersteren Falle drückt sie dann auch für diesen Wert noch die ihr identische stetige und endliche Funktion aus, im zweiten Falle aber repräsentiert sie für jenen Wert die geschlossene Funktion nicht mehr."

So gilt z. B. die Gleichung:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \text{etc.} = \log(1+x)$$

in dem ganzen Umfange

$$0 \leqq x \leqq 1,$$

weil die Reihe nicht blofs, solange x ein positiver echter Bruch ist, sondern auch noch an der oberen Grenze $x = 1$ konvergiert und daher hier dieselbe endliche Funktion darstellt. D. h. es ist auch:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \text{etc.} = \log 2.$$

Hingegen gilt die Gleichung:

$$1 - x + x^2 - x^3 + - \text{etc.} = \frac{1}{1+x}$$

nur für den Umfang:

$$0 \leqq x < 1,$$

weil die Reihe für $x = 1$ nicht mehr konvergiert, sondern unbestimmt, nämlich gleich 0 oder 1 ist, je nachdem die unendliche Anzahl ihrer Glieder gerade oder ungerade ist. An dieser Grenze kann sie daher auch nicht mehr den zugehörigen Wert $\frac{1}{2}$ der endlichen Funktion $\frac{1}{1+x}$ repräsentieren.

74. Der Grenzfall $k = 0$ in den Formeln des § 72. — Da alle in dem vorstehenden Prinzip geforderten Bedingungen durch die auf der linken Seite der Formeln (1) des § 72 befindlichen Integrale unter den daselbst aufgestellten Beschränkungen erfüllt werden und auch für die Ausdrücke auf ihrer rechten Seite die Stetigkeit bis $k = 0$ incl. aufser Frage steht, so folgt, dafs diese Formeln auch noch für $k = 0$, d. h. für die Integrale (2), Gültigkeit besitzen. Die Ausdrücke rechts nehmen aber alsdann — ein öfters sich darbietendes Phänomen — je nachdem der Parameter θ positiv oder negativ ist, ein verschiedenes Aussehen an.

Was zunächst die Potenz $\left|(k^2 + \theta^2)^{\frac{a}{2}}\right|$ betrifft, so reduciert sie sich auf $\left|(\theta^2)^{\frac{a}{2}}\right|$, d. i., um auch für ein negatives θ den absoluten reellen Wert auszudrücken, auf $|\theta|^{a}$ [49]. Ferner hat man $\lim_{k=0} \operatorname{arc\,tg} \frac{\theta}{k} = \pm \frac{\pi}{2}$, je nachdem $\theta \gtrless 0$ ist. Dieser doppelte Wert tritt aber nur in der zweiten Formel hervor, welche die sinus-Funktion enthält, während die erste Formel, welche den cosinus enthält, auf beiden Seiten von ihm unbeeinflufst bleibt.

Man hat demnach die beiden Gleichungen:

$$(1)\left\{\begin{aligned} \int_0^\infty \cos\theta x \cdot x^{a-1}\,dx &= \frac{\Gamma(a)}{|\theta|^a}\cos\frac{a\pi}{2}, \\ \int_0^\infty \sin\theta x \cdot x^{a-1}\,dx &= \pm\frac{\Gamma(a)}{|\theta|^a}\sin\frac{a\pi}{2} \qquad (\theta \gtrless 0) \end{aligned}\right\} \quad (0 < a < 1).$$

Selbstverständlich ist aus denselben Gründen und unter Aufrechterhaltung derselben Beschränkungen auch die allgemeine Formel (1) des § 71, aus deren Auseinanderlegung die beiden anderen Formeln entstanden sind, für $k = 0$ gültig, so dafs man mit Berücksichtigung der (4) ebendaselbst zu der Gleichung gelangt:

$$(2') \qquad \int_0^\infty e^{-\theta x i} x^{a-1}\,dx = \frac{\Gamma(a)}{|\theta|^a} \cdot e^{\mp a\frac{\pi}{2}i} \qquad (\theta \gtrless 0;\ 0 < a < 1).$$

Da θ ebensogut negativ wie positiv sein kann, so gibt man dieser Gleichung noch dadurch, dafs man i an Stelle von $-i$ setzt, die gefälligere Gestalt:

$$(2) \qquad \int_0^\infty e^{-\theta x i} x^{a-1}\,dx = \frac{\Gamma(a)}{|\theta|^a} \cdot e^{\pm a\frac{\pi}{2}i} \qquad (\theta \gtrless 0;\ 0 < a < 1).$$

Natürlich würde man die Gleichungen (2) und (2') auch durch Addition der beiden Gleichungen (1) gewinnen, wenn man zuvor die letztere derselben mit i bezw. $-i$ multiplicierte.

75. Der specielle Wert $a = \frac{1}{2}$. — Unter allen Gammas, deren Argumente echte Brüche sind, ist nur eins, nämlich $\Gamma(\frac{1}{2}) = |\sqrt{\pi}|$ [61, (3)], in endlicher Form bekannt. Setzt man daher in den drei wichtigen Formeln des vorigen Paragraphen $a = \frac{1}{2}$, so erhält man für wiederum äufserst wichtige Integrale rein endliche Ausdrücke. Es ist aber in den vorstehenden Formeln reiner Luxus,

θ mit beiden Zeichen zu belassen, da man ja weifs oder sofort ersieht, was für eine Änderung vorgeht, wenn θ sein Zeichen wechselt. Deshalb beschränken wir uns für die folgenden Specialisierungen auf ein positives θ und gewinnen dann, wenn wir noch für $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$ seinen Wert $\left|\sqrt{\frac{1}{2}}\right|$ einsetzen, die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\infty \cos\theta x \cdot x^{\frac{1}{2}-1}\,dx &= \left|\sqrt{\frac{\pi}{2\theta}}\right|, \\ \int_0^\infty \sin\theta x \cdot x^{\frac{1}{2}-1}\,dx &= \left|\sqrt{\frac{\pi}{2\theta}}\right|, \\ \int_0^\infty e^{\theta x i} \cdot x^{\frac{1}{2}-1}\,dx &= \left|\sqrt{\frac{\pi}{\theta}}\right| e^{\frac{\pi}{4}i} \end{aligned}\right\} \qquad (\theta > 0).$$

Statt $e^{\frac{\pi}{4}i}$ könnte man in der letzten Formel auch $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot (1+i)$ schreiben, was aber keinen Vorteil verschaffte.

Für $\theta < 0$ hätte man in diesen Formeln unter der Wurzel überall $|\theta|$ statt θ zu schreiben [50]). Im übrigen bliebe die erste Formel ungeändert, in der zweiten müfste rechts das entgegengesetzte Zeichen, und ebenso in der dritten rechts $-i$ statt i genommen werden.

Wir transformieren jetzt diese Integrale vermittelst der Substitution $x = y^2$, also $x^{\frac{1}{2}-1}\,dx = 2\,dy$, wo natürlich wie in den Integralen selbst unter $x^{\frac{1}{2}}$ die absolute reelle Wurzel zu verstehen ist. Durch diese Substitution werden die drei Integralfunktionen in **gerade Funktionen** umgewandelt, so dafs unter Berücksichtigung der für diese charakteristischen Eigenschaft (14) die Formeln entspringen:

$$\left.\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \cos\theta x^2\,dx &= \left|\sqrt{\frac{\pi}{2\theta}}\right|, \\ \int_{-\infty}^\infty \sin\theta x^2\,dx &= \left|\sqrt{\frac{\pi}{2\theta}}\right|, \\ \int_{-\infty}^\infty e^{\theta x^2 i}\,dx &= \left|\sqrt{\frac{\pi}{\theta}}\right| \cdot e^{\frac{\pi}{4}i} \end{aligned}\right\} \qquad (\theta > 0),$$

und speciell für $\theta = 1$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x^2)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2)\,dx = \left|\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right|,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2 i} \cdot dx = |\sqrt{\pi}| \cdot e^{\frac{\pi}{4} i} = \left|\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right| \cdot (1 + i) = |\sqrt{\pi i}|.$$

Die vorletzte dieser Formeln lehrt uns den Wert des schon mehrfach betrachteten Integrals (46; 48):

$$\int_0^{\infty} \cos(x^2) \cdot dx = \frac{1}{2}\left|\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right|$$

kennen.

Alle diese bedeutenden Integrale sind schon von Euler detailliert worden.

76. Einführung eines zweiten Parameters. — Behufs Einführung eines zweiten Parameters in die drei letzten Formeln transformiere man dieselben vermittelst der linearen Substitution:

$$x = y + l, \quad \text{also} \quad \theta x^2 = \theta y^2 + 2 l \theta y + \theta l^2.$$

Es wäre unnütz, der neuen Variablen noch einen konstanten Faktor hinzuzufügen, der doch mit θ verschmelzen würde. Die Konstante l kann ganz beliebig gewählt werden, mufs aber natürlich reell sein, weil bis jetzt nur von solchen Integralen die Rede ist, in denen die Funktion eine Reihe reeller Werte zu durchlaufen hat, und jede Transformation so beschaffen sein mufs, dafs die neue und die ursprüngliche Reihe von Werten, abgesehen von ihrer Ordnung, einander entsprechen.

Wir beschränken uns auf die Transformation der dritten Formel, aus der wir alsdann die beiden anderen, in ihr enthaltenen ableiten werden.

Da die Grenzen, weil sie unendlich sind, unverändert bleiben, so erhält man durch obige Substitution die Gleichung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\theta x^2 + 2 l \theta x) i} \cdot dx = \left|\sqrt{\frac{\pi}{\theta}}\right| \cdot e^{\left(\frac{\pi}{4} - \theta l^2\right) i} \qquad (\theta > 0),$$

oder, wenn man, um auch im zweiten Gliede des Exponenten eine beliebige, durch einen einfachen Buchstaben bezeichnete Konstante zu haben, noch $2\theta l = \eta$ setzt, wo η, weil l es ist, beliebig reell, positiv oder negativ, sein kann:

(1) $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\theta x^2 + \eta x) i}\, dx = \left|\sqrt{\frac{\pi}{\theta}}\right| \cdot e^{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\eta^2}{4\theta}\right) \cdot i} \qquad (\theta > 0),$$

eine häufig vorkommende Formel.

Durch Trennung des reellen und imaginären Teiles entspringen aus ihr die beiden speciellen Gleichungen, die wir auch direkt durch dieselbe Substitution aus den beiden anderen Formeln des vorigen Paragraphen hätten herleiten können:

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\theta x^2 + \eta x)\cdot dx &= \left|\sqrt{\frac{\pi}{\theta}}\right|\cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\eta^2}{4\theta}\right),\\ \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\theta x^2 + \eta x)\cdot dx &= \left|\sqrt{\frac{\pi}{\theta}}\right|\cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\eta^2}{4\theta}\right)\end{aligned}\right\}\quad (\theta > 0).$$

Durch die Entwicklung der auf ihrer rechten Seite befindlichen trigonometrischen Funktionen nach dem zweiteiligen Argument gewinnt man nichts, wohl aber, wenn man diese Entwicklung mit den Integralfunktionen vornimmt. Man erhält dann statt eines immer zwei bestimmte Integrale, von denen aber das zweite als Integral einer ungeraden Funktion (14) ganz ausfällt, und allein das erste, als Integral einer geraden Funktion, bestehen bleibt.

Man gewinnt so die Formeln:

$$(3)\quad \int_{-\infty}^{\infty} \sin\theta x^2 \sin\eta x\, dx = 0,\quad \int_{-\infty}^{\infty} \cos\theta x^2 \sin\eta x\, dx = 0 \quad (\theta > 0);$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\theta x^2 \cos\eta x\, dx &= \left|\sqrt{\frac{\pi}{\theta}}\right|\cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\eta^2}{4\theta}\right),\\ \int_{-\infty}^{\infty} \sin\theta x^2 \cos\eta x\, dx &= \left|\sqrt{\frac{\pi}{\theta}}\right|\cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\eta^2}{4\theta}\right)\end{aligned}\right\}\quad (\theta > 0),$$

oder unter Berücksichtigung der für die Integrale gerader Funktionen charakteristischen Eigenschaft:

$$(4_0)\quad \left\{\begin{aligned} \int_{0}^{\infty} \cos\theta x^2 \cos\eta x\, dx &= \frac{1}{2}\left|\sqrt{\frac{\pi}{\theta}}\right|\cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\eta^2}{4\theta}\right),\\ \int_{0}^{\infty} \sin\theta x^2 \cos\eta x\, dx &= \frac{1}{2}\left|\sqrt{\frac{\pi}{\theta}}\right|\cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\eta^2}{4\theta}\right)\end{aligned}\right\}\quad (\theta > 0).$$

Betreffs der Integrale (3) ist hervorzuheben, daſs sie im Gegensatz zu den durch endliche Ausdrücke darstellbaren Integralen (4_0), in denen die Funktionen von θx^2 mit $\cos\eta x$ statt mit $\sin\eta x$ multipliciert sind, zwischen den Grenzen 0 und ∞ in geschlossener Form nicht angebbar, noch auf andere Transcendenten zurückführbar sind. Es sind mithin die beiden Integrale:

$$(3_0)\qquad \int_0^\infty \cos\theta x^2 \sin\eta x\, dx,\quad \int_0^\infty \sin\theta x^2 \sin\eta x\, dx \qquad (\theta > 0),$$

die in der Wellentheorie tropfbarer Flüssigkeiten, insbesondere in dem Problem der eingetauchten Körper eine Rolle spielen, Transcendenten *sui generis*.

77. Transformationen des Integrals $\Gamma(\frac{1}{2})$. — Gewissermafsen eine letzte Specialisierung der im vorhergehenden behandelten allgemeineren Integrale bilden die folgenden, mit ihnen in Zusammenhang stehenden Formeln, die wir aus dem bekannten Integral:

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{\frac{1}{2}-1}\, dx = |\sqrt{\pi}|$$

durch geeignete Transformationen gewinnen.

Wenden wir zunächst zwecks Fortschaffung der gebrochenen Potenz $x^{\frac{1}{2}-1}$ dieselbe Transformation wie in § 75:

$$x = y^2$$

an, so erhalten wir die wichtige Formel:

$$(1)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = |\sqrt{\pi}|.$$

Nun kann man genau wie im vorigen Paragraphen durch eine analoge Substitution den Exponenten der Exponentialgröfse in ein Binom vom zweiten Grade umgestalten, und zwar setzen wir, um in seinen linearen Teil gleich eine einfache Konstante hineinzubringen, von vornherein:

$$x = y|\sqrt{l}| + \frac{m}{2\,|\sqrt{l}|},$$

wo, während m ganz beliebig reell ist, l eine wesentlich positive Konstante sein, und auch ihre Wurzel positiv genommen werden soll. Da für $|\sqrt{l}|$ die Grenzen dieselben bleiben, so verwandelt sich durch diese Transformation die Formel (1) in:

$$(2)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-lx^2 - mx}\, dx = \left|\sqrt{\frac{\pi}{l}}\right| \cdot e^{\frac{m^2}{4l}} \qquad (l > 0).$$

Dafs l wesentlich positiv sein mufs, ist auch aus der Natur des Integrals selbst ersichtlich. Denn für ein negatives l würde die Exponentialgröfse e^{-lx^2} wegen ihres positiven Exponenten an beiden Grenzen bis ins Unendliche wachsen, während sie im Gegenteil für ein positives l auf beiden Seiten gegen Null konvergiert, und zwar so schnell, daſs dadurch das Wachsen der Potenz e^{-mx}, das übrigens immer, welches auch das Zeichen von m sei, nur auf einer Seite stattfindet, vernichtet wird.

Die negative Wurzel von l würde ein von der (2) verschiedenes Resultat ergeben.

78. Komplexe Werte der Parameter in der vorstehenden Formel. — Genau wie wir es früher (71) für die Formel:

$$\int_0^\infty e^{-kx} x^{a-1}\,dx = \frac{\Gamma(a)}{k^a} \qquad (k > 0)$$

bezüglich ihres Parameters k dargethan haben, folgt vermöge desselben in § 68 entwickelten Prinzips ohne weitere Umstände, und ohne erneut eines ausführlichen Beweises zu bedürfen, daſs auch in der soeben erhaltenen Formel:

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-lx^2 - mx}\,dx = \left|\sqrt{\frac{\pi}{l}}\right| \cdot e^{\frac{m^2}{4l}} \qquad (l > 0)$$

die beiden Konstanten l und m, sei es einzeln oder gleichzeitig, komplex genommen werden dürfen, wobei aus den am Schluſs des vorigen Paragraphen hervorgehobenen Gründen der reelle Teil von l durchaus positiv bleiben muſs, für m es aber ganz gleichgültig ist, was für ein Zeichen seine beiden Teile haben.

Denn daſs für den ganzen Umfang dieser möglichen Werte der imaginären Argumente die betreffenden endlichen Ausdrücke und die Integrale in der (1) endliche und stetige Funktionen ihrer Argumente sind, ergibt sich unmittelbar, bezw. aus den in den §§ 69 f. aufgestellten Prinzipien. Ebenso steht ihre Eindeutigkeit auſser Frage. Und ihre Gleichheit für den Wert Null der imaginären Elemente der komplexen Gröſsen wird ja eben durch die Formel (1), auf die man dann zurückkommt, erwiesen. Somit sind alle Bedingungen erfüllt, die zur Gültigkeit der Formel (1) auch für wirklich imaginäre Parameter erforderlich sind.

Der reelle Bestandteil von m kann also beliebig positiv oder negativ sein, jedoch nur so lange, als der reelle und positive Teil von l wirklich vorhanden ist. Denn geht man, während m zweiteilig imaginär ist, in Bezug auf das imaginäre l zum Grenzfall über, indem man sein reelles Element gleich Null setzt, was, wie man sich leicht überzeugt, nach dem Prinzip des § 73 gestattet ist, so ist evident, dafs man dann auch gleichzeitig das reelle Element von m gleich Null nehmen mufs, weil man sonst in der durch Trennung des Reellen und Imaginären in zwei Integrale aufgelösten (1) aufser einem trigonometrischen Faktor noch eine Exponentialgröfse e^{-mx} hätte, die an der unteren oder oberen Grenze unendlich grofs würde und in diesem ihrem Verhalten auch durch den trigonometrischen Faktor nicht gestört werden könnte. Sind aber l und m beide einfach imaginär, so geht die (1) in die (1) des § 76 über, die mithin als specieller Fall in unserer auf komplexe Parameter ausgedehnten Formel enthalten ist.

79. Das Laplacesche Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-lx^2}\cos mx\,dx$ $(l>0)$. — Unter den zahlreichen Formeln, welche man aus der auf die angegebene Weise erweiterten Gleichung (1) des vorstehenden Paragraphen ableiten kann, heben wir nur die eine besonders hervor, welche sich für ein reelles l und ein beliebig komplexes m ergibt.

Die Zulässigkeit so beschaffener Werte für l und m geht nicht nur aus den Andeutungen des vorigen Paragraphen hervor, sondern ist auch an sich klar, da alsdann augenfällig unser Integral alle die Kriterien in sich birgt, welche die Substitution des Imaginären statthaft machen. Und auch das Prinzip des § 73 ist in diesem Falle auf die Formel anwendbar, d. h. man kann m auch durch eine rein imaginäre Konstante mi ersetzen, wo dann m sowohl positiv als negativ genommen werden darf.

Für diesen letzteren Fall gewinnt man die Gleichung:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-lx^2} e^{-mxi}\,dx = \left|\sqrt{\frac{\pi}{l}}\right| \cdot e^{-\frac{m^2}{4l}}, \qquad (l>0),$$

aus der noch durch Trennung des Reellen und Imaginären die beiden Resultate fliefsen:

$$(1)\qquad \left.\begin{aligned} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-lx^2}\cos mx\cdot dx &= \left|\sqrt{\frac{\pi}{l}}\right| \cdot e^{-\frac{m^2}{4l}}, \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-lx^2}\sin mx\cdot dx &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (l>0),$$

denn das letzte Integral mufs, wie die (3) des § 76, als Integral einer ungeraden Funktion verschwinden.

Dafs das Zeichen von m beliebig ist, erkennt man auch aus der Gleichung (1) selbst, da sie für entgegengesetzte Werte von m ungeändert bleibt. Auch dafs alles Imaginäre herausfallen mufste, zeigt unmittelbar der Ausdruck rechts, der die eingliedrig imaginäre Gröfse mi nur im Quadrat enthält.

Den Erläuterungen des vorigen Paragraphen zufolge gilt die Formel auch noch für ein zweigliedrig imaginäres l, wofern nur der reelle Bestandteil dieser Gröfse $\geqq 0$ ist. Doch bietet dieser Fall sich seltener dar.

Diese den wichtigsten beizuzählende Formel verdankt man Laplace. Sie kann auf sehr verschiedenartige Weise hergeleitet werden, unter anderem durch Reihenentwicklung. Durch unsere allgemeinen Untersuchungen über die imaginären Funktionen waren wir aber vollkommen berechtigt und gewissermafsen darauf gewiesen, den oben betretenen Weg zu ihrer Herleitung einzuschlagen.

Drittes Kapitel.

Das Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{cxi}}{(k+xi)^a}\,dx$ und seine speciellen Fälle.

80. Präcisierung der Aufgabe und Vorbereitung ihrer Lösung. — Wie sich überhaupt fast alle wichtigen Integrale um die Eulerschen Integrale gruppieren, so dafs es sich empfiehlt, sie in gewisse Abteilungen unterzubringen, so stehen auch die Integrale, an deren Herleitung wir jetzt gehen, in einem gewissen Zusammenhang mit den Gammafunktionen.

Wir legen dar, worauf wir es abgesehen haben, und welchen Gang wir nehmen müssen, um unsere Absicht zu erreichen.

Den Ausgangspunkt bildet wieder jene hochwichtige Eulersche Formel:

$$\int\limits_0^\infty e^{-(k+xi)y}\,y^{a-1}\,dy = \frac{\Gamma(a)}{(k+xi)^a} \qquad (k>0),$$

wo x positiv oder negativ ist, k aber wesentlich positiv sein mufs. Um etwas Neues zu erhalten, wollen wir diese Gleichung noch einmal, nach x, integrieren und dabei den Lehrsatz von der Umkehrung der Integrationsordnung in Anwendung bringen. Geschähe dies aber ohne weiteres, so bedürfte es dazu nicht erst der Theorie der bestimmten Integrale als einer eigenen Wissenschaft, weil es sich dann auf der rechten Seite nur um das schon unbestimmt, also auch zwischen beliebigen Grenzen angebbare Integral der Potenz $(k + xi)^{-a}$ handeln würde. Man mufs vielmehr zuvor noch beide Seiten der Gleichung mit einer geeigneten Funktion von x multiplicieren, und als solche erweist sich die Exponentialgröfse e^{cxi} mit einem rein imaginären, x proportionalen Exponenten, in welchem die Konstante c positiv oder negativ reell, aber nicht imaginär sein darf, denn in diesem Falle hätte man eine Exponentialgröfse, wie etwa e^{-gx}, die an einer der beiden Grenzen $(x = \pm\infty)$ unendlich grofs würde, ohne dafs der auf der linken Seite daneben befindliche trigonometrische Faktor dieses unstatthafte Anwachsen aufzuheben im stande wäre. Die so umgeänderte Gleichung ist dann der Integration nach x zwischen speciellen Grenzen zu unterziehen, die, wie immer in ähnlichen Fällen, so der Natur der betreffenden Funktionen angepafst sein müssen, dafs sich die Integration ausführen läfst, und das sind hier die Grenzen $-\infty$ und ∞. Kehren wir also gleich die Ordnung der Integrationen auf der linken Seite um, indem wir dabei alles nach x Konstante heraussetzen, so gewinnen wir die Gleichung:

$$(1)\qquad \int_0^\infty e^{-ky} y^{a-1}\, dy \int_{-\infty}^\infty e^{x(c-y)i}\, dx = \Gamma(a) \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{cxi}}{(k + xi)^a}\, dx \qquad (k > 0),$$

welche uns den Wert des Integrals:

$$(1_0)\qquad \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{cxi}}{(k + xi)^a}\, dx$$

erschliefsen wird, falls es gelingt, die beiden Integrationen links zu vollführen.

Dafs das Integral (1_0) wirklich einen Sinn besitzt, ist leicht erwiesen. Denn die Potenz:

$$(k + xi)^{-a} = \left|(k^2 + x^2)^{-\frac{a}{2}}\right| \cdot \left[\cos\left(a \cdot \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{k}\right) - i \sin\left(a \cdot \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{k}\right)\right]$$

[71, (4)] nimmt, da für $x = \pm \infty$ die trigonometrischen Funktionen in die Konstanten $\cos\frac{a\pi}{2}$ und $\pm \sin\frac{a\pi}{2}$ übergehen und $k^2 + x^2$ mit x^2 zusammenfällt, in jedem ihrer Glieder, von den Konstanten abgesehen, auf beiden Seiten wie die absolute Potenz $|x^{-a}|$ mit wachsendem $|x|$ bis zu Null ab. Dazu tritt dann noch aus der Exponentialgröfse e^{cxi} der trigonometrische Faktor $\cos cx$ oder $\sin cx$ hinzu, so dafs dem Prinzip des § 47 zufolge dem Integral (1_0) trotz seiner unendlichen Ausdehnung eine Bedeutung zukommt.

Auf der linken Seite der Formel (1) aber bietet sich das eigentümliche Phänomen dar — und dadurch wird die Formel ungemein interessant und lehrreich — dafs wir auf Integrale stofsen, die wegen ihrer unendlichen Grenzen, wenn auch nicht unendliche, so doch unbestimmte Werte annehmen und daher zwar nicht falsche, aber unbrauchbare Resultate liefern. Dies gilt von beiden Teilen des Integrals:

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{x(c-y)i}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cos x(c-y)\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \sin x(c-y)\,dx,$$

von denen z. B. das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \cos x(c-y)\,dx = \frac{2\sin\infty}{c-y}$ wegen des $\sin\infty$ gar nichts Bestimmtes ausdrückt. Diese Unbestimmtheit hat darin ihren Grund, dafs die trigonometrischen Funktionen in der (2) des erforderlichen abnehmenden Faktors entbehren, und ist erst durch die Umkehrung der Integrationsfolge hervorgerufen, da vorher bei der Integration nach y in der Exponentialgröfse e^{-ky} noch ein solcher Faktor vorhanden war.

Zur Beseitigung dieses Übelstandes werden wir fürs erste statt des vorliegenden Integrals (1) ein davon etwas verschiedenes, von der angedeuteten Unbestimmtheit befreites betrachten und erst zuletzt auf jenes zurückkommen. Wir schieben also in die Gleichung (1) eine solche mit wachsendem $|x|$ abnehmende Exponentialgröfse mit reellem Exponenten als Faktor ein, wenn wir dadurch auch einen Schritt zurückgehen; wir sind aber gewarnt worden. Wir hätten diesen Faktor allerdings gleich anfangs zugleich mit dem anderen Faktor e^{cxi} hineinbringen können, doch hätte man damals den Grund davon nicht erkannt, während derselbe jetzt klar vor Augen liegt. Der Exponent der neuen Exponentialgröfse dürfte eigentlich nicht linear sein, weil sonst das

Integral (2) auf der einen Seite, wo sie bis ins Unendliche wächst, seinen Sinn verlieren und der Schaden, dem wir abhelfen wollten, nur noch verschlimmert würde; man müfste vielmehr mit einer Exponentialgröfse wie e^{-x^2} multiplicieren, die nach beiden Seiten hin gegen Null konvergiert. Wenn wir aber das in Rede stehende, sich von $-\infty$ bis ∞ erstreckende Integral (2) in die Summe zweier Teilintegrale von $-\infty$ bis 0 und von 0 bis ∞ zerlegen, dann dürfen wir auch den Exponenten der neuen Exponentialgröfse linear, z. B. gleich σx wählen, wo σ wesentlich positiv sein soll, wofern wir nur das erstere Teilintegral mit $e^{\sigma x}$, das zweite mit $e^{-\sigma x}$ multiplicieren, denn dadurch wird bewirkt, dafs keins von beiden, also auch nicht ihre Summe unendlich grofs wird. Zur Vermeidung unnötig langer Formeln lassen wir jedoch das ursprüngliche Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty}$ ungetrennt bestehen und versehen dafür den Exponenten des Hülfsfaktors mit dem doppelten Zeichen, stellen also statt der (1) die Gleichung auf:

$$(3)\quad \int\limits_0^\infty e^{-ky}y^{a-1}\,dy\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx\,e^{x(c-y)i}e^{\mp\sigma x}=\Gamma(a)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{cxi}}{(k+xi)^a}e^{\mp\sigma x}\cdot dx$$

$$(k>0,\ \sigma>0),$$

wo das doppelte Zeichen im Exponenten so zu interpretieren ist, dafs sich das obere Zeichen $-$ auf die obere Hälfte der Integration von 0 bis ∞, das untere Zeichen $+$ aber auf die untere Hälfte von $-\infty$ bis 0 beziehen soll. Diese abkürzende Schreibart ist übrigens auch völlig konsequent, denn es gibt auch bestimmte Integrale von solchen Funktionen, deren Form sich innerhalb der äufsersten Integrationsgrenzen ändert, und dann bedeutet das Integral die Summe der verschiedenen sich von selbst darbietenden Teilintegrale.

Behufs Lösung unserer Aufgabe ist jetzt zunächst das innere Integral auf der linken Seite vorstehender Gleichung, darauf der Grenzwert des ganzen Ausdrucks links für $\lim\sigma=0$ zu ermitteln, wobei zwischen den beiden Fällen $c \gtrless 0$ und ebenso zwischen $a \gtrless 1$ zu unterscheiden sein wird. Dadurch wird, nachdem noch gezeigt ist, dafs das Integral rechts für $\lim\sigma=0$ in das ursprüngliche Integral (1_0) übergeht, der Wert dieses letzteren uns erschlossen sein [51].

81. Wertbestimmung des Integrals $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{cxi}}{(k+xi)^a}\,dx$. —

I. Das Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{x(c-y)i}\, e^{\mp\sigma x}\, dx$ wird sofort vermittelst der ausführbaren unbestimmten Integration erhalten. Denn für seine obere Hälfte hat man:

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-x[\sigma-(c-y)i]}\, dx = \left[-\frac{e^{-x[\sigma-(c-y)i]}}{\sigma-(c-y)i}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\sigma-(c-y)i},$$

und ebenso vermöge der Substitution $x = -z$ und nach Umkehrung der Grenzen für die untere Hälfte:

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^{x[\sigma+(c-y)i]}\, dx = \int\limits_0^{\infty} e^{-z[\sigma+(c-y)i]}\, dz = \frac{1}{\sigma+(c-y)i},$$

mithin für das ganze Integral:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{x(c-y)i}\, e^{\mp\sigma x}\, dx = \frac{2\sigma}{\sigma^2+(c-y)^2}.$$

II. In der durch Einsetzung dieses Wertes in die (3) des vorigen Paragraphen sich ergebenden Gleichung:

$$(1)\quad 2\int\limits_0^{\infty} e^{-ky}\, y^{a-1}\cdot\frac{\sigma}{\sigma^2+(y-c)^2}\, dy = \Gamma(a)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{cxi}}{(k+xi)^a}\, e^{\mp\sigma x}\, dx$$
$$(k>0,\ \sigma>0),$$

mit der man an sich noch nicht viel gewonnen, sondern nur mehrere Integrale aufeinander zurückgeführt hätte, lasse man jetzt σ bis ins Unendliche abnehmen. Dabei wird sich uns zum erstenmal ein äußerst merkwürdiges Phänomen darbieten, das aber nicht selten auftritt und eine große Rolle in der Integralrechnung spielt. Es ereignet sich nämlich oft, daß der Wert eines unbekannten Integrals, je mehr sich ein in ihm enthaltener Parameter einem gewissen bestimmten Werte nähert, an dieser Grenze angebbar ist, indem man durch geeignete Zerlegung in Teilintegrale findet, daß sich sein ganzer Wert auf eine bestimmte Stelle wirft, während alles Übrige sich beständig der Null nähert. Dies ist also auch der Fall mit dem Integral auf der linken Seite der letzten Gleichung, wenn man in ihm σ bis zur Null hin abnehmen läßt.

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Ist c **negativ**, also $y-c$ für alle in Betracht kommenden Werte von y positiv, so nähert sich in der ganzen Ausdehnung des Integrals der Faktor $\frac{\sigma}{\sigma^2+(y-c)^2}$ für ein bis zu Null abnehmendes σ an jeder Stelle unaufhörlich ebenfalls der Null, da der Nenner in das stets von Null verschiedene $(y-c)^2$ übergeht. Daraus kann schon hier geschlossen werden, daſs in diesem Falle, den wir aber erst an zweiter Stelle genauer betrachten werden, das ganze Integral zu Null wird.

Ist aber c **positiv**, so gilt zwar im allgemeinen von jenem Faktor aus denselben Gründen noch ebendasselbe. Nur an **einer** Stelle der Abscissenachse, für $y=c$, also $(y-c)^2=0$, geht er in $\frac{1}{\sigma}$ über und wird für $\lim \sigma = 0$ im Gegenteil unendlich groſs, so daſs für diesen Grenzwert des Parameters σ die Integralfunktion zwar sonst überall gegen Null konvergiert, an der **einen** um $y=c$ herumgelagerten Stelle aber immer gröſser und gröſser wird.

In einem solchen Falle ist das Integral in drei Teile zu zerlegen, deren mittlerer jene Unstetigkeitsstelle wenn auch zwischen noch so enge Grenzen einschlieſst. Da wir aber zu seiner Bestimmung den Mittelwertsatz in Anwendung bringen werden, so haben wir uns zuvörderst nur erst mit dem Integral des Faktors $\frac{\sigma}{\sigma^2+(y-c)^2}$ zu beschäftigen.

III. Aus dem unbestimmten Integral (vergl. § 30, S. 51):

$$(2)\quad \int \frac{\sigma}{\sigma^2+(y-c)^2}\,dy = \frac{1}{\sigma}\int \frac{dy}{1+\left(\frac{y-c}{\sigma}\right)^2} = \operatorname{arc\,tg}\frac{y-c}{\sigma} + C$$

$$\left(\sigma > 0;\ -\frac{\pi}{2} \leqq \operatorname{arc} \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

flieſst:

$$(3)\qquad \int_0^\infty \frac{\sigma}{\sigma^2+(y-c)^2}\,dy = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{c}{\sigma},$$

und hieraus, da $\lim\limits_{\sigma=0} \operatorname{arc\,tg}\frac{c}{\sigma} = \pm\frac{\pi}{2}$, je nachdem c positiv oder negativ ist:

$$(3')\qquad \lim_{\sigma=0}\int_0^\infty \frac{\sigma}{\sigma^2+(y-c)^2}\,dy = \pi \qquad (c>0),$$

$$(3'') \qquad \lim_{\sigma=0} \int_0^\infty \frac{\sigma}{\sigma^2 + (y-c)^2}\, dy = 0 \qquad (c < 0).$$

Letzteres Resultat befindet sich in Übereinstimmung mit einer bereits oben gemachten Bemerkung, soll aber für jetzt aufser acht gelassen werden.

Hingegen untersuchen wir jetzt genauer, wie für das Grenzintegral (3′) der Wert π herauskommt. Wir teilen das Integral auf der linken Seite der (3) auf die schon angegebene Weise in drei Teile, deren erster, bis kurz vor c, beliebig nahe an c herangeht, und deren dritter ebenso kurz nach c anhebt, ohne dafs aber, um gar nichts vorauszusetzen, diese beiden Entfernungen von c einander gleich zu sein brauchen. Bezeichnen wir also durch μ und ν beliebig kleine positive Werte, die bestimmt sind, unaufhörlich abzunehmen, und deuten wir der Kürze halber die Integrale nur durch das Integralzeichen an, so hat man:

$$(4) \qquad \int_0^\infty = \int_0^{c-\mu} + \int_{c-\mu}^{c+\nu} + \int_{c+\nu}^\infty \qquad (c > 0).$$

Vermöge der (2) wird dies:

$$(4') \qquad \int_0^\infty = \left(-\operatorname{arc\,tg}\frac{\mu}{\sigma} + \operatorname{arc\,tg}\frac{c}{\sigma}\right) + \left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\nu}{\sigma} + \operatorname{arc\,tg}\frac{\mu}{\sigma}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\nu}{\sigma}\right) \qquad (c > 0),$$

d. i., indem sich die den mittleren Grenzen zugehörigen Werte zu je zwei als gleich und entgegengesetzt gegenseitig aufheben, wie vorher $\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{c}{\sigma}$, wie es auch der Fall sein mufs. Ebenso ergibt die (4′) alles in allem für $\lim \sigma = 0$ natürlich wieder wie oben *pure* den Wert π, aber man kann sich dabei die Hülfsgröfsen μ, ν so abnehmen lassen, dafs, in Bestätigung unserer Voraussage, die beiden äufseren Teilintegrale, obwohl deren eines von unendlicher Ausdehnung ist, sich unausgesetzt der Null nähern und der ganze Wert des Integrals in das mittlere, auf einen unendlich kleinen Umfang reducierte Teilintegral fällt.

Da $\lim\limits_{\sigma=0} \operatorname{arc\,tg}\frac{c}{\sigma} = \frac{\pi}{2}$, so zeigt die (4′), dafs das erste Teilintegral gleich Null wird, wenn auch $\lim\limits_{\sigma=0} \operatorname{arc\,tg}\frac{\mu}{\sigma} = \frac{\pi}{2}$, mithin

$\lim \frac{\mu}{\sigma} = \infty$ ist, was erfordert, daſs das mit σ gleichzeitig abnehmende μ sich langsamer als σ der Null nähert, dieses also früher unendlich klein werde.

Aus denselben Gründen muſs, damit das letzte Teilintegral zu Null werde, $\lim\limits_{\sigma=0} \operatorname{arc\,tg} \frac{\nu}{\sigma} = \frac{\pi}{2}$, also $\lim \frac{\nu}{\sigma} = \infty$ werden und auch ν langsamer abnehmen als σ.

Unter diesen beiden Bedingungen wird das mittlere Teilintegral als die Summe von $\lim\limits_{\sigma=0} \operatorname{arc\,tg} \frac{\mu}{\sigma} = \frac{\pi}{2}$ und $\lim\limits_{\sigma=0} \operatorname{arc\,tg} \frac{\nu}{\sigma} = \frac{\pi}{2}$:

$$(5) \qquad \lim_{\substack{\mu=0\\ \nu=0}} \lim_{\sigma=0} \int_{c-\mu}^{c+\nu} \frac{\sigma}{\sigma^2 + (y-c)^2}\, dy = \pi \qquad (c > 0),$$

so daſs der ganze Wert des Integrals (3') gleichsam kondensiert an der Stelle $y = c$ liegt und man eigentlich kein Integral mehr, sondern nur eine unendlich groſse Ordinate hat.

Lieſse man μ und ν schneller abnehmen, so bekäme man zwar nie etwas Falsches, aber die beiden extremen Teilintegrale würden sich nicht mehr auf Null reducieren.

IV. Jetzt gehen wir an die Wertbestimmung des ganzen auf der linken Seite der Gleichung (1) befindlichen Integrals:

$$(6) \qquad \int_0^\infty e^{-ky} y^{a-1} \frac{\sigma}{\sigma^2 + (y-c)^2}\, dy \qquad (c > 0)$$

für $\lim \sigma = 0$ und setzen dabei zunächst das positive $a > 1$ voraus, wiewohl sich später herausstellen wird, daſs es für das Resultat keinen Unterschied macht, ob $a \gtrless 1$ ist.

Auf jedes der drei Teilintegrale (4), in welche wir das Integral (6) zu zerlegen haben, wenden wir den Mittelwertsatz an, indem wir immer das zwischen den entsprechenden Grenzen genommene Integral des durchaus positiven Faktors $\frac{\sigma}{\sigma^2 + (y-c)^2}$ mit dem betreffenden Mittelwert des anderen, ebenfalls in der ganzen Integrationsausdehnung überall positiven Faktors

$$(6_0) \qquad e^{-ky} y^{a-1}$$

multiplicieren.

Für das mittlere Teilintegral $\int\limits_{c-\mu}^{c+\nu}$ ist dieser Mittelwert ein innerhalb der Integrationsgrenzen $c-\mu$, $c+\nu$ gelegener, unbekannter Wert der Funktion (6_0). Da aber gleichzeitig mit σ auch μ und ν bis zu Null abnehmen, so rücken für $\lim \sigma = 0$ diese Grenzen beiderseits unendlich nahe an den festen Wert $y = c$ heran, und da in einem unendlich kleinen Intervall alle Werte einer stetigen Funktion nur unendlich wenig voneinander differieren können, so mufs schliefslich jener Mittelwert, welcher er auch sei, mit $e^{-kc} c^{a-1}$ zusammenfallen. Mithin hat man unter Berücksichtigung der (5):

$$\lim_{\substack{\mu=0 \\ \nu=0}} \lim_{\sigma=0} \int\limits_{c-\mu}^{c+\nu} e^{-ky} y^{a-1} \frac{\sigma}{\sigma^2 + (y-c)^2} dy = \pi e^{-kc} c^{a-1}$$

$$\left(c > 0;\ {\mu \atop \nu} > \sigma > 0\right).$$

Man sieht aber, dafs man nur unter den obigen Voraussetzungen für μ und ν zu dieser Konklusion gelangt, weil sich sonst nichts Bestimmtes ergeben würde.

Für die extremen Teilintegrale nimmt, wie oben gezeigt, das Integral des Faktors $\dfrac{\sigma}{\sigma^2 + (y-c)^2}$ bis zur Null hin ab. Und da in der ganzen Ausdehnung von 0 bis ∞ alle Werte des Faktors (6_0) durchaus endlich sind, derselbe sogar für ein immer mehr wachsendes y immer kleiner wird, so konvergiert jedes dieser beiden Teilintegrale als Produkt eines bis zu Null abnehmenden Faktors mit einem jedenfalls endlichen Werte gegen Null.

Das Endergebnis ist demnach für $a > 1$:

$$(7) \qquad \lim_{\sigma=0} \int\limits_0^\infty e^{-ky} y^{a-1} \frac{\sigma}{\sigma^2 + (y-c)^2} dy = \pi e^{-kc} c^{a-1} \quad (c > 0).$$

Ist a ein echter Bruch, also der Faktor (6_0) an der unteren Grenze unendlich grofs, so mufs zwischen 0 und $c-\mu$ noch ein konstanter Wert ϱ eingeschaltet werden, so dafs man eine Zerlegung in vier Teilintegrale hat:

$$(8) \qquad \int\limits_0^\infty = \int\limits_0^\varrho + \int\limits_\varrho^{c-\mu} + \int\limits_{c-\mu}^{c+\nu} + \int\limits_{c+\nu}^\infty .$$

Die Grenzwerte der beiden letzten dieser vier Teilintegrale sind, wie an sich klar ist, dieselben wie vorher. Was das zweite, $\int\limits_{\varrho}^{c-\mu}$, betrifft, so unterscheidet es sich von dem ersten in der eben beendigten Untersuchung nur durch seine untere Grenze, die dort 0 war und jetzt ϱ ist. Nun macht es aber in dem entsprechenden zugehörigen Integral $\lim\limits_{\mu=0}\lim\limits_{\sigma=0}\int\limits_{0}^{c-\mu}\frac{\sigma}{\sigma^2+(y-c)^2}\,dy$ keinen Unterschied, ob man zu seiner unteren Grenze ϱ statt 0 wählt, wofern nur $\varrho < c - \mu < c$ ist, denn auch dann ist vermöge der (2) wie in der (4′):

$$\lim_{\mu=0}\lim_{\sigma=0}\int\limits_{\varrho}^{c-\mu}\frac{\sigma}{\sigma^2+(y-c)^2}\,dy = -\lim_{\mu=0}\lim_{\sigma=0}\operatorname{arc\,tg}\frac{\mu}{\sigma}+\lim_{\sigma=0}\operatorname{arc\,tg}\frac{c-\varrho}{\sigma}$$

$$= -\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = 0.$$

Daraus folgt, dafs das zweite Teilintegral $\int\limits_{\varrho}^{c-\mu}$ in der (8), aus denselben Gründen wie vorhin $\int\limits_{0}^{c-\mu}$, ebenfalls Null zum Grenzwert hat.

Um endlich den Wert des ersten Teilintegrals $\int\limits_{0}^{\varrho}$ zu ermitteln, so mufs man, da die Funktion (6_0) an der unteren Grenze $y=0$ unendlich grofs wird, mithin ihr Mittelwert in dem Intervall von 0 bis ϱ nicht mehr zwischen endlichen Grenzen eingeschlossen wäre, das umgekehrte Verfahren einschlagen, indem man vielmehr das bekanntlich (**43**, 2) einen endlichen Wert repräsentierende Integral $\int\limits_{0}^{\varrho} e^{-ky}\,y^{a-1}\,dy$ mit einem gewissen, aber unbekannten Werte multipliciert, den der Faktor $\frac{\sigma}{\sigma^2+(y-c)^2}$ in dem Intervall von 0 bis ϱ annimmt. Da aber $\varrho < c$, so ist dieser Faktor für $\lim \sigma = 0$ bis zu ϱ hin überall unendlich klein. Folglich konvergiert das Teilintegral $\int\limits_{0}^{\varrho}$ ebenfalls gegen die Null.

Hieraus ergibt sich, dafs die (7) ebensowohl für $a < 1$ wie für $a > 1$ gilt. Man hätte dies Resultat auch aus der rechten

Seite der (1) herleiten können, doch verdient das befolgte Verfahren als das striktere den Vorzug.

V. Ist c negativ, so bedarf es für $a > 1$ gar keiner Zerlegung des Integrals (6), weil unter dieser Voraussetzung der Faktor (6_0) in der ganzen Ausdehnung von 0 bis ∞ überall endlich ist und, wie wir schon wissen, das Integral $(3'')$ den Grenzwert 0 besitzt. Das Produkt dieses Integrals mit dem betreffenden, jedenfalls endlichen Mittelwert der Funktion (6_0) konvergiert also gegen Null.

Wenn aber $a < 1$, so teile man das Integral (6) in zwei Teile von 0 bis zu dem beliebig kleinen positiven ϱ und von ϱ bis ∞. Für das erste Teilintegral ergibt sich genau auf dieselbe Weise wie für das oben vorkommende $\int\limits_0^\varrho$ der Wert Null. Ebenso ist das zweite Teilintegral gleich Null, da für $c < 0$, $\varrho > 0$ aus der (2) direkt $\lim\limits_{\sigma=0}\int\limits_\varrho^\infty \frac{\sigma}{\sigma^2+(y-c)^2}\,dy = 0$ hervorgeht[52]).

Mithin verschwindet das ganze Integral (6), und man hat, wie schon mehrfach präsumiert wurde, für jeden positiven Wert von a:

$$(7') \qquad \lim_{\sigma=0}\int\limits_0^\infty e^{-ky}\,y^{a-1}\,\frac{\sigma}{\sigma^2+(y-c)^2}\,dy = 0 \qquad (c < 0).$$

VI. Nun kommen wir zu dem Integral auf der rechten Seite der (1):

$$(9) \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{cxi}}{(k+xi)^a}\,e^{\mp\sigma x}\,dx,$$

das aus den beiden Teilintegralen $\int\limits_{-\infty}^0$ und $\int\limits_0^\infty$ besteht.

In jedem derselben, mithin auch in ihrer Summe, dem ganzen Integral (9), kann man in Anbetracht, daſs die Integralfunktion die Exponentialgröſse $e^{\sigma x}$ bezw. $e^{-\sigma x}$ als Faktor enthält und auſserdem, wie bereits nachgewiesen (80), beide Hälften des Integrals

$$(9_0) \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{cxi}}{(k+xi)^a}\,dx$$

einzeln, also auch zusammengenommen, einen Sinn besitzen, kraft des in § 73 entwickelten Prinzips geradezu $\sigma = 0$ setzen, um den Grenzwert zu erhalten, dem sich für $\lim \sigma = 0$ das Integral (9) stetig nähert. Dieser Grenzwert ist demnach das Integral (9_0). Dafs in ihm c ebensogut negativ wie positiv sein kann, bedarf, da dieser Parameter nur in trigonometrischen Faktoren der Integralfunktion vorkommt, kaum der Erwähnung.

Nach allem diesem gewinnen wir aus der (1) als endgültige Resultate unserer Untersuchung die beiden Formeln:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{cxi}}{(k + xi)^a}\, dx = \frac{2\pi}{\Gamma(a)} e^{-kc}\, c^{a-1} \qquad (c > 0), \tag{10}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{cxi}}{(k + xi)^a}\, dx = 0 \qquad (c < 0). \tag{11}$$

82. Das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(k + xi)^a}$. — Für den speciellen Fall $c = 0$, der vorstehendes Integral liefert, könnte man ebenfalls das im vorigen Paragraphen befolgte und nur in etwas modificierte Verfahren in Anwendung bringen. Statt des dortigen Funktionalfaktors (3′) würde sich nämlich hier das Integral:

$$\lim_{\sigma=0} \int_0^{\infty} \frac{\sigma}{\sigma^2 + y^2}\, dy = \frac{\pi}{2},$$

also nur die Hälfte des früheren Wertes, ergeben, was offenbar davon herrührt, dafs jetzt die Integration nicht über die Stelle hinausgeht, an der die Ansammlung des Wertes stattfindet, sondern bei dieser Stelle selbst beginnt und so die Hälfte des bedeutsamen Intervalls und damit auch das, was sie an Wert eintrug, in Fortfall kommt.

Doch bedarf es gar nicht so vieler Umstände, da, wie schon zu Anfang des § 80 bemerkt, der Wert des Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(k + xi)^a}$ viel einfacher aus dem unbestimmten Integral:

$$(12') \qquad \int \frac{dx}{(k + xi)^a} = \frac{1}{(1-a)i}(k + xi)^{1-a} + C$$

erhalten wird.

Ist $a > 1$, so hat hier die Potenz von $k + xi$ auf der rechten Seite noch einen negativen Exponenten und wird wegen des in ihr enthaltenen Faktors $\dfrac{1}{\left|(k^2 + x^2)^{\frac{a-1}{2}}\right|}$ an beiden Grenzen zu Null. Man hat mithin:

$$(12_0) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(k + xi)^a} = 0 \qquad (a > 1),$$

oder in Ergänzung der früheren Formel (11):

$$(\tilde{1}2) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{cxi}}{(k + xi)^a}\, dx = 0 \qquad (a > 1;\ c \gtreqless 0).$$

Die Vergleichung dieses Resultats mit der (10) zeigt, dafs für $a > 1$ unser Integral (9_0) in Bezug auf den Parameter c in verschiedenen Intervallen, die in dem Werte $c = 0$ zusammenstofsen, durch verschiedene Ausdrücke dargestellt wird, ohne aber darum an dieser Stelle eine Unstetigkeit zu erleiden. Vielmehr machen beide Ausdrücke, da für $c = 0$ auch die rechte Seite der (10) in Null übergeht, zusammen eine einzige stetige Funktion aus.

Ist $a < 1$, so hat man rechts in der (12′) eine Potenz mit positivem Exponenten, die wegen des Faktors $\left|(k^2 + x^2)^{\frac{1-a}{2}}\right|$ an beiden Grenzen auch unter Hinzunahme der trigonometrischen konstanten Faktoren unendlich grofs wird. Das in Frage stehende Integral hat also für $a < 1$ keinen Sinn.

Der Fall $a \doteq 1$ ist für sich allein zu betrachten. Das unbestimmte Integral:

$$\int \frac{dx}{k + xi} = \int \frac{k - xi}{k^2 + x^2}\, dx = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{k} - \frac{1}{2} i \log (k^2 + x^2) + C$$

(vergl. § 24, II und III) liefert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{k + xi} = \pi - i(\infty - \infty)$$

Also auch dieses Integral besitzt, als Ganzes genommen, keinen Sinn. Doch ist wenigstens sein reeller Teil:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{k^2 + x^2} = \frac{\pi}{k}$$

nicht ohne Bedeutung.

83. Ersetzung des reellen Parameters k durch einen komplexen Wert. — In den Resultaten der beiden letzten Paragraphen kann, was für die Anwendungen wichtig ist, das positiv reelle k durch eine komplexe Gröſse $k + \theta i$ mit wiederum positiv reellem Elemente k ersetzt werden.

Diese Vertauschung hätte gleich von Haus aus in dem Integral des § 81 vorgenommen werden können, wie schon aus der Formel (§ 80, S. 166 f.):

$$\int_0^{\infty} e^{-(k + xi) y}\, y^{a-1}\, dy = \frac{\Gamma(a)}{(k + xi)^a} \qquad (k > 0),$$

von der wir ausgegangen sind, erhellt, weil man in ihr für x, das beliebig positiv oder negativ war, das zweiteilige $\theta + x$ setzen kann, wo also auch θ und x beide völlig beliebig sind. Daher darf man in dem späteren Integral nach x auch das neue x allein sich ändern lassen, θ aber konstant annehmen. Trennt man alsdann $\theta i + xi$, so hat man auf beiden Seiten der Gleichung statt des reellen k das imaginäre $k + \theta i$, in dem k wiederum positiv ist.

Aber auch aus den Resultaten selbst ergibt sich die Statthaftigkeit dieser Substitution. Denn vermittelst der Transformation $x = \theta + y$ geht die (10) des § 81, wenn man den konstanten Faktor $e^{c\theta i}$ hinüberwirft, unmittelbar in die Gleichung über:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{cxi}}{(k + \theta i + xi)^a}\, dx = \frac{2\pi}{\Gamma(a)}\, e^{-(k + \theta i) c} \cdot c^{a-1} \qquad (c > 0).$$

In den Gleichungen (11) und (12) aber ist der Faktor $e^{c\theta i}$ einfach zu streichen, und in der (12_0) ist er gar nicht vorhanden.

Endlich hätte dasselbe auch noch aus unserem Prinzip über die imaginären Argumente erschlossen werden können.

Specielle Fälle.

84. $a = 1$. **Die Laplaceschen Integrale.** — Für Werte des positiven Argumentes a, für welche $\Gamma(a)$ bekannt ist (61), wird das Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{cxi}}{(k+xi)^a}\, dx$ durch geschlossene Ausdrücke dargestellt. Den interessantesten Fall bilden die für $a = 1$, $\Gamma(1) = 1$ aus den Gleichungen (10) und (11) des § 81 entspringenden Formeln:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{cxi}}{k+xi}\, dx = 2\pi e^{-kc} \qquad (k > 0;\ c > 0), \tag{1}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{cxi}}{k+xi}\, dx = 0 \qquad (k > 0;\ c < 0), \tag{2}$$

aus denen sich durch geeignete Reduktionen eine Reihe weiterer Resultate herleiten läſst.

Es ist:

$$\frac{e^{cxi}}{k+xi} = \frac{k\cos cx + x \sin cx}{k^2 + x^2} + i\,\frac{k \sin cx - x\cos cx}{k^2+x^2}.$$

Der reelle Teil des komplexen Ausdrucks auf der rechten Seite dieser Gleichung ist eine gerade Funktion, der Faktor von i eine ungerade Funktion von x. Mithin erhält man aus der (1) durch Trennung des Reellen und Imaginären die Gleichungen:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{k\sin cx - x\cos cx}{k^2+x^2}\, dx = 0 \qquad (c > 0);$$

$$(1') \qquad \left\{\begin{aligned} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{k\cos cx + x\sin cx}{k^2+x^2}\, dx &= 2\pi e^{-kc}, \\ \int\limits_{0}^{\infty} \frac{k\cos cx + x\sin cx}{k^2+x^2}\, dx &= \pi e^{-kc} \end{aligned}\right\} \qquad (c > 0);$$

ferner noch aus der für ein negatives c gültigen Formel (2), wenn man in ihr c durch $-c$ ersetzt:

$$(2') \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k \cos cx - x \sin cx}{k^2 + x^2} dx = 0, \\ &\int_{0}^{\infty} \frac{k \cos cx - x \sin cx}{k^2 + x^2} dx = 0 \end{aligned} \right\} \quad (c > 0).$$

Dafs aus diesen Formeln alles Imaginäre verschwinden würde, war vorauszusehen, da ja das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{cxi}}{k + xi} dx$ etwas durchaus Reelles ausdrückt.

Da sich in den Formeln (1′) und (2′) unter dem Integralzeichen die Summe bezw. die Differenz derselben beiden Ausdrücke befindet und auch diese Ausdrücke zu den geraden Funktionen gehören, so gewinnt man durch Addition und Subtraktion der Formeln die Gleichungen:

$$(1_0) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos cx}{k^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{k} e^{-kc}, \quad \int_{0}^{\infty} \frac{\cos cx}{k^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2k} e^{-kc} \quad (c > 0);$$

$$(2_0) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin cx}{k^2 + x^2} dx = \pi e^{-kc}, \quad \int_{0}^{\infty} \frac{x \sin cx}{k^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-kc} \quad (c > 0).$$

Diese wichtigen speciellen Integrale verdankt man Laplace. Sie werden so häufig gebraucht, dafs sie in einer Übersicht über das ganze Gebiet nicht fehlen dürfen, und dafs man gutthut, sie sich immer gegenwärtig zu halten. Sie können auch auf anderem Wege gefunden werden, doch verdient die Ableitung specieller Fälle aus einer allgemeineren, sie umfassenden Formel immer den Vorzug.

Übrigens ergeben sich alle Resultate dieses Paragraphen auch ganz einfach aus den Grundeigenschaften der Gammafunktionen und könnten daher sehr wohl in Elementarlehrbüchern der bestimmten Integrale Platz finden. Denn die Gamma, deren Argument eine ganze Zahl ist, lassen sich unbestimmt integrieren, und die Potenz $(k + xi)^a$, auf die man durch Einführung des komplexen Parameters $k + xi$ kommt, birgt, da ja der Exponent a positiv ganz ist, gar keine Vieldeutigkeit in sich, so dafs eine Untersuchung über die imaginären Argumente nicht erforderlich wird.

Die Grundzüge einer solchen elementaren Herleitung der Laplaceschen Integrale sind in § *93 dargelegt.

Wie im vorigen Paragraphen gezeigt ist, darf in den obigen Formeln der Parameter k auch komplex mit wesentlich positivem reellem Element vorausgesetzt werden, hingegen besitzen sie in Bezug auf c nur Gültigkeit, wenn dieser Parameter reell und positiv ist. Und zwar tritt hier wieder das Phänomen auf, das wir schon öfters zu beobachten Gelegenheit gehabt haben, daſs dies die Formeln selbst zeigen. Denn während für ein negatives c die Integrale (1_0) sich gar nicht ändern und in den Integralen (2_0) doch nur das Zeichen umgekehrt wird [53], werden die Werte rechts ganz andere, indem der Exponent entgegengesetzt, also die Potenz reciprok wird. Wird man mithin durch die Rechnungen auf eines von jenen Integralen geführt, so muſs man es immer auf die Beschaffenheit des Parameters c hin prüfen und darf für ein negatives c unsere Formeln nicht in Anwendung bringen. Natürlich hätte man aber aus den allgemeinen Formeln, in denen ursprünglich c beliebig, jedoch nur reell sein durfte (vergl. S. 167), die Werte der betreffenden Integrale ohne weiteres auch für ein negatives c sich verschaffen können.

85. a ganze Zahl über 1. Das Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{cxi} \frac{f(x)}{\varphi(x)}\, dx$. —

Setzt man für a eine andere positive ganze Zahl als 1, so erhält man, wie schon bemerkt, aus den allgemeinen Resultaten des § 81 ebenfalls in geschlossener Form ausgewertete Integrale, indem alsdann $\Gamma(a)$ durch eine Fakultät dargestellt wird. Dabei hat man mehrere Fälle zu unterscheiden und darf auch die aus $c = 0$ entspringende (12_0) des § 82 in Anwendung bringen.

Um die Aufgabe noch zu verallgemeinern, betrachten wir das Integral:

$$(1) \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{cxi} \cdot \frac{f(x)}{\varphi(x)}\, dx,$$

welches eine Erweiterung des in § 29 f. behandelten Integrals darstellt, und wollen zeigen, daſs dasselbe vermittelst der obigen Formeln stets auf einen endlichen Ausdruck zurückführbar ist.

Den Fall, wo

$$(1') \qquad \varphi(x) = 0$$

vielfache Wurzeln hat, den wir in der Aufgabe des § 30 (S. 50) als unwichtiger bei Seite liefsen, dürfen wir jetzt nicht ausschliefsen. Ferner braucht wegen der in der Exponentialgröfse e^{cxi} enthaltenen trigonometrischen Faktoren der Grad des Zählers $f(x)$ nicht mehr wie damals um wenigstens zwei, sondern nur um eine Einheit niedriger zu sein als der des Nenners $\varphi(x)$, während natürlich $f(x)$ von gleichem oder höherem Grade nicht sein darf, weil sonst trotz des trigonometrischen Faktors das Integral unendlich würde.

Zerlegt man nun den rationalen Bruch $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ in seine Partialbrüche, deren Nenner also nicht linear zu sein brauchen, und bezeichnet eine beliebige Wurzel der (1′) durch $\alpha + \beta i$, wo β nicht gleich Null sein darf, weil aus den bekannten Gründen alle Wurzeln effektiv imaginär sein müssen, so hat man in Bezug auf ein solches Glied das Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{cxi}}{(x - \alpha - \beta i)^n}\, dx,$$

oder, nach Erweiterung mit i^n, das Integral:

$$i^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{cxi}}{(\beta - \alpha i + xi)^n}\, dx,$$

dessen Wert für ein positives β unmittelbar durch die Formeln des § 83 gegeben wird, indem man die ganze Zahl n an die Stelle von a setzt.

Ist aber β negativ, und ersetzen wir es deshalb der Deutlichkeit wegen durch $-\beta$, so erweitere man das letzterhaltene Integral noch durch $(-1)^n$ und transformiere es dann vermittelst $x = -y$, wodurch man auf das Integral:

$$(-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-cxi}}{(\beta + \alpha i + xi)^n}\, dx$$

geführt wird, auf welches wiederum die Formeln des § 83 anwendbar sind.

Für $n = 1$ hat man in denselben $a = 1$ zu setzen und erhält dann die Formeln (1) und (2) des § 84 für einen an Stelle des reellen positiven k tretenden komplexen Parameter $\beta \pm \alpha i$ [54].

Die vollständige Lösung der Aufgabe bietet somit nicht die geringste Schwierigkeit. Da aber weder die auszuführenden Additionen noch die Resultate ein größeres Interesse in Anspruch nehmen, so begnügen wir uns mit diesen Andeutungen.

Die Integrale $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(k+xi)^a\,(l\pm xi)^b}$.

86. Ihre Herleitung und Auswertung. — Andere sehr wichtige und interessante Integrale, die sich ebenfalls noch um die Gammafunktionen gruppieren, gewinnt man aus der Formel (10) des § 81:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{yxi}}{(k+xi)^a}\,dx=\frac{2\pi}{\Gamma(a)}\,e^{-ky}\,y^{a-1}\qquad (y>0),$$

wenn man sie mit $e^{-ly}\,y^{b-1}$ multipliciert und darauf nach dem Parameter y — auf der linken Seite in umgekehrter Ordnung — von 0 bis ∞ integriert.

Mit einem Blick ist zu übersehen, daß in der neuen Gleichung:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(k+xi)^a}\int\limits_0^{\infty}e^{-(l-xi)y}\,y^{b-1}\,dy=\frac{2\pi}{\Gamma(a)}\int\limits_0^{\infty}e^{-(k+l)y}\,y^{(a+b-1)-1}\,dy$$

die beiden Integrale nach y Gammafunktionen mit einem reellen bezw. komplexen Parameter darstellen, wofern nur, während a von Hause aus positiv ist und die neue Konstante b ihm darin folgt, die Bedingung erfüllt ist, daß auch, um das Unendlichwerden des entsprechenden Gamma zu verhindern, $a+b-1>0$, also $a+b>1$ ist. Durch Einsetzung der bekannten Ausdrücke in die vorstehende Gleichung ergibt sich demnach unmittelbar die Formel:

$$(1)\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(k+xi)^a\,(l-xi)^b}=2\pi\,\frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}\cdot\frac{1}{(k+l)^{a+b-1}}$$

$$(a,\,b>0;\ a+b>1),$$

die eine gewisse Analogie mit der Grundgleichung:

$$(a,\,b)=\frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

aufweist.

So wie k, kann in dieser Formel auch die neue Konstante l reell oder imaginär sein, aber mit jedenfalls positivem rein reellem Bestandteil.

Die Gleichung ist symmetrisch in Bezug auf a und b, k und l. Auf der rechten Seite ist diese Symmetrie offenkundig, links erhellt sie aus der Substitution $x = -y$, denn durch dieselbe nimmt das Integral die Gestalt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(k - xi)^a (l + xi)^b}$$

an, welche aus dem ursprünglichen Integral durch Vertauschung von k mit l und von a mit b hervorgeht.

Behandelt man die (11) des § 81, die wir jetzt vielmehr so schreiben:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-yxi}}{(k + xi)^a}\, dx = 0 \qquad (y > 0),$$

genau in derselben Weise, indem wir sie ebenfalls mit $e^{-ly} y^{b-1}$ multiplicieren und denselben Operationen unterwerfen, so ergibt sich offenbar das Resultat:

$$(2) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(k + xi)^a (l + xi)^b} = 0 \qquad \begin{pmatrix} a, b > 0; \\ a + b > 1 \end{pmatrix}$$

in welchem sich die Integralfunktion nur dadurch von der in der Formel (1) unterscheidet, dafs hier beide imaginären Teile additiv sind.

In beide Formeln liefsen sich leicht noch beliebig viele andere Konstanten als Parameter hineinbringen. Jedoch gehen wir auf diese Erweiterung als unwesentlich nicht ein.

87. Negative Werte für *a* oder *b*. — Dafs in den beiden Resultaten des vorigen Paragraphen $a + b > 1$ sein mufs, liegt auf der Hand, denn die Funktion $(k + xi)^{-a} (l \pm xi)^{-b}$ geriert sich bei der ihr unterzulegenden Bedeutung im Unendlichen wegen des Faktors $(k^2 + x^2)^{-\frac{a}{2}} (l^2 + x^2)^{-\frac{b}{2}}$ wie eine Potenz mit dem Exponenten $-(a + b)$, und das Integral einer solchen Potenz behält bekanntlich zwischen unendlichen Grenzen nur dann einen Sinn, wenn $a + b > 1$ ist. Zur Erfüllung dieser

Bedingung ist aber nicht vonnöten, dafs **beide** Parameter a, b positiv seien, wie wir es naturgemäfs bei der Herleitung der Integrale vorausgesetzt haben. Es könnte einer von ihnen, z. B. a, auch negativ sein, so dafs es sich alsdann, wenn wir der Deutlichkeit halber $-a$ schreiben, um die Integrale:

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(k+xi)^a}{(l \pm xi)^b}\, dx$$

handelte, die, wie leicht zu beweisen wäre, unter der Voraussetzung, dafs $b - a > 1$ ist, ebenfalls noch endlich und daher nicht ohne Bedeutung sind.

Es soll jetzt gezeigt werden, dafs auch in diesem Falle die Formeln des vorigen Paragraphen ihre Gültigkeit beibehalten. Selbstverständlich ist, dafs dann in der ersten dieser Formeln die Gammafunktion des negativen Argumentes nicht als Wert des Integrals $\int_0^\infty e^{-x} x^{a-1}\, dx$, das bekanntlich für ein negatives a unendlich grofs wird, aufgefafst werden darf, vielmehr gemäfs den Erläuterungen des § 62 durch die auch für negative Werte von a gültige Grundformel:

$$(2) \qquad \Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a)$$

definiert und bestimmt werden mufs.

Zwecks des zu führenden Nachweises unterziehen wir das Integral:

$$\int \frac{dx}{(k+xi)^a\,(l-xi)^b},$$

in dem beide Exponenten wie im vorigen Paragraphen positiv sein sollen, der teilweisen Integration in Bezug auf seinen ersten Faktor. Das gibt:

$$\int (k+xi)^{-a}\,(l-xi)^{-b}\, dx = \frac{1}{(1-a)i}\,(k+xi)^{1-a}\,(l-xi)^{-b}$$
$$- \frac{b}{1-a}\int \frac{dx}{(k+xi)^{a-1}\,(l-xi)^{b+1}},$$

und da sich hier das Glied von endlicher Form für $x = \pm\infty$ wie die Potenz $|x|^{1-(a+b)}$, deren Exponent wegen $a + b > 1$ negativ ist, geriert, mithin an beiden Grenzen als wirklich reciproke Potenz einer unendlichen Basis zu Null wird — was, wenn a ein echter Bruch sein sollte, mit der Potenz $(k+xi)^{1-a}$

für sich allein nicht der Fall wäre — so ergibt sich aus der vorstehenden Gleichung die Relation:

$$(3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(k+xi)^{a-1}(l-xi)^{b+1}} = \frac{a-1}{b} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(k+xi)^{a}(l-xi)^{b}}.$$

Vermittelst dieser Relation wird auf das bereits im vorigen Paragraphen ausgewertete Integral ein analoges Integral zurückgeführt, welches sich nur dadurch von jenem unterscheidet, daſs in ihm die beiden Exponenten um eine Einheit kleiner bezw. gröſser sind, während ihre Summe ungeändert gleich $a+b$ und also der Voraussetzung nach gröſser als 1 geblieben ist. Daher kann man, ohne Gefahr zu laufen, daſs einmal diese unerläſsliche Bedingung überschritten würde, dieselbe Operation beliebig oft wiederholen und, indem man dadurch successive die Exponenten $a-2$ und $b+2$, $a-3$ und $b+3$ u. s. w. erhält, es dahin bringen, daſs schlieſslich der Exponent von $k+xi$ negativ wird wie in dem Integral (1), dieses mithin ausgedrückt ist durch das uns schon bekannte Integral, in dem die beiden Konstanten a und b positiv sind.

Es ist jetzt nur noch darzuthun, daſs für solche negative Exponenten die (1) des § 86 bestehen bleibt, daſs also, wenn wir gleich das positive a kleiner als 1 voraussetzen, trotz des alsdann negativen Exponenten $a-1$ die Beziehung stattfindet:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(k+xi)^{a-1}(l-xi)^{b+1}} = 2\pi \frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a-1)\cdot\Gamma(b+1)} \cdot \frac{1}{(k+l)^{a+b-1}}.$$

Ersetzen wir aber das Integral auf der rechten Seite der (3) durch seinen derselben Formel entlehnten Wert, so erhält man:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(k+xi)^{a-1}(l-xi)^{b+1}} = 2\pi \cdot \frac{a-1}{b} \cdot \frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)} \cdot \frac{1}{(k+l)^{a+b-1}},$$

und es erübrigt nur noch, die Identität der Ausdrücke auf der rechten Seite dieser beiden Gleichungen nachzuweisen oder zu zeigen, daſs:

$$\frac{1}{\Gamma(a-1)\cdot\Gamma(b+1)}=\frac{a-1}{\Gamma(a)\cdot b\,\Gamma(b)}$$

ist. Diese Gleichheit hat aber in der That statt, wie aus der Definitionsformel (2) unmittelbar hervorgeht.

Somit gilt die Gleichung (1) des vorigen Paragraphen ganz allgemein mit der einzigen Einschränkung, daſs $a+b>1$ sei, während über das Zeichen von a und von b individuell weiter nichts festgesetzt ist. Und ganz ebenso verhält es sich mit der Formel (2), da mit ihr genau dieselben Manipulationen zulässig sind.

88. Das Integral $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{p-1}\cdot\cos q\theta\cdot d\theta$. — Nimmt man in der (1) des § 86 speciell die beiden Parameter k und l reell und einander gleich und, da es im Grunde nur auf ihr Verhältnis ankommt, geradezu gleich 1 an und ersetzt die Potenzen der komplexen Gröſsen durch ihre bekannten Ausdrücke [71, (4)], so erhält man die Gleichung:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|(1+x^2)^{-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}}\right|\cdot e^{i(b-a)\cdot\operatorname{arc\,tg}x}\,dx$$
$$=2\pi\cdot\frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}\cdot\frac{1}{2^{a+b-1}}\qquad(a+b>1),$$

welche durch Trennung des reellen und imaginären Teiles zwei Formeln in sich schlieſst.

Der unter dem Integralzeichen des imaginären Teiles befindliche Ausdruck:

$$\left|(1+x^2)^{-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}}\right|\cdot\sin\big((b-a)\operatorname{arc\,tg}x\big)$$

gehört, da für negative Werte von x die Potenz ungeändert bleibt, hingegen der zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ eingeschlossene arc tg, mithin auch der sinus selbst entgegengesetzt wird, zu den ungeraden Funktionen. Daher hat man, wie dies übrigens schon aus der obigen Gleichung, auf deren rechter Seite sich ein rein reeller Ausdruck befindet, mit Notwendigkeit hervorgeht:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|(1+x^2)^{-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}}\right|\cdot\sin\big((b-a)\operatorname{arc\,tg}x\big)\,dx=0\qquad(a+b>1),$$

und statt der ursprünglichen Gleichung die Formel:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|(1+x^2)^{-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}}\right|\cdot\cos\big((b-a)\operatorname{arc\,tg}x\big)\,dx$$
$$=2\pi\cdot\frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}\cdot\frac{1}{2^{a+b-1}}\quad(a+b>1),$$

oder, da man es hier mit einer geraden Funktion unter dem Integralzeichen zu thun hat:

$$\int_{0}^{\infty}\left|(1+x^2)^{-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}}\right|\cdot\cos\big((b-a)\operatorname{arc\,tg}x\big)\,dx$$
$$=\pi\cdot\frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}\cdot\frac{1}{2^{a+b-1}}\quad(a+b>1).$$

Behufs Vereinfachung der Argumente der Integralfunktion führen wir vermittelst der Substitution:

$$\operatorname{arc\,tg}x=\theta,\quad\text{also}\quad x=\operatorname{tg}\theta,\quad dx=(\cos\theta)^{-2}d\theta,$$
$$1+x^2=(\cos\theta)^{-2}$$

die neue Variable θ ein. Dadurch verwandelt sich vorstehende Gleichung in:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{a+b-2}\cdot\cos(b-a)\theta\cdot d\theta=\pi\cdot\frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}\cdot\frac{1}{2^{a+b-1}}$$
$$(a+b>1).$$

Setzen wir hier noch, um auch für die Parameter einfache Buchstaben zu haben:

$$a+b-1=p,\quad -a+b=q,$$

also:

$$b=\frac{p+q+1}{2},\quad a=\frac{p-q+1}{2},$$

so gewinnen wir endlich die sowohl bei reinen Untersuchungen als auch in vielen Anwendungen häufig gebrauchte Formel:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{p-1}\cdot\cos q\theta\cdot d\theta$$
$$=\pi\cdot\frac{\Gamma(p)}{2^p}\cdot\frac{1}{\Gamma\left(\frac{p+q+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{p-q+1}{2}\right)}$$
$$(p>0),$$

zu deren Gültigkeit einzige Bedingung ist, dafs p wesentlich positiv ist, während q ebensogut negativ wie positiv sein darf. Auch ist sie, wie es sein mufs, symmetrisch in Bezug auf q, d. h. bleibt für entgegengesetzte Werte von q ungeändert.

Das Integral einer Funktion, die aus dem Produkt einer Potenz eines cosinus mit dem cosinus eines anderen Winkels besteht, ist also auf die Gammafunktionen zurückführbar.

Fünfter Abschnitt.

Andere wichtige Integrale. — Übersicht der verschiedenen Methoden.

89. Vorbemerkung. — Wir gehen jetzt an die Ableitung anderer interessanter Integrale, ohne dafs es natürlich unsere Absicht sein kann, erschöpfende Vollständigkeit zu erzielen. Nur mufs man sich mit allen Methoden in Bekanntschaft setzen, die man überhaupt zur Auswertung oder Vereinfachung bestimmter Integrale in Anwendung bringt; dann wird man, wenn man einige Übungen darin nicht unterläfst, bei solchen Aufgaben nie in Verlegenheit geraten.

Die Vereinfachung von nicht in geschlossener Form darstellbaren bestimmten Integralen besteht hauptsächlich darin, sie auf andere Transcendenten zurückzuführen, die von einer geringeren Anzahl von Parametern abhängig sind, denn es ist einleuchtend, von welcher Erleichterung und von welchem Vorteil dies bei numerischer Berechnung der Transcendenten ist, da sich Tafeln für dieselben viel einfacher und leichter berechnen und aufstellen lassen, wenn sie nur von einem Argumente abhängen, und solcher Art sind auch die meisten Transcendenten, von welchen Tafeln existieren, wie die trigonometrischen Funktionen, die Logarithmen, die Gammafunktionen. — Für Transcendenten zweier Parameter sind schon Tafeln mit doppeltem Eingange von vielmal beträchtlicherem Umfange erforderlich.

Aufser der nächstliegenden Art und Weise der Berechnung bestimmter Integrale vermittelst der unbestimmten Integrale und aufser dem hochwichtigen Prinzip, dem zufolge man in sehr vielen Fällen reelle Parameter mit imaginären vertauschen kann, was dann naturgemäfs immer zu einer grofsen Anzahl von neuen Resultaten führt, haben wir bisher insbesondere zwei fruchtbare

Methoden zur Auswertung und Vereinfachung bestimmter Integrale fortwährend in Anwendung gebracht: 1) die Umkehrung der Ordnung bei Doppelintegralen oder, was dasselbe ist, das Integrieren unterm Integralzeichen, 2) die Transformation der bestimmten Integrale.

Dieser beiden Methoden bedienen wir uns auch noch bei den nächstfolgenden Aufgaben, zu deren Behandlung sich in den voraufgehenden Kapiteln keine passende Gelegenheit geboten hat.

Integrieren unter dem Integralzeichen.

***90. Das Integral** $\int_0^1 \frac{x^{\beta-1} - x^{\alpha-1}}{\log x}\,dx$. — Es ist:

$$\int_0^1 x^{y-1}\,dx = \frac{1}{y} \qquad (y > 0),$$

mithin:

$$\int_\alpha^\beta dy \int_0^1 x^{y-1}\,dx = \log\frac{\beta}{\alpha} \qquad (0 < \alpha < \beta).$$

Da aber:

$$\int x^{y-1}\,dy = \frac{x^{y-1}}{\log x} + C,$$

so erhält man durch Umkehrung der Integrationsfolge:

$$\int_0^1 dx \int_\alpha^\beta x^{y-1}\,dy = \int_0^1 dx \cdot \frac{x^{\beta-1} - x^{\alpha-1}}{\log x} = \log\frac{\beta}{\alpha} \qquad (0 < \alpha < \beta),$$

ein Integral, das unbestimmt nicht angebbar ist.

***91. Aus der Formel** $\int_0^\infty e^{-kx}\,dx = \frac{1}{k}$ **($k > 0$) abgeleitete Integrale.** — Es ist evident, dafs in der vorstehenden Formel gemäfs unserem desfallsigen Prinzip k auch imaginär mit positiv reellem Teil genommen werden darf, also die Gleichung besteht:

$$\int_0^\infty e^{-(k+\theta i)x}\,dx = \frac{1}{k+\theta i} = \frac{k-\theta i}{k^2+\theta^2} \qquad (k > 0).$$

Aus der Trennung des Reellen und Imaginären entspringen die beiden Formeln:

$$(1)\quad \int_0^\infty e^{-kx}\cos\theta x\cdot dx = \frac{k}{k^2+\theta^2};\quad \int_0^\infty e^{-kx}\sin\theta x\cdot dx = \frac{\theta}{k^2+\theta^2}$$
$$(k>0).$$

Diese Integrale sind übrigens als specielle Fälle in der Eulerschen Formel:

$$\int_0^\infty e^{-(k+\theta i)x}\cdot x^{a-1}\,dx = \frac{\Gamma(a)}{(k+\theta i)^a}\qquad \binom{k}{a}>0$$

für $a=1$ enthalten, wie z. B. für diesen Wert die aus ihr hergeleitete Gleichung (72):

$$\int_0^\infty e^{-kx}\cos\theta x\cdot x^{a-1}\,dx = \frac{\Gamma(a)}{\left|(k^2+\theta^2)^{\frac{a}{2}}\right|}\cdot\cos\left(a\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{\theta}{k}\right)$$

in die erste der Formeln (1) übergeht, indem sich rechts $\Gamma(a)$ auf 1 und der cosinus auf $\frac{k}{\left|\sqrt{k^2+\theta^2}\right|}$ reduciert.

Auch noch auf anderem Wege könnten diese Formeln abgeleitet werden.

Beide Gleichungen sollen jetzt nach θ integriert werden. Links an erster Stelle vollzogen, läfst sich diese Integration ausführen; auf der rechten Seite aber handelt es sich um dieselben Integrale, die schon in § 82 (S. 178, unten) vorkommen.

In der ersten Formel werde zwischen den Grenzen 0 und θ integriert, wodurch man sofort die neue Gleichung gewinnt:

$$(2)\qquad \int_0^\infty e^{-kx}\cdot\frac{\sin\theta x}{x}\cdot dx = \operatorname{arc\,tg}\frac{\theta}{k}\qquad (k>0).$$

In der zweiten Formel werde zwischen α und β integriert. Das gibt:

$$(3)\qquad \int_0^\infty e^{-kx}\cdot\frac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x}\cdot dx = \frac{1}{2}\log\frac{\beta^2+k^2}{\alpha^2+k^2}\qquad (k>0).$$

Eine analoge Integration nach k würde nicht wesentlich verschiedene Resultate liefern.

*92. Die Integrale $\int_0^\infty \frac{\sin\theta x}{x}\,dx$ und $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\cos hx\,dx$ [55]). —

Ganz besonderes Interesse gewinnt die Formel (2) des vorigen Paragraphen:

$$\int_0^\infty e^{-kx} \cdot \frac{\sin \theta x}{x} \cdot dx = \operatorname{arc\,tg} \frac{\theta}{k} \qquad (k > 0) \tag{1}$$

dadurch, dafs sie im Gegensatz zu den Integralen (1) daselbst kraft unseres in § 73 erwiesenen Prinzips auch noch für $k = 0$ gültig ist, weil gemäfs dem in § 47 aufgestellten Kriterium das Integral $\int_0^\infty \frac{1}{x} \cdot \sin \theta x \, dx$ einen Sinn besitzt. Dann liefert aber dieses eine Integral, je nachdem θ positiv oder negativ, oder $\frac{\theta}{0}$ gleich ∞ oder $-\infty$ ist, die zwei verschiedenen Werte:

$$\int_0^\infty \frac{\sin \theta x}{x} \, dx = \pm \frac{\pi}{2} \qquad (\theta \gtrless 0). \tag{2}$$

Für $\theta = 0$, wo eigentlich ein Integral gar nicht vorhanden ist, mufs dieser Ausdruck als das arithmetische Mittel der beiden Werte natürlich gleich Null sein, so dafs man die Formel aufstellen kann:

$$\int_0^\infty \frac{\sin \theta x}{x} \, dx = 0 \qquad (\theta = 0). \tag{2_0}$$

Aus der Subtraktion der beiden Gleichungen (2) und (1) voneinander entspringt noch die Formel:

$$\int_0^\infty (1 - e^{-kx}) \cdot \frac{\sin \theta x}{x} \cdot dx = \pm \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\theta}{k} \qquad (k > 0;\ \theta \gtrless 0),$$

deren beide Seiten für $k = 0$ selbst zu Null werden. Dies ist nicht nur an sich klar, sondern folgt auch mit Notwendigkeit daraus, dafs man in dem Integral (1) direkt $k = 0$ setzen durfte, was besagt, dafs dieses Integral eine stetige Funktion von k bis $k = 0$ incl. ist, mithin obige Differenz natürlich gleich Null sein mufs.

Zu noch anderen Resultaten führt sofort die aus der Relation:

$$2 \sin x \cos hx = \sin (1 + h) x + \sin (1 - h) x$$

hergeleitete Identität:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \cos hx \, dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin (1 + h) x}{x} \, dx + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin (1 - h) x}{x} \, dx.$$

Denn da in Anbetracht der Werte (2) und (2_0) für $-1 < h < 1$ jedes der beiden Integrale rechts gleich $\frac{\pi}{2}$, für ein aufserhalb dieser Grenzen gelegenes h aber das eine Integral $\frac{\pi}{2}$, das andere $-\frac{\pi}{2}$, und endlich für $h = \pm 1$ wieder das eine Integral $\frac{\pi}{2}$, das andere gleich Null ist, so gewinnt man die Formeln:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \cdot \cos hx \cdot dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{für } -1 < h < 1, \\ 0 & \text{für } h < -1 \text{ und } h > 1, \\ \frac{\pi}{4} & \text{für } h = \pm 1. \end{cases}$$

***93. Elementare Herleitung der Laplaceschen Formeln des § 84.** — Wir wollen in den Grundzügen darthun, wie man die früher mit Hülfe der Gammatheorie abgeleiteten Laplaceschen Formeln auch auf rein elementarem Wege sich verschaffen kann. Der Geist beider Methoden ist aber natürlich derselbe.

Den Ausgangspunkt bildet die Formel (1) des § *91:

$$(1) \qquad \int_0^\infty e^{-kx} \cos \theta x \cdot dx = \frac{k}{k^2 + \theta^2} \qquad (k > 0).$$

Nachdem wir dieselbe noch mit der Konstanten $\cos c\theta \cdot e^{-\alpha\theta}$ multipliciert, integrieren wir sie nach θ zwischen den Grenzen 0 und ∞. Ersetzt man zuvor noch das Produkt der cosinus durch die betreffende Summe zweier cosinus, so erhält man auf der linken Seite das Doppelintegral:

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-kx} dx \int_0^\infty e^{-\alpha\theta}\big(\cos(x+c)\theta + \cos(x-c)\theta\big) d\theta \quad (k > 0),$$

welches, um einen Sinn zu behalten, erfordert, dafs auch die Konstante $\alpha > 0$ sei. Die Integrationen nach θ können vermittelst der (1) vollzogen werden. Es ergibt sich dann die Gleichung:

$$k\int_0^\infty e^{-\alpha\theta} \cdot \frac{\cos c\theta}{k^2 + \theta^2}\, d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-kx}\left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + (x+c)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (x-c)^2}\right) dx$$
$$(k, \alpha > 0).$$

In dieser Formel darf man links vermöge der Prinzipien der §§ 73 und 47 α geradezu gleich Null setzen und rechts auf Grund der in § 81 angestellten Untersuchung, welche auch auf unser Integral als speciellen Fall des dort behandelten erstreckt werden kann, α bis zu Null hin abnehmen lassen. Dadurch gewinnt man unter Berücksichtigung der Relationen (7) und (7′) daselbst die erste Laplacesche Formel:

$$\int_0^\infty \frac{\cos c\theta}{k^2+\theta^2}\, d\theta = \frac{\pi}{2k} e^{\mp kc} \qquad (k > 0,\ c \gtreqless 0),$$

und wenn man diese nach c differentiiert, auch die andere:

$$\int_0^\infty \frac{\theta \sin c\theta}{k^2+\theta^2}\, d\theta = \frac{\pi}{2} e^{-kc} \qquad (k > 0,\ c > 0).$$

Man beachte, dafs diese Formel nicht noch weiter nach c differentiiert werden dürfte, denn man käme dadurch auf die Integralfunktion $\frac{\theta^2}{k^2+\theta^2}\cos c\theta$, deren Faktor $\frac{\theta^2}{k^2+\theta^2}$ im Unendlichen nicht mehr unendlich klein ist, deren zwischen unendlichen Grenzen genommenes Integral mithin keinen Sinn mehr besäfse.

Das Integrieren hingegen könnte fortgesetzt werden. Nach c z. B. zwischen den Grenzen 0 und α vollzogen, ergibt es die Formel:

$$\int_0^\infty \frac{d\theta}{k^2+\theta^2}(1-\cos\alpha\theta) = \frac{\pi}{2k}(1-e^{-k\alpha}) \qquad (\alpha,\ k > 0).$$

Transformationen.

94. Die Substitution $x = ay - \frac{b}{y}$. — Eine der früher mehrfach angewandten, wichtigen linearen Substitution $x = a + y$ analoge, sehr nützliche Substitution ist die folgende:

(1) $$x = ay - \frac{b}{y}.$$

Da diese Gleichung in Bezug auf x linear, in Bezug auf y quadratisch ist, so liefert sie zu jedem Werte von y nur einen

Wert von x, der durch die (1) selbst angegeben wird, hingegen zu jedem Werte von x zwei Werte von y, nämlich:

$$(2) \qquad y = \frac{x}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{x}{2a}\right)^2 + \frac{b}{a}}.$$

Wir setzen a und b beide positiv voraus; dann ist die absolute Wurzel $\left|\sqrt{\left(\frac{x}{2a}\right)^2 + \frac{b}{a}}\right|$ immer gröſser als $\frac{x}{2a}$, mithin von den beiden Werten von y stets der eine positiv, der andere negativ. Beschränken wir uns also auf den ersteren, so gehört zu jedem Wert von x auch nur ein und ein ganz bestimmter Wert von y:

$$(2_0) \qquad y = \frac{x}{2a} + \left|\sqrt{\left(\frac{x}{2a}\right)^2 + \frac{b}{a}}\right|,$$

und während x alle möglichen reellen Werte von $-\infty$ bis ∞ durchläuft, durchläuft y alle Werte von 0 bis ∞.

x ist nicht nur, wie schon bemerkt, eine durchaus eindeutige, sondern auch eine stetige Funktion von y. Denn da sie für $y = 0$ negativ unendlich und für $y = \infty$ positiv unendlich wird und, weil ihre erste Derivierte:

$$(1') \qquad \frac{dx}{dy} = a + \frac{b}{y^2}$$

immerfort positiv ist, mit y zugleich beständig wächst, so folgt, daſs sie, während y alle Werte von 0 bis ∞ durchläuft, alle möglichen reellen Werte von $-\infty$ bis ∞ annimmt, und daſs nicht zwei verschiedenen Werten von y ein und derselbe Wert von x entsprechen kann. Auch ersieht man hieraus, daſs genau dasselbe für alle negativen Werte von y, die die andere Wurzel (2) liefert, gelten würde, d. h. daſs auch für sie die Funktion (1) stetig von $-\infty$ bis ∞ wächst. Nur für $y = 0$ selbst erleidet sie eine Unterbrechung der Stetigkeit, indem sie von ∞ zu $-\infty$ überspringt.

Besonders anwendbar und interessant ist diese Transformation (1) für eine beliebige Funktion φ von x^2.

Hat dann das ursprüngliche Integral die reinen Zahlenwerte l, m zu Grenzen, und bezeichnet man die aus der (2_0) hergeleiteten zugehörigen Grenzwerte von y bezw. mit λ, μ, so hat man mit Berücksichtigung der (1') die Relation:

$$\int_l^m \varphi(x^2)\,dx = \int_\lambda^\mu \varphi\left(ay - \frac{b}{y}\right)^2 \cdot \left(a + \frac{b}{y^2}\right) \cdot dy$$

$$= a\int_\lambda^\mu \varphi\left(ay - \frac{b}{y}\right)^2 dy + b\int_\lambda^\mu \varphi\left(ay - \frac{b}{y}\right)^2 \cdot \frac{dy}{y^2}.$$

Hier kann vermittelst der Substitution:

$$y = \frac{p}{z},\quad \frac{dy}{y^2} = -\frac{dz}{p}$$

das zweite Integral auf der rechten Seite so umgeformt werden, dafs es genau dieselbe Funktion wie das andere Integral enthält und, wenn man $p = \frac{b}{a}$ setzt, auch mit demselben Faktor a statt mit b multipliciert ist. So gewinnt man die Relation:

$$(3)\qquad \int_l^m \varphi(x^2)\,dx = a\int_\lambda^\mu \varphi\left(ay - \frac{b}{y}\right)^2 \cdot dy - a\int_{\frac{b}{a\lambda}}^{\frac{b}{a\mu}} \varphi\left(\frac{b}{y} - ay\right)^2 \cdot dy.$$

Von ganz besonderem Interesse ist diese Transformation in den Fällen, wo die beiden Integrale rechts dieselben Grenzen haben und in ein Integral zusammengefafst werden können. Dies tritt ein für die speciellen Werte:

$$l = -\infty,\quad m = \infty,$$

denen in Anbetracht der Stetigkeit der (1) die aus der (2_0) hergeleiteten Werte:

$$\lambda = 0,\quad \mu = \infty,\quad \text{also}\quad \frac{b}{a\lambda} = \infty,\quad \frac{b}{a\mu} = 0$$

zugehören. Dann verwandelt sich die (3) in:

$$\int_{-\infty}^\infty \varphi(x)^2\,dx = 2a\int_0^\infty \varphi\left(ay - \frac{b}{y}\right)^2 \cdot dy,$$

oder, da:

$$(3')\qquad \left(ay - \frac{b}{y}\right)^2 = a^2y^2 + \frac{b^2}{y^2} - 2ab,$$

also $\varphi\left(ay - \frac{b}{y}\right)^2$ eine gerade Funktion von y ist, in:

$$(3_0)\qquad \int_{-\infty}^\infty \varphi(x^2)\,dx = a\int_{-\infty}^\infty \varphi\left(ay - \frac{b}{y}\right)^2 \cdot dy.$$

Diese Formel ist anwendbar auf die speciellen Funktionen $\sin(x^2)$ oder $\cos(x^2)$ oder e^{-x^2}, deren zwischen unendlichen Grenzen genommenen Integrale uns bereits bekannt sind. Den Fall $\varphi(x^2) = e^{-x^2}$ betrachten wir genauer.

95. Anwendung auf das Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$. — Aus dem bekannten Integral (77):

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = |\sqrt{\pi}|$$

leitet man vermittelst der (3_0) des vorigen Paragraphen unter Berücksichtigung der (3′), wenn man alle Konstanten gleich hinüberschafft, sofort die Formel ab:

$$(1) \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2y^2-\frac{b^2}{y^2}}\, dy = \frac{|\sqrt{\pi}|}{a}\, e^{-2ab} \qquad (a,\ b > 0),$$

oder, wenn man noch a^2, b^2 durch die positiven α, β und a, b durch deren absolute Quadratwurzeln ersetzt:

$$(2) \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2-\frac{\beta}{y^2}}\, dy = \left|\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right| e^{-2|\sqrt{\alpha\beta}|} \qquad (\alpha,\ \beta > 0).$$

Die Parameter α und β dürfen auf Grund unseres bekannten Prinzips auch imaginär vorausgesetzt werden, natürlich mit wesentlich positivem reellem Bestandteile, so dafs, wenn man diese Vertauschung schon in der (1) mit a oder b vornimmt und z. B. $a = k + \theta i$ setzt, auch der reelle Teil des Quadrats, $k^2 - \theta^2$, gröfser als Null sein mufs. Die Notwendigkeit dieser einschränkenden Bedingung ist evident. Denn ersetzt man in der (2) z. B. β durch das imaginäre $\beta + \gamma i$, und wäre hier β negativ, so würde der Faktor $e^{-\frac{\beta}{y^2}}$ für $y = 0$ unstatthaft unendlich grofs, während er allerdings an den Grenzen, für $y = \pm\infty$, wo er gleich 1 würde, kein Hindernis darstellte. Ebensowenig dürfte der reelle Bestandteil eines imaginären α negativ sein, weil dann der betreffende Faktor $e^{-\alpha y^2}$ gerade umgekehrt zwar für $y = 0$ gleich 1, aber an den Grenzen unstatthaft unendlich grofs würde.

Unter diesen Bedingungen können wir also z. B. die Gleichung aufsetzen:

$$(2') \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2 - \frac{\beta + \gamma i}{y^2}} \cdot dy = \left|\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right| e^{-2|\sqrt{\alpha(\beta+\gamma i)}|} \qquad (\alpha, \beta > 0),$$

denn da die Ausdrücke auf ihren beiden Seiten offenbar völlig stetige Funktionen von β und γ sind und wegen der (2) für $\gamma = 0$ Gleichheit zwischen diesen Ausdrücken besteht, so sind sie nach dem Prinzip des § 68 überhaupt gleich.

Und nun gilt die Gleichung (2′) auch noch für den Grenzfall $\beta = 0$, denn man überzeugt sich leicht — hinsichtlich des Integrals durch Anwendung des in den §§ 69 f. angegebenen Verfahrens —, daſs die Funktionen stetig sind bis $\beta = 0$ incl., mithin dem Prinzip des § 73 gemäſs die (2′) auch für $\beta = 0$ Gültigkeit besitzt.

Ebenso könnte α imaginär [56]), und wiederum sein reeller positiver Teil gleich Null genommen werden. Und alle diese verschiedenen Fälle lieſsen sich alsdann noch miteinander kombinieren.

Setzen wir z. B., um nur eine dieser Kombinationen durchzuführen, in der (2′) $\beta = 0$ oder in der (2):

$$\beta = \gamma i = \gamma e^{\frac{\pi}{2} i}, \text{ also } |\sqrt{\beta}| = |\sqrt{\gamma}| \cdot e^{\frac{\pi}{4} i} = \left|\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\right| (1 + i),$$
$$(\gamma > 0) \text{ [57]},$$

so erhält man:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2 - \frac{\gamma i}{y^2}} dy = \left|\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right| \cdot e^{-|\sqrt{2\alpha\gamma}|} e^{-|\sqrt{2\alpha\gamma}| i} \qquad (\alpha, \gamma > 0),$$

woraus die beiden nicht unwichtigen, z. B. in der mathematischen Wärmetheorie gebrauchten Formeln entspringen:

$$\left.\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2} \cos \frac{\gamma}{y^2} dy &= \left|\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right| e^{-|\sqrt{2\alpha\gamma}|} \cos |\sqrt{2\alpha\gamma}|, \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2} \sin \frac{\gamma}{y^2} dy &= \left|\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right| e^{-|\sqrt{2\alpha\gamma}|} \sin |\sqrt{2\alpha\gamma}| \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha, \gamma > 0).$$

Das Integral $\int_0^\infty e^{-kx^2} \frac{\cos 2\alpha x}{p^2 + x^2} dx$.

96. Seine Reduktion. — Wir wollen nun an einem Beispiele zeigen, wie man mit Hülfe aller bisher erworbenen Kenntnisse bei einiger Übung immer ohne Mühe im stande sein wird, den Wert eines vorliegenden, mehr oder minder komplizierten Integrals zu bestimmen oder, falls dies nicht ausführbar sein sollte, zu erkennen, ob und welcher Reduktion es fähig ist.

Das ziemlich komplizierte Integral:

$$\int_0^\infty e^{-kx^2} \frac{\cos 2\alpha x}{p^2 + x^2}\, dx, \tag{1}$$

dem man bei physikalischen Problemen und insbesondere in der mathematischen Wärmelehre begegnet, hängt von drei Parametern ab, von denen k wesentlich positiv sein muſs, die wir aber sämtlich reell und positiv voraussetzen wollen.

Dieses Integral läſst sich auf eine weniger zusammengesetzte Transcendente zurückführen. Dazu kann man verschiedene Wege einschlagen, auf die man sämtlich durch die Erwägung geleitet wird, daſs, wenn einer der Faktoren e^{-kx^2}, $\frac{1}{p^2 + x^2}$ fehlte, man den Wert des verbleibenden Integrals vermittelst der wichtigen Laplaceschen Formeln [79; 84, (1_0)] in geschlossener Form anzugeben im stande wäre. Ist es daher möglich, einen jener Faktoren durch ein bestimmtes Integral auszudrücken, so lieſse sich nach Umkehrung der Integrationsordnung die nunmehr erstere Integration vollziehen, und man erhielte ein neues, einfaches Integral von voraussichtlich einfacherem Charakter.

Unter allen hier möglichen Methoden dürfte wohl die einfachste sein, den Faktor $\frac{1}{p^2 + x^2}$ durch das bestimmte Integral (28):

$$\frac{1}{p^2 + x^2} = \int_0^\infty e^{-y(p^2 + x^2)}\, dy$$

zu ersetzen. Dadurch verwandelt sich die (1) zunächst in das Doppelintegral:

$$\int_0^\infty e^{-p^2 y}\, dy \int_0^\infty e^{-(k+y)x^2} \cos 2\alpha x\, dx,$$

und weiter, da das innere Integral, in dem $k + y$ immer positiv bleibt, nichts anderes ist als das Laplacesche Integral des § 79, nach Einsetzung seines bekannten Wertes in das einfache Integral:

$$\frac{1}{2}|\sqrt{\pi}|\int_0^\infty \frac{1}{|\sqrt{k+y}|}\, e^{-p^2 y - \frac{\alpha^2}{k+y}}\, dy.$$

Wie man sieht, ist dieses schon viel leichter zu handhaben als die (1), da, abgesehen von dem Faktor $\frac{1}{|\sqrt{k+y}|}$, hier nur eine Exponentialgröfse vorhanden ist, während dort eine solche mit einem trigonometrischen Faktor und einem Binom verbunden war. Aber vermittelst der Substitution:

$$|\sqrt{k+y}| = z, \quad \text{also:} \quad y = 0,\ z = |\sqrt{k}|;\ y = \infty,\ z = \infty,$$

kann man sich auch noch von dem Faktor $\frac{1}{|\sqrt{k+y}|}$ befreien und gewinnt dann die Formel:

$$(2) \qquad \int_0^\infty e^{-kx^2} \cdot \frac{\cos 2\alpha x}{p^2 + x^2}\, dx = |\sqrt{\pi}|\, e^{p^2 k} \int_{|\sqrt{k}|}^\infty e^{-p^2 z^2 - \frac{\alpha^2}{z^2}}\, dz.$$

Jetzt ist unser Integral genau auf das Integral (1) des vorigen Paragraphen zurückgeführt, jedoch mit dem Unterschiede, dafs es dort zwischen unendlichen Grenzen, von $-\infty$ (oder 0) bis ∞, genommen war, wodurch allein seine Darstellung in geschlossener Form ermöglicht wurde, während wir hier zur unteren Grenze eine beliebige positive Konstante haben und aus diesem Grunde eine wenn auch einfache Transcendente eigener Art vorliegt.

Es ist übrigens bemerkenswert, dafs die vorstehende Gleichung auch noch für den Grenzwert $k = 0$ gültig ist und dann, wie es auch sein mufs, vermittelst der (1) des vorigen Paragraphen auf die Laplacesche Formel (84):

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2\alpha x}{p^2 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{2p}\, e^{-2\alpha p}$$

zurückführt.

Behufs weiterer Vereinfachung transformieren wir nun das Integral auf der rechten Seite der (2) mittels derselben Substitution, die wir in § 94 in Anwendung gebracht haben, nur dafs wir dabei die umgekehrte Ordnung einhalten. Wir setzen also:

$$pz - \frac{\alpha}{z} = u, \quad \text{mithin:} \quad p^2 z^2 + \frac{\alpha^2}{z^2} = u^2 + 2p\alpha;$$

$$z = \frac{u}{2p} + \left|\sqrt{\frac{u^2}{4p^2} + \frac{\alpha}{p}}\right|; \quad dz = \left(\frac{1}{2p} + \frac{d}{du}\left|\sqrt{\frac{u^2}{4p^2} + \frac{\alpha}{p}}\right|\right) du,$$

und erhalten statt der rechten Seite der (2):

$$(2') \quad |\sqrt{\pi}|\, e^{-2p\alpha + p^2 k} \left(\frac{1}{2p} \int\limits_{p|\sqrt{k}| - \frac{\alpha}{|\sqrt{k}|}}^{\infty} e^{-u^2} du + \int\limits_{p|\sqrt{k}| - \frac{\alpha}{|\sqrt{k}|}}^{\infty} e^{-u^2} \cdot \frac{d}{du}\left|\sqrt{\frac{u^2}{4p^2} + \frac{\alpha}{p}}\right| \cdot du\right).$$

Hier bleibt das erste Integral, wie es ist; in das zweite führen wir aber, genau den Weg des § 94 rückwärts weiter verfolgend, noch die neue Variable:

$$|\sqrt{u^2 + 4p\alpha}| = v$$

ein. Das gibt:

$$u^2 = v^2 - 4p\alpha; \quad \frac{d}{du}\left|\sqrt{\frac{u^2}{4p^2} + \frac{\alpha}{p}}\right| du = \frac{1}{2p} dv;$$

$$u = \infty,\ v = \infty; \quad u = p|\sqrt{k}| - \frac{\alpha}{|\sqrt{k}|},\ v = p|\sqrt{k}| + \frac{\alpha}{|\sqrt{k}|},$$

mithin:

$$(2'') \quad \int\limits_{p|\sqrt{k}| - \frac{\alpha}{|\sqrt{k}|}}^{\infty} e^{-u^2} \frac{d}{du}\left|\sqrt{\frac{u^2}{4p^2} + \frac{\alpha}{p}}\right| du = \frac{1}{2p} e^{4p\alpha} \int\limits_{p|\sqrt{k}| + \frac{\alpha}{|\sqrt{k}|}}^{\infty} e^{-v^2} dv.$$

Somit gelangen wir zu der äufserst eleganten Formel:

$$(2_0) \quad \begin{aligned} &\int\limits_0^{\infty} e^{-kx^2} \cdot \frac{\cos 2\alpha x}{p^2 + x^2} dx \\ &= |\sqrt{\pi}| \cdot \frac{1}{2p} e^{p^2 k} \left(e^{-2p\alpha} \int\limits_{p|\sqrt{k}| - \frac{\alpha}{|\sqrt{k}|}}^{\infty} e^{-u^2} du + e^{2p\alpha} \int\limits_{p|\sqrt{k}| + \frac{\alpha}{|\sqrt{k}|}}^{\infty} e^{-u^2} du\right), \end{aligned}$$

durch welche unser Integral auf eine einzige, sehr einfache Transcendente, nämlich auf das Integral $\int e^{-u^2} du$ zurückgeführt wird, das unbestimmt oder zwischen beliebigen Grenzen in geschlossener Form nicht angebbar ist, aber zwischen unendlichen Grenzen bekanntlich den Wert:

$$(3_0) \quad \int\limits_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2} |\sqrt{\pi}|$$

repräsentiert. Die Integrale auf der rechten Seite der (2_0) haben nun zwar auch ∞ zur oberen Grenze, aber ihre unteren Grenzen sind gewisse andere, und zwar voneinander verschiedene Konstanten, weshalb sich auch die beiden Integrale nicht vereinigen lassen.

Wegen ihrer ungemeinen Wichtigkeit und ihres häufigen Gebrauches hat man Tafeln dieser Transcendente für beliebige Grenzen konstruiert, natürlich aber nur in der Form:

$$(3) \qquad \int_0^\theta e^{-u^2}\, du,$$

wo θ beliebig positiv ist; denn beide Grenzen beliebig oder die obere unendlich und die untere konstant zu nehmen, wäre von Überfluſs, weil vermittelst der (3_0) und (3) diese Fälle durch einfache Subtraktion erhalten werden können, nämlich:

$$\int_\theta^\infty e^{-u^2}\, du = \frac{1}{2}|\sqrt{\pi}| - \int_0^\theta e^{-u^2}\, du;$$

$$\int_\eta^\theta e^{-u^2}\, du = \int_0^\theta e^{-u^2}\, du - \int_0^\eta e^{-u^2}\, du.$$

Die Tafeln der (3) brauchen nur von sehr geringem Umfange zu sein, etwa nur sich von $\theta = 0$ bis $\theta = 10$ zu erstrecken, da die Exponentialgröſse e^{-u^2} so auſserordentlich schnell abfällt, daſs über jenen Wert von θ hinaus bis zu einer noch so groſsen oberen Grenze der Zuwachs des Integrals verschwindend klein ist.

Weiteres über diese Transcendente ist in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen beizubringen.

97. Bemerkungen zu der letzten Transformation. — In Bezug auf die in der (2″) des vorigen Paragraphen bewirkte Vereinfachung des Integrals:

$$(1) \qquad \int_{p|\sqrt{k}| - \frac{\alpha}{|\sqrt{k}|}}^{\infty} e^{-u^2} \frac{d}{du}|\sqrt{u^2 + 4p\alpha}| \cdot du$$

ist auf folgende Erscheinung aufmerksam zu machen. Obschon wir die Konstanten p, $\sqrt{k}$, α sämtlich positiv vorausgesetzt haben, kann sehr wohl für besondere Werte derselben die untere Grenze:

$$(1') \qquad p|\sqrt{k}| - \frac{\alpha}{|\sqrt{k}|}$$

negativ sein. Bei der darauf in der (1) vorgenommenen Substitution:

$$(1'') \qquad |\sqrt{u^2 + 4p\alpha}| = v$$

bleibt in dem transformierten Integral die obere Grenze unverändert ∞, seine untere Grenze wird aber derjenige Wert von v, den die (1″) liefert, wenn man für u den Ausdruck (1′) setzt. Ist dieser Ausdruck nun negativ, so würde, weil in der (1″) u nur im Quadrat vorkommt, auch noch ein späterer Wert von u, nämlich der zwischen den Grenzen des Integrals (1) liegende numerische Wert der (1′), $u = \left| p\,|\sqrt{k}| - \frac{\alpha}{|\sqrt{k}|} \right|$ [58]), einen Wert von v ergeben, der mit dem unteren Grenzwert identisch wäre. Überhaupt würde allen Werten von u, die numerisch kleiner sind als der absolute Wert von (1′), und die sowohl positiv wie negativ innerhalb der Grenzen des Integrals (1) liegen, für beide Zeichen immer ein und derselbe Wert von v entsprechen. Dies und allein schon der Umstand, daſs in dem durch die Transformation erhaltenen Integral ein zwischen den Grenzen gelegener Wert von v mit seiner unteren Grenze übereinstimmt, widerspricht aber der Definition und den Grundeigenschaften eines bestimmten Integrals, dessen zwischen den beiden Grenzen eingeschalteten Werte der Variablen sämtlich in einem Sinne aufeinander folgen müssen. Mit anderen Worten, das transformierte Integral würde doch nur die sich stetig in demselben Sinne von der unteren bis zur oberen Grenze erstreckende Ausdehnung haben, d. i. nur denjenigen Teil des ursprünglichen Integrals (1) wiedergeben, welcher sich von dem absoluten Werte der unteren Grenze (1′) bis zu ∞ erstreckt, den unteren Teil der (1) aber, dessen hin und her gehenden Elemente sich gegenseitig aufheben, gar nicht in sich enthalten. Denn während u alle Werte von dem absoluten Werte der (1′) an stetig bis zu ∞ durchläuft, wachsen offenbar gleichzeitig die Werte von v aus der (1″), so daſs, wie es auch die Transformation der Integrale, soll anders sie nicht unzureichend sein, durchaus erfordert, zu jedem Werte von v ein besonderer Wert von u gehört und namentlich nicht mehreren Werten von u derselbe Wert von v entspricht.

Doch diese Schwierigkeiten werden im vorliegenden Falle durch die besondere Natur der unter dem Integral (1) befindlichen Funktion von selbst beseitigt. Denn da dieselbe nach Einsetzung des Wertes des Differentialquotienten sich als eine ungerade Funktion von u, nämlich als die Funktion:

$$e^{-u^2} \cdot \frac{u}{|\sqrt{u^2 + 4p\alpha}|}$$

erweist, so mufs bekanntlich der untere Teil des Integrals (1):

$$\int\limits_{p|\sqrt{k}| - \frac{\alpha}{|\sqrt{k}|}}^{\left|p|\sqrt{k}| - \frac{\alpha}{|\sqrt{k}|}\right|} e^{-u^2} \cdot \frac{d}{du} |\sqrt{u^2 + 4p\alpha}| \cdot du = 0$$

sein, und das ganze Integral (1) daher denselben Wert haben, als wenn es sich nur von $\left|p|\sqrt{k}| - \frac{\alpha}{|\sqrt{k}|}\right|$ bis ∞ erstreckte. Dann handelt es sich aber um eine ganz triviale Transformation, die nun ohne weiteres zu der (2″) des vorigen Paragraphen auch bezüglich der unteren Grenze führt, denn von den beiden dem Werte $u = \left|p|\sqrt{k}| - \frac{\alpha}{|\sqrt{k}|}\right|$ zugehörigen Werten $v = \pm\left(p|\sqrt{k}| + \frac{\alpha}{|\sqrt{k}|}\right)$ genügt allein der positive Wert $p|\sqrt{k}| + \frac{\alpha}{|\sqrt{k}|}$ der obigen Bedingung (1″).

Ausdrücklich ist hervorzuheben, dafs die im vorstehenden erörterte Schwierigkeit nie eintritt, wenn die untere Grenze $p|\sqrt{k}| - \frac{\alpha}{|\sqrt{k}|}$ von vornherein positiv ist. Und bei dem ersten Integral in der (2′) des vorigen Paragraphen, das gar keiner Transformation unterzogen wird und immer von dem Werte seiner unteren Grenze an, mag dieser positiv oder negativ sein, bis zu ∞ zu nehmen ist, kommt sie überhaupt nie in Frage.

98. Specielle Fälle. — 1. Die Zahl der Parameter, von denen das Integral

$$\int_0^\infty e^{-kx^2} \frac{\cos 2\alpha x}{p^2 + x^2} dx \tag{1}$$

abhängig ist, kann leicht reduciert werden, denn durch die Substitution $x = py$ geht es über in:

$$\frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-kp^2x^2} \frac{\cos 2\alpha p x}{1 + x^2} dx,$$

und wenn man noch die willkürlichen positiven Konstanten:

$$\alpha p = \beta,\quad k p^2 = \gamma,$$

also die ursprünglichen Parameter $\alpha = \frac{\beta}{p}$, $k = \frac{\gamma}{p^2}$ setzt, so verwandelt es sich in das Integral:

$$\frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-\gamma x^2} \frac{\cos 2\beta x}{1 + x^2}\, dx.$$

2. In der Formel (2_0) des § 96:

$$(2)\quad \begin{aligned}&\int_0^\infty e^{-kx^2} \cdot \frac{\cos 2\alpha x}{p^2 + x^2}\, dx \\ &= |\sqrt{\pi}| \cdot \frac{1}{2p} e^{p^2 k}\left(e^{-2p\alpha}\int_{p|\sqrt{k}| - \frac{\alpha}{|\sqrt{k}|}}^\infty e^{-u^2}\, du + e^{2p\alpha}\int_{p|\sqrt{k}| + \frac{\alpha}{|\sqrt{k}|}}^\infty e^{-u^2}\, du\right)\end{aligned}$$

sind mehrere an sich und relativ interessante specielle Fälle enthalten.

So gelangt man, wie auch dort schon bemerkt worden ist (S. 202), für $k = 0$ zu dem Laplaceschen Integral des § 84, und wenn auch die Ableitung desselben auf diesem Wege nicht gerade empfehlenswert ist, so gibt sie doch eine geeignete Kontrolle ab für die mit dem Integral (1) vorgenommenen Rechnungen. Denn da dieses Integral offenbar stetig ist in Bezug auf ein positives k und das für $k = 0$ aus ihm entspringende Integral $\int_0^\infty \frac{\cos 2\alpha x}{p^2 + x^2}\, dx$ einen Sinn besitzt, weil $\frac{1}{p^2 + x^2}$ im Unendlichen unendlich klein ist, und da ferner auch die rechte Seite der vorstehenden Gleichung offenbar eine stetige Funktion von k ist, so gilt diese Gleichung vermöge des bekannten Prinzips auch noch für $k = 0$, indem man links in ihr geradezu diesen Grenzwert einsetzt, rechts aber die positive Wurzel aus k zugleich mit k bis zu Null hin abnehmen läſst. Dann wird hier aber die untere Grenze des ersten Integrals $-\infty$, des zweiten ∞, so daſs man

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}\, du = |\sqrt{\pi}|,\quad \text{bezw.}\quad \int_\infty^\infty e^{-u^2}\, du = 0$$

hat und in der That sich die Formel ergibt:

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2\alpha x}{p^2 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{2p} e^{-2p\alpha}.$$

Und die Entwicklung der (2_0) des § 96 hatte nicht etwa diese Formel zur Voraussetzung, sondern stützte sich lediglich auf das Laplacesche Integral des § 79.

3. Eine andere Species der (2) liefert der Grenzfall $\alpha = 0$, für den sie, in Anbetracht, dafs alles in ihr in Bezug auf α stetig ist, offenbar auch Geltung besitzt. Man gewinnt so die nicht selten gebrauchte Formel:

$$(3) \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-kx^2}}{p^2 + x^2}\, dx = \frac{|\sqrt{\pi}|}{p} e^{p^2 k} \int_{p|\sqrt{k}|}^\infty e^{-u^2}\, du.$$

4. Eine Ansicht der Formel (2) zeigt ferner, dafs sie in Bezug auf α symmetrisch ist, d. h. sich nicht ändert, wenn man statt α, das bisher wie die anderen Parameter positiv vorausgesetzt wurde, $-\alpha$ schreibt, auch nicht rechts, wo dann nur die beiden Integrale ihre Rolle vertauschen. Mithin gilt die Formel gleicherweise auch für ein negatives α. Selbstverständlich hat man sich aber dann bei der unter Nr. 2 vorgenommenen Specialisierung vorher über die Wahl des Zeichens von α schlüssig zu machen.

Nicht so verhält es sich in Bezug auf p. Links bleibt das Integral zwar auch für entgegengesetzte Werte von p ungeändert, rechts aber erhält man wesentlich verschiedene Werte, indem namentlich die unteren Grenzen der Integrale völlig andere werden.

Dafs k nicht negativ gesetzt werden darf, liegt auf der Hand.

Das Integral $\int_0^\infty \frac{e^{-kx}}{p^2 + x^2}\, dx$.

99. Seine Reduktion. — Als letztes Beispiel wählen wir das Integral:

$$(1) \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-kx}}{p^2 + x^2}\, dx,$$

das nicht selten vorkommt und uns Gelegenheit bieten wird, auf ein sehr beachtenswertes Phänomen die Aufmerksamkeit zu lenken.

Dieses Integral unterscheidet sich nur dadurch von dem Integral auf der linken Seite der (3) des vorigen Paragraphen, dafs der Exponent von e vom ersten Grade ist. Der Parameter k mufs notwendig positiv sein, doch soll auch p gröfser als Null vorausgesetzt werden.

Das zur Reduktion des Integrals einzuschlagende Verfahren ist dasselbe wie bei der Aufgabe des § 96, jedoch mufs man dabei mit der gehörigen Umsicht zu Werke gehen. Wollten wir wie dort den Faktor $\frac{1}{p^2+x^2}$ durch das Integral $\int\limits_0^\infty e^{-(p^2+x^2)y}\,dy$ ersetzen, so würde das hier gar nichts nützen, indem schon die an erster Stelle zu vollziehende Integration nach x:

$$\int\limits_0^\infty e^{-yx^2-kx}\,dx = e^{\frac{k^2}{4y}}\int\limits_0^\infty e^{-\left(\sqrt{y}\cdot x+\frac{k}{2\sqrt{y}}\right)^2}dx = \frac{1}{\sqrt{y}}\,e^{\frac{k^2}{4y}}\int\limits_{\frac{k}{2\sqrt{y}}}^\infty e^{-u^2}\,du,$$

auf ein Integral führt, das, wie wir in § 96 gesehen haben, wegen des Wertes seiner unteren Grenze eine in geschlossener Form nicht darstellbare Transcendente involviert.

Hingegen liefert uns die zweite der Formeln (1) des § *91 [59]), wenn wir in ihr die Variable durch y bezeichnen und dann x, das nachher nur positive Werte annimmt, für k und p für θ setzen, einen geeigneten Ausdruck für den obigen Faktor, nämlich:

$$\frac{1}{p^2+x^2} = \frac{1}{p}\int\limits_0^\infty e^{-yx}\sin py\,dy \qquad (p>0).$$

Denn vermittelst dieses Wertes und unter Benutzung der Formel $\int\limits_0^\infty e^{-(k+y)x}\,dx = \frac{1}{k+y}$ erhält man:

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-kx}}{p^2+x^2}\,dx = \frac{1}{p}\int\limits_0^\infty \sin py\,dy\int\limits_0^\infty e^{-(k+y)x}\,dx = \frac{1}{p}\int\limits_0^\infty \frac{\sin py}{k+y}\,dy,$$

und hieraus schliefslich vermöge der Substitution $k+y=z$:

$$(2)\qquad \begin{aligned}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-kx}}{p^2+x^2}\,dx &= \frac{1}{p}\int\limits_k^\infty \frac{dz}{z}\sin p(z-k)\\ &= \frac{1}{p}\left(\cos pk\int\limits_k^\infty \frac{\sin pz}{z}\,dz - \sin pk\int\limits_k^\infty \frac{\cos pz}{z}\,dz\right)\end{aligned}$$

$$(k>0,\ p>0).$$

Man kann unser Integral auch noch von einem der beiden Parameter befreien. Wendet man nämlich auf das ursprüngliche Integral die Substitution $x = py$ und auf das reducierte Integral die Substitution $pz = z'$ an und setzt aufserdem:

$$kp = k',$$

wo also k' wiederum eine beliebige positive Konstante bezeichnet, so wird:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-kx}}{p^2 + x^2}\,dx = \frac{1}{p}\int_0^\infty \frac{e^{-k'x}}{1 + x^2}\,dx$$

und:

$$\int_k^\infty \frac{dz}{z} \sin p(z - k) = \int_{k'}^\infty \frac{dz}{z} \sin(z - k').$$

Unser Integral hängt also nur von einer Konstanten ab, und da k' und p ganz beliebige positive Werte repräsentieren, so folgt aus der vorstehenden Reduktion der Parameter, dafs man in der (2), ohne ihrer Allgemeinheit Abbruch zu thun, direkt $p = 1$ setzen und die Gleichung aufstellen darf:

$$(2_0) \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-kx}}{1 + x^2}\,dx = \int_k^\infty \frac{dz}{z} \sin(z - k) \qquad (k > 0).$$

100. Definition und Charakter der semikonvergenten Reihen. — Obgleich man an dem Integral $\int_0^\infty \frac{e^{-kx}}{1 + x^2}\,dx$ sofort erkennt, dafs es mit wachsendem k beständig kleiner wird, ist es doch wünschenswert, genauer zu wissen, in welchem Verhältnis seine Abnahme und das Wachsen seines Parameters zueinander stehen. Aufschlufs über diese Frage erlangt man dadurch, dafs sich unser Integral in eine nach negativen Potenzen von k fortschreitende, wenn auch nicht rein konvergierende Reihe, die das Integral zur Summe hätte, so doch in eine sogenannte semikonvergente Reihe entwickeln läfst. Da es sich hierbei um ein durchaus in die Lehre von den bestimmten Integralen gehöriges Thema handelt, wie es sich ja auch hier von selbst uns darbietet, so wollen wir bei seiner hohen Wichtigkeit und häufigen Anwendung etwas näher auf diesen Gegenstand eingehen.

Unter einer semikonvergenten Reihe versteht man eine unendliche Reihe, deren Glieder zwar anfangs bis zu einem gewissen Range immer kleiner werden, darüber hinaus aber im Gegenteil bis ins Unendliche wachsen. Da jedoch eine solche Reihe aufserdem immer die Eigentümlichkeit aufweist — und dies gilt *a fortiori* auch in Betreff der divergierenden Glieder — dafs, bei welchem Gliede man sie auch abbricht, ihr Rest stets numerisch kleiner ist als das erste weggelassene Glied und dasselbe Zeichen besitzt wie dieses, und da die Stelle des Umschlags sich erst in einer gewissen Entfernung befindet, so ersieht man, dafs sie trotzdem geeignet ist, einen Näherungswert abzugeben für den endlichen Ausdruck, durch dessen Entwicklung sie entstanden ist, und den zur Summe zu haben ihre Aufgabe ist. Denn der Rest der Reihe oder der Fehler des Näherungswertes ist nun immer zwischen zwei Grenzen, der Null und dem ersten weggelassenen Gliede, eingeschlossen und wird daher um so kleiner gemacht werden können, je schneller die Reihe in ihrem konvergenten Teile abfällt, d. h. je numerisch kleinere Glieder in ihm vorkommen. Nimmt man also n Glieder der Reihe und bezeichnet ihre Summe durch s_n, das folgende Glied durch u_{n+1}, so mufs der Wert der Reihe, mithin auch der Wert des durch sie dargestellten Ausdrucks immer zwischen s_n und $s_n + u_{n+1}$ liegen. Ihr wesentlicher Unterschied von den rein konvergenten Reihen besteht demnach darin, dafs die Genauigkeit nicht beliebig weit getrieben, der Fehler nicht beliebig klein gemacht werden kann. Sobald aber ein sehr kleines Glied in der Reihe vorkommt, wird man sie unmittelbar vor demselben abbrechen: die Summe der vorangehenden Glieder differiert dann weniger von dem wahren Wert des fraglichen Ausdrucks, als das folgende Glied ausmacht.

Aus leicht ersichtlichem Grunde pflegt man diese Reihen auch Grenzreihen, *séries limites*, zu benennen, was aber nicht so bezeichnend ist, denn die Eigenschaft, die Grenzen eines Ausdrucks anzugeben, besitzen auch andere, völlig konvergente unendliche Reihen, wie es z. B. von der in § 47 (S. 89) betrachteten Reihe bekannt ist.

Auch sonst begegnet man vielfach semikonvergenten Reihen, so in der Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Bestimmung der Anzahl k der Kombinationen und in der mathematischen Physik, wenn es sich um ein anfänglich verwickeltes Phänomen handelt, das aber im weiteren Verlaufe der Zeit k je länger je mehr eine immer gröfsere Regelmäfsigkeit und einen gesetzmäfsigen Charakter annimmt.

101. Entwicklung des Integrals $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-kx}}{1+x^2}\,dx$ in eine semikonvergente Reihe. — Diese Reihe kann sowohl aus der reducierten Form des Integrals als aus dem Integral selbst[60]) hergeleitet werden. Wir ziehen es vor, beide Entwicklungen zu geben.

1. Man wende auf das transformierte Integral:

$$\int\limits_k^\infty \frac{dz}{z} \sin(z-k), \tag{1}$$

und zwar immer auf den trigonometrischen Faktor wiederholt teilweise Integration an:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dz}{z} \sin(z-k) &= -\frac{\cos(z-k)}{z} - \int \frac{dz}{z^2} \cos(z-k),\\
\int \frac{dz}{z^2} \cos(z-k) &= \frac{\sin(z-k)}{z^2} + 2\int \frac{dz}{z^3} \sin(z-k),\\
\int \frac{dz}{z^3} \sin(z-k) &= -\frac{\cos(z-k)}{z^3} - 3\int \frac{dz}{z^4} \cos(z-k),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Bricht man z. B. nach sechsmaliger Integration ab und setzt der Reihe nach die Werte der Integrale ein, so gibt das:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dz}{z} \sin(z-k) &= -\frac{\cos(z-k)}{z} - \frac{\sin(z-k)}{z^2}\\
&+ 2\cdot\frac{\cos(z-k)}{z^3} + 2\cdot 3\cdot\frac{\sin(z-k)}{z^4} - 2\cdot 3\cdot 4\cdot\frac{\cos(z-k)}{z^5}\\
&- 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\frac{\sin(z-k)}{z^6} - 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\int\frac{dz}{z^7}\sin(z-k).
\end{aligned}$$

mithin:

$$\begin{aligned}
\int\limits_k^\infty \frac{dz}{z} \sin(z-k) &= \frac{1}{k} - \frac{1\cdot 2}{k^3} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{k^5}\\
&\quad - 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\int\limits_k^\infty \frac{dz}{z^7}\sin(z-k),
\end{aligned} \tag{1_0}$$

so dafs unser Integral in eine nach negativen Potenzen von k fortlaufende und durch ihren in Form eines bestimmten Integrals genau ausgedrückten Rest ergänzte Reihe entwickelt ist. Den Nachweis der Semikonvergenz der Reihe, die übrigens auch hier leicht erkennbar ist, werden wir erst am Schlufs der folgenden Entwicklung führen.

2. Der unter dem Integral:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-kx}}{1+x^2}\,dx \tag{2}$$

befindliche Faktor $\frac{1}{1+x^2}$ kann zwar unmittelbar durch die nach Potenzen von x^2 fortschreitende Reihe:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + - \cdots \tag{2'}$$

ausgedrückt werden. Da diese Reihe aber nur konvergiert, solange x ein positiver oder negativer echter Bruch ist, während sie für $|x| > 1$ gleich von vorn an divergiert und für $x = \pm 1$ eine sogenannte schwankende Reihe bildet, die je nach ihrer Gliederzahl abwechselnd 0 oder 1 zur Summe hat, so ist sie zur Darstellung unseres Integrals untauglich, denn es ist wohl zu beachten, dafs alle Bedingungen einer strikten Reihenentwicklung auch bei der Multiplikation mit e^{-kx} und bei der nachherigen Integration nach x erfüllt sein müssen, und dazu ist erforderlich, dafs die Reihe für alle positiven Werte von x von 0 bis ∞ ihre Konvergenz beibehalte.

Eine dieser Bedingung Genüge leistende Entwicklung des Bruches $\frac{1}{1+x^2}$ gelingt mit Hülfe der durch ihren Rest ergänzten Taylorschen Reihe:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \cdots$$
$$+ \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \varepsilon h)$$
$$(0 \leq \varepsilon \leq 1),$$

denn auf die Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{x};\ f'(x) = -\frac{1}{x^2},\ f''(x) = (-1)^2 \cdot \frac{2!}{x^3}, \cdots,$$
$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot \frac{n!}{x^{n+1}}$$

angewendet, ergibt sie:

$$\frac{1}{x+h} = \frac{1}{x} - \frac{h}{x^2} + \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1} \cdot \frac{h^{n-1}}{x^n} + (-1)^n \cdot \frac{h^n}{(x+\varepsilon h)^{n+1}},$$

und da die Funktion $\frac{1}{x}$ und ihre Derivierten stetig sind von $x = \infty$ bis $x = 0$ excl., so gilt diese Gleichung den bekannten Bedingungen zufolge (s. „Anwendungen“ 17) für jedes beliebige positive x und jedes noch so grofse positive h und auch, was aber hier nicht in Betracht kommt, für beliebige negative Werte von x und h oder ein positives $h < |x|$. Es ist daher auch statthaft, in der vorstehenden Gleichung $x = 1$ zu nehmen und h den stets positiven Wert x^2 beizulegen, wodurch sie sich in

$$(2'') \quad \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + \cdots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(1+\varepsilon x^2)^{n+1}}$$

verwandelt. Diese Reihe, in der die Glieder natürlich abwechselnd positiv und negativ sind, stimmt, wie es auch sein mufs, mit der (2′) überein, gilt aber jetzt, weil sie durch den Rest ergänzt ist, für alle Werte von x.

Gehen wir nun zu unserem Integral (2) über, so ergibt sich aus der (2″) zunächst:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-kx}}{1+x^2}\,dx = \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \int_0^\infty e^{-kx} x^{2s}\,dx + (-1)^n \int_0^\infty \frac{e^{-kx} x^{2n}\,dx}{(1+\varepsilon x^2)^{n+1}}.$$

Da hier die Integrale unter dem Summenzeichen Gammafunktionen positiver ganzer Argumente sind, so hat man:

$$\int_0^\infty e^{-kx} x^{2s+1-1}\,dx = \frac{\Gamma(2s+1)}{k^{2s+1}} = \frac{(2s)!}{k^{2s+1}},$$

und was den Rest anbetrifft, der der Kürze halber durch r bezeichnet werde, so wäre er o h n e den unter dem Integralzeichen befindlichen Nenner nichts anderes als das dem Werte $s = n$ zugehörige und an die Stelle des Restes tretende f o l g e n d e Glied dieser Reihe, nämlich:

$$(-1)^n \cdot \frac{\Gamma(2n+1)}{k^{2n+1}} = (-1)^n \cdot \frac{(2n)!}{k^{2n+1}}.$$

Da aber, um r selbst zu erhalten, noch ein jedes der wesentlich positiven Differentialelemente dieses Integrals durch $(1+\varepsilon x^2)^{n+1}$, also, weil εx^2 immer positiv und additiv ist, durch eine die Einheit übersteigende positive Gröfse zu dividieren ist, so liegt offenbar der wahre Wert von r zwischen den Grenzen 0 und $(-1)^n \cdot \frac{(2n)!}{k^{2n+1}}$; oder es ist, wenn θ wiederum einen gewissen, aber unbekannten positiven echten Bruch bezeichnet:

$$r = (-1)^n \cdot \frac{(2n)!}{k^{2n+1}} \cdot \theta \qquad (0 \leqq \theta \leqq 1).$$

Hieraus erhellt, dafs der Rest stets numerisch kleiner ist als das erste fortgelassene Glied und dasselbe Zeichen wie dieses besitzt.

Vermöge der obigen Werte hat man also jetzt:

$$(2_0) \quad \begin{aligned} \int_0^\infty \frac{e^{-kx}}{1+x^2}\,dx &= \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \cdot \frac{(2s)!}{k^{2s+1}} + (-1)^n \cdot \frac{(2n)!}{k^{2n+1}} \cdot \theta \\ &= \frac{1}{k} - \frac{1\cdot 2}{k^3} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{k^5} - \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{k^7} + - \cdots + r \end{aligned}$$

und kann nun von dieser letzten Reihe beliebig viele Glieder nehmen und den zugehörigen Rest addieren. Zugleich weifs man aber auch, dafs der Wert des Integrals immer zwischen der Summe der n in Betracht gezogenen Glieder und der Summe der $n+1$ ersten Glieder liegt. Bricht man also die Reihe, sobald ein sehr kleines Glied in ihr vorkommt, unmittelbar vor diesem ab, so differiert die erlangte Summe um weniger von dem wahren Werte des Integrals, als das kleine folgende Glied ausmacht.

So weist die (2_0) alle für eine semikonvergente Reihe charakteristischen Eigenschaften auf, auch betreffs ihrer schliefslichen Divergenz, die eine Folge davon ist, dafs die Fakultäten im Zähler schneller zunehmen als die Potenzen im Nenner, was allerdings um so später eintreten wird, je gröfser k ist. In der That, aus der Beschaffenheit des allgemeinen Gliedes:

$$\frac{(2s)!}{k^{2s+1}} = \frac{1}{k} \times \frac{1}{k} \cdot \frac{2}{k} \cdot \frac{3}{k} \cdots \frac{2s}{k}$$

ist ersichtlich, dafs, solange $s < \frac{k}{2}$, jedes folgende Glied kleiner wird, also die Reihe konvergiert, dafs aber, sobald $2s > k$ geworden ist, die folgenden Glieder immer gröfser werden und von da an die Reihe divergiert. Gleichzeitig ergibt diese Betrachtung, dafs dasjenige Glied, für welches $2s < k$, $2s+2 > k$, das kleinste der ganzen Reihe ist.

102. Differentiieren unter dem Integralzeichen. — Der Methode der doppelten Integration oder der Einführung eines neuen Integrals unter dem Integralzeichen, welche sich als eines der wirksamsten Mittel zur Auffindung und Auswertung bestimmter Integrale erwiesen hat, gerade entgegengesetzt ist das Verfahren der Differentiation unter dem Integralzeichen in Bezug auf einen Parameter gemäfs den in den §§ 18 f. entwickelten Formeln. Durch dieses Verfahren, welches wir bisher noch gar nicht benutzt haben[61]), das aber ebenfalls in zahlreichen Fällen zu demselben Geschäft zweckmäfsig in Anwendung gebracht werden kann, läfst sich zweierlei erreichen: 1) die unmittelbare Darstellung neuer Integrale durch endliche Ausdrücke, 2) die Aufstellung einer Gleichung zwischen einem vorliegenden Integral und seinem Differentialquotienten, wodurch die Auswertung des Integrals auf die Integration einer Differentialgleichung zurückgeführt wird.

*1. Wir müssen uns auf ein einziges Beispiel der direkten Differentiation unter dem Integralzeichen beschränken[62]) und wählen dazu die Eulerschen Formeln:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{x+1} = \frac{\pi}{\sin a\pi} \qquad (0<a<1) \tag{1}$$

und

$$\int_0^\infty \frac{x^{-a-1}\,dx}{x+2\cos\theta+\frac{1}{x}} = \pi\cdot\frac{\sin a\theta}{\sin a\pi\cdot\sin\theta}$$

$$(0<a<1,\quad -\pi<\theta<\pi),$$

von denen die erstere wiederholt nach dem Parameter a, die andere z. B. nach θ differentiiert werden kann. Doch erzielt man dadurch Resultate von nur geringem Interesse.

Differentiiert man aber die aus der (1) vermittelst der Substitution $x=\frac{x'}{\alpha}$ $(\alpha>0)$ gewonnene Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{\alpha+x} = \frac{\pi\alpha^{a-1}}{\sin a\pi} \qquad (0<a<1,\ \alpha>0)$$

wiederholt nach α, so erhält man bemerkenswertere Formeln:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{(\alpha+x)^2} = \frac{\pi(1-a)\,\alpha^{a-2}}{\sin a\pi};$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{(\alpha+x)^3} = \frac{\pi(1-a)(2-a)\,\alpha^{a-3}}{2\sin a\pi}; \ldots$$

$$(0 < a < 1,\ \alpha > 0).$$

Fortgesetzte Differentiation führt also auf eine beliebig lange Reihe von Resultaten, die sich dadurch auszeichnen, dafs im Nenner der Integralfunktion immer höhere ganze Potenzen von $\alpha + x$ erscheinen.

2. Um an einem Beispiele zu zeigen, wie man sich durch das angedeutete Verfahren eine Differentialgleichung verschaffen kann, wählen wir das in den §§ 96 ff. behandelte Integral:

$$u = \int_0^\infty e^{-kx^2} \cdot \frac{\cos 2\alpha x}{p^2 + x^2} \cdot dx, \tag{2}$$

das sich mit ziemlich gleicher Leichtigkeit nach den Parametern α oder k differentiieren läfst. So erhält man für seine Derivierte nach k:

$$\frac{du}{dk} = -\int_0^\infty x^2 e^{-kx^2} \cdot \frac{\cos 2\alpha x}{p^2 + x^2} \cdot dx,$$

und wenn man nun diese Gleichung von der mit p^2 multiplicierten Gleichung (2) subtrahiert, so fällt in der unter einem Integralzeichen vereinigten Integralfunktion der Nenner $p^2 + x^2$ ganz heraus. Dadurch wird die rechte Seite auf die bekannte Laplacesche Formel (79): $\int_0^\infty e^{-kx^2} \cdot \cos 2\alpha x\,dx = \left|\sqrt{\frac{\pi}{k}}\right| e^{-\frac{\alpha^2}{k}}$, reduciert und die Relation gewonnen:

$$-\frac{du}{dk} + p^2 u = \left|\sqrt{\frac{\pi}{k}}\right| \cdot e^{-\frac{\alpha^2}{k}}.$$

Man hat also eine lineare Differentialgleichung der ersten Ordnung mit konstanten Koeffizienten von u und seiner Derivierten, die sich nach der bekannten Methode oder auch, weil die Gleichung vom ersten Grade ist, stets integrieren läfst.

Von der weiteren Ausführung der Aufgabe, bei der es sich namentlich noch um die Bestimmung der Konstanten handelt, sehen wir ab, bemerken aber, dafs es eine empfehlenswerte Übung ist, die Reduktion des Integrals (2) auch auf diesem Wege herbeizuführen.

Die Differentiation nach α müfste, um x^2 herauszubringen, zweimal geschehen, würde also auf $\frac{d^2u}{d\alpha^2}$ und mithin auf eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung führen, im übrigen aber keine wesentlichen Änderungen zur Folge haben.

***103. Sonderbeweis der Eulerschen Formel:**

$$\int_0^\infty e^{-(k+\theta i)x} x^{a-1}\, dx = \frac{\Gamma(a)}{(k+\theta i)^a} \qquad (k > 0). -$$

Die früher auf Grund unserer allgemeinen Sätze über die komplexen Parameter bewiesene Gültigkeit dieser Formel läfst sich pekuliär mit Hülfe der Differentiation unter dem Integralzeichen auch auf folgende einfache Art darthun.

Man setze:

$$\int_0^\infty e^{-(k+\theta i)x} \cdot x^{a-1}\, dx = u, \quad \frac{\Gamma(a)}{(k+\theta i)^a} = v,$$

und bilde die ersten Derivierten von u und v nach θ. Zunächst ist:

$$\frac{du}{d\theta} = -i \int_0^\infty e^{-(k+\theta i)x} \cdot x^a\, dx. \tag{1}$$

Teilweise Integration ergibt aber:

$$\int e^{-(k+\theta i)x} x^{a-1}\, dx = \frac{x^a}{a} e^{-(k+\theta i)x} + \frac{k+\theta i}{a} \int e^{-(k+\theta i)x} \cdot x^a\, dx,$$

mithin:

$$u = \frac{k+\theta i}{a} \int_0^\infty e^{-(k+\theta i)x} \cdot x^a\, dx.$$

Vermöge dieser Relation verwandelt sich die (1) in:

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{a i}{k+\theta i} \cdot u. \tag{1_0}$$

Ferner erhält man direkt:

$$\frac{dv}{d\theta} = \frac{-i a \Gamma(a)}{(k+\theta i)^{a+1}} = -\frac{a i}{k+\theta i} \cdot v. \tag{2_0}$$

Es haben also u und v, deren völlige Identität erwiesen werden soll, die Eigenschaft gemein, dafs sie, nach θ differentiiert, dieselbe Differentialgleichung der ersten Ordnung ergeben, woraus folgt, dafs sie nur um eine nach θ Konstante voneinander differieren können. Denn bezeichnen wir den (nicht konstanten) Koeffizienten $-\dfrac{ai}{k+\theta i}$ durch m, so ist die u und v gemeinschaftliche Differentialgleichung:

$$\frac{dy}{y} = m\, d\theta,$$

deren vollständiges Integral

$$y = e^{\int m\, d\theta}$$

nur eine, in $\int m\, d\theta$ einbegriffene, willkürliche Konstante enthält. Nun ist aber für $\theta = 0$:

$$u = \int_0^\infty e^{-kx} \cdot x^{a-1}\, dx = \frac{\Gamma(a)}{k^a}, \quad \text{und auch} \quad v = \frac{\Gamma(a)}{k^a},$$

also $u = v$ [63]). Mithin ist die Konstante gleich Null und daher überhaupt:

$$u = v.$$

104. Reihenentwicklung. — Integrale zwischen imaginären Grenzen. — Ein anderes Mittel zur Auswertung oder Vereinfachung bestimmter Integrale besteht in der Entwicklung eines Faktors der Integralfunktion in eine Reihe und in der darauf zu vollziehenden Integration der einzelnen Glieder der Reihe. Bei diesem wichtigen, in § 101 in Anwendung gebrachten Verfahren ist aber wohl darauf zu achten, dafs im Verlauf der ganzen Rechnung nur konvergente Reihen auftreten, denn selbst wenn die Endresultate durch solche Reihen dargestellt, aber vermittelst divergierender Reihen erhalten wären, so würden sich betreffs ihrer Gültigkeit Zweifel erheben. —

Endlich ist noch auf die bereits in § 65 (S. 126) berührte Methode der Integration nach imaginären Variablen, also auch zwischen imaginären Grenzen hinzuweisen. Aber so wirksam und bedeutend diese Methode auch ist, so müssen wir doch darauf Verzicht leisten, näher auf dieselbe einzugehen.

ZWEITER TEIL.

DIE MEHRFACHEN INTEGRALE.

Sechster Abschnitt.

Die Doppelintegrale.

Erstes Kapitel.

Theorie des Doppelintegrals.

105. Herleitung, Bedeutung und Grundeigenschaften des Doppelintegrals. — In diesem zweiten Teile unserer Vorlesung haben wir uns mit der Lehre von den mehrfachen bestimmten Integralen zu befassen, und zwar werden wir nacheinander zunächst im gegenwärtigen Abschnitt die doppelten, darauf die dreifachen und schliefslich die vielfachen Integrale einer genaueren Behandlung unterziehen[64]. Die doppelten und dreifachen Integrale lassen wir hier, obwohl man auch sie natürlich von jeder geometrischen Betrachtung befreien und rein analytisch untersuchen könnte, um des Vorzuges einer weit kürzeren und anschaulicheren Darstellungsweise willen aus geometrischen Gesichtspunkten heraus entstehen, oder legen ihnen vielmehr, wie das Folgende zeigen wird, mechanische Vorstellungen zu Grunde.

Von der auf die beiden Achsen OX, OY bezogenen unendlichen Ebene sei ein bestimmtes, beliebig grofses und durch irgend welche gerade Linien oder eine beliebig gestaltete graphische Kurve begrenztes Stück F abgesondert und an jeder Stelle mit einer gewissen Dichtigkeit

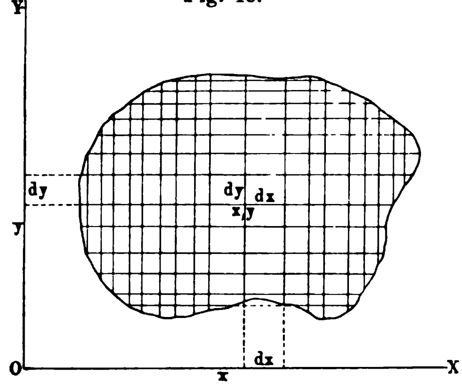
$$\rho = f(x, y) \tag{I}$$

behaftet, so dafs man es mit einer Masse in zwei Dimensionen zu thun hat. Dann führt die Aufgabe, die Gesamtmasse dieses Ebenenstückes zu finden, von selbst auf die Konstituierung des Doppelintegrals.

Notwendige Beschränkungen sind nur, dafs 1) die Dichtigkeit ϱ in dem ganzen abgeschlossenen Raume F durchaus eine stetige Funktion von x und y sei, d. h. sich mit diesen Variablen selbst nur allmählich ändere und nirgend unendlich werde, und dafs 2) auch der in Rede stehende Raum F durchaus nur endliche Ausdehnungen besitze.

Zur Lösung dieser Aufgabe ist es erforderlich, das Ebenenstück F in Elemente zu zerschneiden, wozu wir, obschon ihre Wahl ganz in unser Belieben gestellt ist, naturgemäfs zwei Systeme mit den Achsen paralleler Geraden in Anwendung bringen. Ob die Parallelen jeden Systems sich in gleichen Abständen voneinander befinden oder nicht, ist an sich ganz gleichgültig: das Wesentliche ist nur, dafs ihre Distanzen mehr und mehr abnehmen, damit an der Grenze das ganze Stück Ebene F in lauter unendlich kleine Elementchen zerteilt sei. Setzen wir endlich noch, was zwar ebenfalls keineswegs notwendig, aber am einfachsten ist, ein orthogonales Koordinatensystem voraus, so werden die Elemente sämtlich die Gestalt von Rechtecken haben.

Fig. 15.



Es seien (Fig. 15) die Seiten des an der Stelle (x, y) gelegenen Elementarrechtecks entsprechend dx und dy, so ist sein Inhalt

$$dx\,dy. \tag{1}$$

Um aber zu dem Ausdruck für seine Masse zu gelangen, beachte man, dafs bei nicht homogener Masse die Dichtigkeit, d. h. das Verhältnis der Masse zum Volumen, ein Grenzbegriff ist — genau, wie die Geschwindigkeit bei ungleichförmiger Bewegung —, nämlich den Wert darstellt, gegen den bei gleichzeitig bis ins Unendliche abnehmendem Zähler und Nenner jener Quotient konvergiert. Daher wird die Dichtigkeit ϱ des Elementes $dx\,dy$, die an seiner einen Ecke genau gleich $f(x, y)$ ist, in Anbetracht, dafs sie ja eine stetige Funktion von x und y

sein soll, sowie wegen der kleinen Dimensionen des Rechtecks, überall gleich

$$\varrho + \sigma$$

gesetzt werden dürfen, wo σ eine kleine, zugleich mit dx und dy bis zu Null hin abnehmende (positive oder negative) Gröſse bedeutet. Mithin hat man als Masse des Elementes:

$$dx\,dy \cdot (\varrho + \sigma) = dx\,dy \cdot f(x, y) + \sigma\,dx\,dy, \tag{2}$$

und folglich für die Masse des ganzen Ebenenstückes F offenbar das genau über die Ausdehnungen von F zu erstreckende Doppelintegral:

$$\iint dx\,dy\,(\varrho + \sigma) = \iint dx\,dy\,f(x, y) + \iint dx\,dy \cdot \sigma. \tag{II'}$$

Nun ist aber auf der rechten Seite dieser Gleichung in dem zweiten Doppelintegral augenfällig jedes Element $dx\,dy\,\sigma$ unendlich vielmal kleiner als das korrespondierende Element $dx\,dy\,f(x, y)$ des anderen Integrals; daher gilt dasselbe auch für die beiden Integrale selbst. Es darf also das zweite Integral gegen das erste vernachlässigt und die Gesamtmasse von F *pure* gleich

$$\iint dx\,dy\,f(x, y) \tag{II}$$

gesetzt werden. Auch ist ja in Ansehung, daſs das Integral $\iint dx\,dy$ den Inhalt des Ebenenstückes F ausdrückt, an sich einleuchtend, daſs $\lim\limits_{\sigma=0} \iint dx\,dy \cdot \sigma$ als Produkt einer endlichen mit einer bis zu Null abnehmenden Gröſse gleich Null sein muſs.

Ähnlich verhält es sich mit einer anderen Ungenauigkeit, die obige Summation so lange darbietet, als man die Elementarrechtecke noch nicht unendlich klein genommen hat. Denn so lange kann durch sie im allgemeinen unmöglich das Stück Ebene vollständig erschöpft werden, sondern werden rings herum an seinem Rande kleine Figuren irgend welcher Gestalt übrig bleiben, deren Summe aber gegen den Flächenraum selbst nur von einer Dimension ist. Geht man also zur Grenze über, so gibt das offenbar soviel als den an jeder Stelle noch mit einem durchaus endlichen Faktor ϱ behafteten Flächeninhalt eines überall unendlich schmalen Streifens von endlicher Länge, mithin eine jedenfalls gegen Null konvergierende, zu vernachlässigende Gröſse.

Es wird demnach in der That unter den beiden angenommenen Beschränkungen durch das Doppelintegral (II) in aller Genauigkeit die Masse des endlich begrenzten Ebenenstückes dargestellt. Zugleich leuchtet aber auch ein, daſs bei Nichtbeachtung obiger Bedingungen diese Genauigkeit berechtigten Zweifeln unterläge; denn falls ϱ unendlich wäre oder das Ebenenstück unendliche Ausdehnung hätte, so würden die vorhin vernachlässigten Glieder aus zwei Faktoren bestehen, von denen zwar der eine bis ins Unendliche abnimmt, der andere aber von vornherein unendlich groſs wäre, und solchen Ausdrücken, denen wir schon mehrfach begegnet sind, kann man einen bestimmten Sinn nicht beilegen.

Der vorstehenden mechanischen Auffassung des Doppelintegrals könnte man augenscheinlich auch eine rein geometrische substituieren, indem man

$$f(x, y) = z \tag{3}$$

setzte und z als dritte Ordinate der durch diese Gleichung gegebenen krummen Fläche ansähe. Es würde alsdann das Doppelintegral (II) das körperliche Volumen ausdrücken, welches von unserem in der Ebene der x, y abgesonderten Raume F, der zugehörigen, auf dieser Ebene senkrechten Cylinderfläche und dem durch diese letztere eingeschlossenen Stück der Fläche (3) begrenzt wird. Und zu Raumelementen hätte dieses Volumen lauter rechtwinklige unendlich dünne Parallelepipenden, deren Grundflächen $dx\,dy$ und deren Höhen die aus der (3) sich ergebenden zugehörigen Werte von z wären. Unter diese Auffassung fällt auch als specieller Fall unsere frühere geometrische Definition eines Doppelintegrals zwischen konstanten endlichen Grenzen (§ 52, 1.), wo es sich dann immer um solche Integrale handelt, für welche die Cylinderfläche sich auf zwei Paare zu den Achsen der x und y beziehentlich paralleler Ebenen reduciert. Fig. 17 (a. f. S.) liefert dazu ein Beispiel[65]). — Doch müſsten wir bei dieser geometrischen Begriffsbestimmung später des Analogons für die dreifachen Integrale entraten.

Was den Umfang der durch das Doppelintegral (II) angedeuteten Summation nach x bezw. y anbetrifft, so wird derselbe am zweckmäſsigsten — und im allgemeinen ist man dazu sogar gezwungen — durch eine oder mehrere Ungleichheiten näher bestimmt. Diese Ungleichheiten, die je nach der Natur des zu behandelnden Problems von der verschiedensten Art sein können, werden die Grenzbedingungen der Aufgabe genannt.

Erstreckt sich z. B. die Integration über eine ganze Ellipse von den Halbachsen α und β, und liegt diese symmetrisch um den Nullpunkt, so dafs ihr Mittelpunkt in O (Fig. 16) und α in die OX, β in die OY fällt, so ist die Ellipsenkurve durch die Gleichung

$$(4_0) \qquad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

gegeben, und ein jeder Punkt (x, y) innerhalb der Ellipse mufs, wie aus der analytischen Geometrie bekannt und an sich klar ist, die Ungleichheit erfüllen:

$$(4) \qquad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} < 1,$$

die also hier die Grenzbedingung der Aufgabe darstellt, in der aber, sowie in allen mit ihr vorzunehmenden Manipulationen, die Gleichheit als Grenzfall mit einbegriffen ist.

Fig. 16.

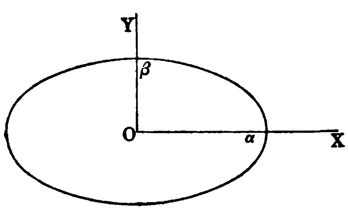
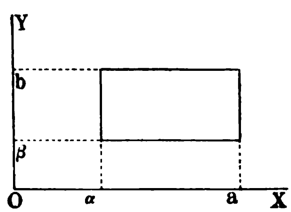


Fig. 17.



Erstreckt sich aber die Massenbestimmung auf ein Rechteck mit den Achsen bezüglich parallelen Seiten, so hat man bei den aus Fig. 17 ersichtlichen Abmessungen offenbar die doppelte Grenzbedingung:

$$(5) \qquad \alpha \leqq x \leqq a \quad \text{und} \quad \beta \leqq y \leqq b.$$

Endlich ist noch zu bemerken, dafs bei dieser Auffassungsweise des Doppelintegrals das Differential $dx\,dy$ immer stillschweigend absolut vorausgesetzt wird, und dafs man, obwohl dazu die Inkremente dx, dy entweder beide positiv oder beide negativ sein könnten, doch immer das erstere wählt, also stets von der algebraisch kleineren zu der algebraisch gröfseren Grenze integriert. Bei der rein analytischen Konstruktion des Doppelintegrals (§ 51), wo die Grenzen den Integralzeichen angeschrieben wurden, war diese Forderung nicht unbedingt notwendig, und durfte in dem Integral

$$\int_p^q dy \int_a^b dx\, f(x, y)$$

ebensogut auch $q < p$, $b < a$ sein.

Dafs die Ordnung der Integrationen beliebig ist, d. h., dafs man hat:

$$\text{(III)} \qquad \int dy \int dx\, f(x, y) = \int dx \int dy\, f(x, y),$$

ist bei unserer jetzigen Bedeutung des Doppelintegrals evident, denn die vorstehende Formel zeigt nur eine andere Folge in der Summation der Teilchen ein und desselben Raumes an, die natürlich beidemal dasselbe Resultat ergeben mufs. Auf der linken Seite der (III) gibt die erste Integration $dy \int dx\, f(x, y)$ die Masse eines horizontalen Streifens in der Höhe des konstanten y (Fig. 15, S. 224) und von der konstanten Breite dy, die also als konstanter Faktor heraustritt. Das Resultat dieser Integration, das die Variable x nicht mehr enthält, ist nur noch eine Funktion von y, so dafs die zweite Integration, nach y, nun alle übereinander liegenden Streifen des horizontalen Systems umfafst. In dem Ausdruck auf der rechten Seite der (III) hat man gerade umgekehrt in dem ersten Integral $dx \int dy\, f(x, y)$ einen vertikalen Streifen von der konstanten Breite dx und in der konstanten Entfernung x von der OY; das Doppelintegral $\int dx \int dy\, f(x, y)$ liefert aber dann als die Summe aller nebeneinander liegenden Massenstreifen offenbar ebendieselbe Gesamtmasse wie das Integral links.

Unter Einhaltung der beiden anfangs aufgestellten Beschränkungen kann in den vorstehend erörterten allgemeinen Eigenschaften der Doppelintegrale nie eine Schwierigkeit zu Tage treten. Auch liefsen sie sich sämtlich in aller Strenge rein analytisch beweisen, und zwar genau so, wie wir im früheren die entsprechenden Eigenschaften der einfachen Integrale abgeleitet haben, weshalb es auch nur ermüden würde, wollten wir diese Entwicklungen noch einmal wiederholen.

106. Explicite Entwicklung der Grenzen. — Will man die den Ungleichheiten zu entnehmenden Grenzen an die Integralzeichen anschreiben, so mufs man sie zuvörderst aus den Grenzbedingungen entwickeln, d. h. die Ungleichheiten nach x und y

auflösen, wofern sie nicht schon durch die besondere Form derselben direkt gegeben sind, wie es z. B. der Fall ist bei den Bedingungen (5) des vorigen Paragraphen, die unmittelbar erkennen lassen, dafs man, um die Gesamtmasse des Rechtecks zu erhalten, nach x von α bis a, nach y von β bis b zu integrieren hat.

Ist dies aber nicht der Fall, sondern enthalten die Ungleichheiten die Variablen x und y noch meliert miteinander, so ist oft ihre Trennung auch gar nicht möglich, oder, wenngleich zu bewerkstelligen, nicht einmal vorteilhaft, weil die Grenzen weit ersichtlicher aus der geometrischen Betrachtung hervortreten. Hat man sie aber bei einer möglichen Auflösung thatsächlich ermittelt, so mufs immer, wie wir am Schlufs des § 105 gesehen, jede der beiden Integrationsfolgen ein und dasselbe Resultat ergeben.

Wir wollen diese explicite Entwicklung der Grenzen an dem Beispiel (4_0) des vorigen Paragraphen, bei dem es sich um eine Ellipse mit den Halbachsen α und β handelt, in aller Strenge vollständig durchführen. Dazu sind aus der Ungleichheit

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} < 1 \tag{1}$$

die extremen Werte von x und y ausfindig zu machen.

Es werde mit der Integration nach x begonnen.

Da alle drei Glieder der Ungleichheit (1) als Quadrate wesentlich positiv sind, so folgt aus

$$\frac{x^2}{\alpha^2} < 1 - \frac{y^2}{\beta^2}$$

zunächst, dafs alle möglichen Werte von y so beschaffen sein müssen, dafs

$$\frac{y^2}{\beta^2} < 1$$

ist. Und da ferner auch x selbst, wie y, natürlich positiv oder negativ sein kann, α und β aber nur positiv sind, so folgt weiter, dafs für jedes der vorstehenden Bedingung Genüge leistende konstante y, d. i. für einen beliebigen horizontalen Streifen, durchaus $\frac{|x|}{\alpha} < \left|\sqrt{1 - \frac{y^2}{\beta^2}}\right|$ sein mufs, also alle diesem y zugehörigen Werte von x der Bedingung unterliegen:

$$(1') \qquad -\alpha\left|\sqrt{1-\frac{y^2}{\beta^2}}\right| < x < \alpha\left|\sqrt{1-\frac{y^2}{\beta^2}}\right|,$$

wie dies auch geometrisch aus Fig. 16 (S. 227) mit Evidenz hervorgeht.

Hat man nun so die Ausdehnung eines jeden horizontalen Streifens bestimmt, so ergibt sich sofort aus der (1′) oder auch wiederum aus der unmittelbaren Anschauung der Figur für die Gesamtausdehnung der übereinander liegenden horizontalen Streifen die Ungleichheit

$$(1'') \qquad -\beta < y < \beta,$$

welche besagt, dafs sich die zweite Integration von $y = -\beta$ bis $y = \beta$ zu erstrecken hat.

Es kann sich auch ereignen, dafs die zu untersuchende Ungleichheit — sogar schon, wenn sie vom zweiten Grade ist, noch häufiger aber bei einem höheren Grade — keine ununterbrochene Suite, sondern mehrere voneinander getrennte Abteilungen für die aufeinander folgenden, die Ausdehnung der betreffenden Integration konstituierenden Werte von x und y lieferte. Man könnte z. B. $-1 < x < 1$, $3 < x < 5$ erhalten, während in das Intervall von 1 bis 3 kein Wert von x hineinfiele. Die Folge davon wäre, dafs man das zugehörige Integral in die beiden Teilintegrale von -1 bis 1 und von 3 bis 5 zu zergliedern hätte.

Transformation des Doppelintegrals.

107. Bedeutung der Koordinaten. — In § 105 haben wir gesehen, wie man durch Zerteilung einer mit Masse belegten Ebene in Elemente findet, dafs allgemein das Gewicht der Ebene durch ein Doppelintegral ausgedrückt wird. Die Elemente brauchen aber dazu keineswegs wie dort Rechtecke mit den orthogonalen Achsen bezw. parallelen Seiten zu sein; sie können vielmehr durch zwei Systeme irgend welcher Kurven erzeugt, mithin immer so ausgewählt werden, wie sie sich für die Behandlung des gerade vorliegenden Problems am vorteilhaftesten erweisen. Somit erwächst uns die Aufgabe, von jenen bisher allein betrachteten kleinen Rechtecken aus das Doppelintegral für eine ganz allgemeine Elementareinteilung der Ebene zu transformieren. Man ersieht hieraus, wie, geometrisch betrachtet, die Transformation oder Formveränderung der doppelten (und ebenso auch der dreifachen) Integrale aufs engste zusammenhängt mit der Theorie der Koordinaten, aus der wir daher in den folgenden Untersuchungen verschiedene Sätze zu benutzen haben werden. Vor allem aber müssen wir uns vergegenwärtigen, welche Bedeutung den Koordinaten — zunächst nur für zwei Dimensionen — eigentlich beiwohnt.

Von den einfachsten, den beiden rechtwinkligen Koordinaten, hat eine jede das Geschäft, dem Punkte (x, y) der Ebene, den man durch sie bestimmen will, eine gerade Linie als geometrischen Ort anzuweisen: die Abscisse x versetzt ihn auf eine zur OY Parallele in der Entfernung x von derselben, die Ordinate y auf eine dagegen Senkrechte in der Entfernung y von der OX. Der Punkt liegt also auf zwei ganz bestimmten Geraden, deren Durchschnitt mithin die Stelle bezeichnet, die er in der Ebene einnehmen soll. — Diese rechtwinkligen Koordinaten sind vollkommen symmetrisch.

So weisen immer die beiden Koordinaten, welcher Art sie auch sein mögen, dem betreffenden Punkte irgend zwei Linien als geometrische Örter an, in deren Durchschnitt der Punkt also selbst gelegen ist, wie z. B. in dem bekannten System der Polarkoordinaten r, θ, die aber nicht symmetrisch sind, der stets absolut zu nehmende Radiusvektor r ihm als den einen Ort eine Kreislinie, und der Winkel θ als zweiten Ort die vom Mittelpunkt des Kreises ausgehende Gerade zuweist, die zu irgend einer festen Linie, z. B. der Richtung OX, die Neigung θ besitzt.

In der That, sind ganz allgemein

$$\lambda, \mu$$

die beiden Bestimmungsstücke oder neuen Koordinaten, so werden diese doch auf irgend eine Weise von den einfachsten, den orthogonalen Koordinaten x, y abhängen müssen, da ja, sowie nunmehr jene den Punkt der Ebene bestimmen sollen, derselbe auch schon durch diese bestimmt ist. Mit anderen Worten, λ und μ werden irgend welche Funktionen von x und y sein, z. B.:

$$(1) \qquad \lambda = \varphi(x, y), \quad \mu = \psi(x, y).$$

Und dadurch wird vollständig unsere obige Behauptung bestätigt. Denn es sei ein gewisser Punkt (λ, μ) der Ebene, also λ und μ gegeben: dann sind bekanntlich die (1) die auf die rechtwinkligen Achsen der x, y bezogenen Gleichungen zweier Kurven, in denen λ, μ irgendwie als Parameter erscheinen, so daſs in der That dem Punkte (λ, μ) zwei Kurven als Örter angewiesen sind. Und wo sie sich treffen, ist der Punkt gelegen.

108. Das allgemeine Element der Ebene und das transformierte Doppelintegral. — Es handelt sich nun um weiter nichts, als die Gröſse oder den Ausdruck für das Element der Ebene zu ermitteln, das den allgemeinen Koordinaten λ, μ zugehört.

Genau wie wir es oben für die Koordinaten x, y gethan haben (105), lege man auch sowohl λ als μ successive Werte bei, die in unendlich kleinen oder doch wenigstens bis ins Unendliche abnehmenden Intervallen aufeinander folgen sollen. So bekommt

Fig. 18.

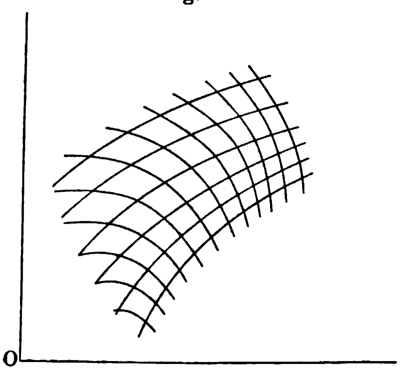
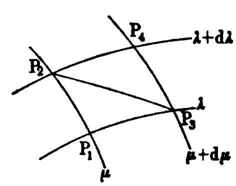


Fig. 19.



man zwei Systeme Linien irgend welcher Art (Fig. 18), z. B. bei den schon vorhin (107) erwähnten Polarkoordinaten ein System konzentrischer Kreise und ein System von sich sämtlich in dem gemeinsamen Mittelpunkt der Kreise schneidenden Geraden. Welches aber auch das System λ, μ sei, immer werden die ihm angehörigen Elemente Vierseite sein, die von je zwei unendlich nahen aufeinander folgenden Linien eines jeden der beiden Systeme begrenzt werden.

Die Gröſse eines solchen Elementes, das natürlich unendlich klein von der zweiten Ordnung ist, haben wir also jetzt zu berechnen. Dabei sind seine Seiten als geradlinig anzusehen, denn da sie unendlich klein sind, so wird der Fehler, den man dadurch begeht, beliebig vielmal kleiner als das Element selbst, nämlich unendlich klein von der dritten Ordnung sein.

Sei (Fig. 19) $P_1 P_2 P_3 P_4$ das zu berechnende Viereck. Seine Ecke P_1 liege an der Stelle (λ, μ) oder sei der Durchschnittspunkt der beiden für diese konstanten Werte von λ und μ auf x, y bezogenen Begrenzungskurven [107, (1)]:

$$\lambda = \varphi(x, y), \quad \mu = \psi(x, y). \tag{1}$$

Dann sind die beiden anderen Begrenzungskurven die beziehentlich denselben Systemen angehörigen benachbarten Linien

$$\lambda + d\lambda \quad \text{und} \quad \mu + d\mu,$$

wo $d\lambda$, $d\mu$ unendlich klein und immer positiv zu nehmen sind (§ 105, S. 227), was man ganz einfach dadurch erreicht, dafs man in dem Sinne fortschreitet, wie die Parameter algebraisch wachsen. Demnach sind die vier Eckpunkte unseres Vierecks

$$P_1, \qquad P_2, \qquad P_3, \qquad P_4$$

respektive zu bezeichnen durch:

$$(\lambda, \mu), \quad (\lambda + d\lambda, \mu), \quad (\lambda, \mu + d\mu), \quad (\lambda + d\lambda, \mu + d\mu).$$

Setzt man alsdann noch diese Ausdrücke nach x und y um, so läfst sich der Inhalt des Vierecks nach den Regeln der analytischen Geometrie aus seinen vier Ecken ohne die geringste Schwierigkeit berechnen, und da sich finden wird, dafs das Viereck als ein Parallelogramm anzusehen ist, so läuft die Aufgabe auf die Inhaltsbestimmung eines Dreiecks hinaus.

Denkt man sich, behufs Ermittelung der rechtwinkligen Koordinaten der vier Eckpunkte, x und y aus den Relationen (1) als Funktionen von λ und μ entwickelt, so werden sich gleichzeitig mit λ, μ auch jene Funktionen ändern. Doch werden wir von ihren $d\lambda$ und $d\mu$ entsprechenden Inkrementen nur die ersten Potenzen berücksichtigen oder sie auf ihre wegen der zwei Variablen partiellen Differentiale reducieren, weil bei der nachherigen Berechnung des Elements die Glieder, welche die höheren Potenzen der Inkremente enthalten, als unendlich klein von der dritten Ordnung an, doch zu vernachlässigen wären. Danach haben, auf die rechtwinkligen Achsen OX, OY bezogen, unsere vier Eckpunkte offenbar folgende Koordinaten:

$$\begin{cases} P_1 \dots . \; x, \; y, \\ P_2 \dots . \; x + \dfrac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda, \quad y + \dfrac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda, \\ P_3 \dots . \; x + \dfrac{\partial x}{\partial \mu} d\mu, \quad y + \dfrac{\partial y}{\partial \mu} d\mu, \\ P_4 \dots . \; x + \dfrac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda + \dfrac{\partial x}{\partial \mu} d\mu, \quad y + \dfrac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda + \dfrac{\partial y}{\partial \mu} d\mu. \end{cases} \tag{2}$$

Aus diesen Werten ergibt sich nun unmittelbar, dafs, wie bereits bemerkt, das Viereck als ein Parallelogramm aufzufassen ist, d. h. dafs mit verschwindendem Fehler $\lambda \parallel \lambda + d\lambda$ und $\mu \parallel \mu + d\mu$ gesetzt werden kann. Denn diese Linien sind, soweit sie als Seiten des Vierecks in Betracht kommen, als gerade anzusehen und werden also parallel sein, wenn die trigonometrischen Tangenten der Winkel, unter denen ihre Richtungen die Achse OX schneiden, oder die Quotienten, durch welche diese Tangenten ausgedrückt werden, und die zu Zählern die Differenz der betreffenden Ordinaten, zu Nennern die Differenz der zugehörigen Abscissen haben, einander gleich sind. Und in der That, bildet man an der Hand der Werte (2) diese Quotienten, so finden sich z. B. für die Tangenten der Winkel, welche die Richtungen $P_3 P_1$ bezw. $P_4 P_2$ mit der OX machen, die Quotienten:

$$\frac{y + \frac{\partial y}{\partial \mu} d\mu - y}{x + \frac{\partial x}{\partial \mu} d\mu - x} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \mu}}{\frac{\partial x}{\partial \mu}}$$

und

$$\frac{y + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial y}{\partial \mu} d\mu - y - \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda}{x + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial x}{\partial \mu} d\mu - x - \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \mu}}{\frac{\partial x}{\partial \mu}},$$

also genau dieselben Werte. Und ganz ebenso würde sich (wie auch schon aus der Symmetrie folgt) der Parallelismus der beiden anderen Seiten $P_4 P_3$, $P_2 P_1$ nachweisen lassen.

Unser Viereck wird demnach als Parallelogramm durch eine Diagonale, z. B. $P_2 P_3$, in zwei kongruente Dreiecke geteilt und hat zum Inhalt das Doppelte eines dieser Dreiecke.

Die Fläche eines Dreiecks OAB (Fig. 20) aus den rechtwinkligen Koordinaten seiner drei Ecken wird aber, wenn x, y bezw. x_1, y_1 die Koordinaten von B und A sind und seine dritte Ecke im Anfangspunkte liegt, durch die Formel gegeben:

$$\triangle\, OAB = \tfrac{1}{2} |(x y_1 - x_1 y)| \text{ [66]},$$

also durch eine Determinante ausgedrückt, wie man bekanntlich die Verbindungen nennt, welche sich bei der Auflösung eines Systems algebraischer Gleichungen ersten Grades im Nenner ihrer Wurzeln einstellen, und die immer aus der Differenz der kreuzweise gebildeten Produkte der Koeffizienten der Unbekannten bestehen [67]).

Betreffs dieser Differenz $xy_1 - x_1y$ ist noch darauf aufmerksam zu machen, dafs sie bei einer anderen Lage des Dreiecks an sich leicht auch negativ sein könnte; hängt doch ihr Zeichen überhaupt davon ab, ob man bei ihrer Bildung von der x-Achse nach der y-Achse oder in umgekehrter Richtung fortschreitet. Da aber natürlich der Inhalt des Dreiecks immer absolut zu nehmen ist, so hätte man sie in jedem einzelnen Falle, wo sie nicht schon den numerischen Wert repräsentiert, noch besonders mit dem Minuszeichen zu behaften.

Hat das Dreieck nun nicht eine Spitze im Nullpunkt, sondern sind die Koordinaten seiner drei Ecken A, B, C (Fig. 21)

Fig. 20.

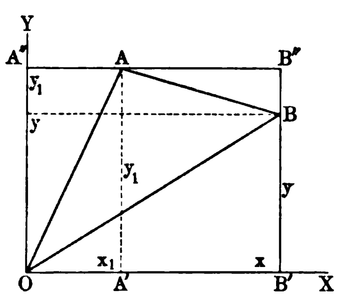
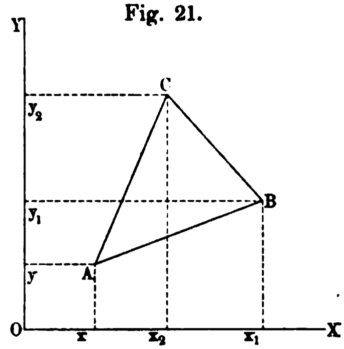


Fig. 21.



bezw. x, y; x_1, y_1; x_2, y_2, so kann man den Anfangspunkt z. B. nach (x, y) hin verlegen und gewinnt dann offenbar für seinen Inhalt den Ausdruck:

$$\tfrac{1}{2}\left|\left((x_1 - x)(y_2 - y) - (x_2 - x)(y_1 - y)\right)\right|.$$

Auf unser Dreieck $P_1P_2P_3$ (Fig. 19, S. 232) angewendet, wird am bequemsten der Nullpunkt nach P_1 verlegt. Dann liefern die Koordinaten (2) für die vier Differenzen in der vorstehenden Formel die Werte:

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda}d\lambda, \frac{\partial y}{\partial \mu}d\mu; \quad \frac{\partial x}{\partial \mu}d\mu, \frac{\partial y}{\partial \lambda}d\lambda.$$

Mithin ist die Fläche des Vierecks $P_1P_2P_3P_4$ durch den Ausdruck gegeben:

$$(3) \qquad \left|\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial y}{\partial \mu} - \frac{\partial x}{\partial \mu}\cdot\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)\right| \cdot d\lambda\, d\mu,$$

der also ebenfalls den Charakter einer Determinante an sich trägt und auch stets beibehält. Wie auch natürlich, ist diese Fläche (3) eine unendlich kleine Gröfse der zweiten Ordnung: was man noch weiter hätte hineinnehmen können, wäre ein Beitrag zur dritten und den höheren Ordnungen gewesen, und ist deshalb gleich von vornherein weggelassen.

Dies also ist das allgemeine Element der Ebene und dies die Transformation der Doppelintegrale, die zugleich auch die Grundlage bildet für die ähnliche Ableitung des allgemeinen Elementes einer krummen Fläche (§ 112f.) und für die Transformation der dreifachen Integrale (s. § 123).

Wie schon bemerkt, mufs man von der Determinante in der (3) durchaus ihren numerischen Wert nehmen, weshalb man sich immer erst zu vergewissern hat, welches Zeichen die Differenz an sich besitzt; und sollte es sich ereignen, dafs sie in einem Teile der Ebene ihr Zeichen ändert, so müfste das Integral in entsprechende Teile getrennt werden. Jedoch läfst sich das immer vermeiden.

Man darf aber nicht, wie es wohl häufig zu geschehen pflegt, das transformierte Element (3) — ein Parallelogramm — dem ursprünglichen Elemente $dx\,dy$ — einem Rechtecke — gleichsetzen, denn ganz verschiedenen Einteilungen der Ebene angehörig, findet Gleichheit zwischen ihnen nicht statt.

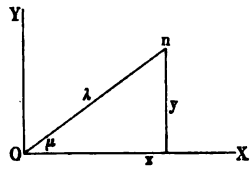
Es kann bei diesen Transformationen vorkommen, dafs die Gleichungen (1) vieldeutige Werte für λ und μ ergeben, so dafs zu einem System von Werten von x und y mehrere Wertsysteme von λ und μ gehörten oder umgekehrt. Dem mufs, da natürlich bei der Summation jeder Teil der Ebene nur einmal genommen werden darf, durchaus vorgebeugt werden. In einem solchen Falle hat man daher genau zu fixieren, welche Werte auszuwählen sind, und es so einzurichten, dafs keinem Punkt der Ebene zwei oder mehr Koordinatenpaare zugehören, was den gröfsten Wirrwarr veranlassen würde.

Bei rechtwinkligen Koordinaten ist diese Eindeutigkeit schon von vornherein vorhanden, und deshalb stellen sie in der That das einfachste System dar.

Die gewöhnlichen Polarkoordinaten hingegen erfüllen diese Bedingung nicht schon durch sich selbst. Bezeichnet man den

Radiusvektor durch λ, den beweglichen Winkel durch μ, so darf dieser — bei nur positiv vorausgesetztem λ — offenbar nicht über 4 R hinausgehen, weil durch diesen Umfang der Werte von μ augenfällig schon die ganze Ebene erschöpft wird und, sobald man darüber hinausginge, einzelne ihrer Stellen zweimal genommen würden. Allerdings könnte man für λ auch die negativen Werte zulassen, wo dann μ auf das Intervall von 0 bis π zu beschränken wäre; jedoch wird wegen der grofsen Vorteile, die damit verknüpft sind, stets das erstere vorausgesetzt. Alsdann ist alles eindeutig und vollständig bestimmt: jeder Kombination λ, μ entspricht nur eine Kombination x, y, und umgekehrt.

Fig. 22.



Dies zeigen (Fig. 22) sofort die bekannten Relationen:

$$(4') \qquad x = \lambda \cos\mu, \quad y = \lambda \sin\mu,$$

also

$$\lambda = \left|\sqrt{x^2 + y^2}\right|; \quad \cos\mu = \frac{x}{\lambda}, \ \sin\mu = \frac{y}{\lambda},$$

wo $\cos\mu$, $\sin\mu$ schon als direkte trigonometrische Funktionen immer eindeutig sind (66, S. 131); aber auch die aus den vorstehenden Formeln hergeleitete inverse, an sich mehrdeutige Funktion

$$\mu = \arccos\frac{x}{\lambda} = \arcsin\frac{y}{\lambda}$$

ist unter obigen Festsetzungen völlig bestimmt und besitzt an jeder Stelle innerhalb der ersten vier Quadranten nur einen einzigen Wert.

Wir wollen hier gleich das diesen Polarkoordinaten zugehörige Element der Ebene ableiten, das also als specieller Fall in der (3) enthalten sein mufs.

Aus den Formeln (4') erhält man für die partiellen Derivierten von x und y die Werte:

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \cos\mu, \qquad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \sin\mu,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \mu} = -\lambda\sin\mu, \quad \frac{\partial y}{\partial \mu} = \lambda\cos\mu,$$

aus denen sich sofort durch kreuzweise Multiplikation und Subtraktion der Produkte

$$\lambda\, d\lambda\, d\mu \tag{4}$$

als das verlangte und schon von selbst stets positive Element der Ebene ergibt.

Dieser Ausdruck für das Element liefse sich auch sehr leicht geometrisch ableiten, wie die meisten Transformationen der Elemente für zwei und drei Dimensionen, während darüber hinaus natürlich an eine geometrische Entwicklung derselben gar nicht zu denken wäre.

Was nun endlich das transformierte vollständige Doppelintegral anbetrifft, so untersteht es selbstverständlich genau derselben Definition wie das ursprüngliche Integral $\iint \varrho\, dx\, dy$ des § 105. Danach ist in dem betreffenden Raume F jedes Element der Ebene, d. h. jedes Parallelogramm (3) mit dem daselbst stattfindenden Massenfaktor ϱ zu multiplicieren, der aber jetzt nicht mehr der Funktion f von x, y gleichgesetzt werden darf, sondern, vermittelst Substitution, durch λ, μ ausgedrückt sein mufs; und alsdann ist, um die Gesamtmasse zu erhalten, die Summation aller jener Produkte über den ganzen Raum F zu erstrecken. Demzufolge besteht offenbar die Identität:

$$\iint \varrho \cdot dx\, dy = \iint \left| \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial y}{\partial \mu} - \frac{\partial x}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) \right| \cdot \varrho\, d\lambda\, d\mu. \tag{5}$$

Diese Gleichheit liefse sich auch rein analytisch nachweisen, was aber ohne alles Interesse ist, weil sich dabei nicht die geringste Schwierigkeit einstellt.

Die Grenzbedingungen der neuen Integration sind nun natürlich auch — durch blofse Substitution — in λ und μ umzusetzen, wobei man wieder darauf zu achten hat, dafs die Werte dieser Variablen in solche Grenzen eingeschlossen sind, die alle Zweideutigkeit beseitigen.

Man sieht leicht ein, wie wir bereits im Anfang des § 107 betont haben, dafs durch eine schickliche Transformation unter gewissen Umständen die Integrationen unendlich erleichtert werden können.

109. Inhaltsbestimmung der Ellipse. — Um die vorstehende Theorie recht zu veranschaulichen, wollen wir dieselbe auf eines der trivialsten, einfachsten Beispiele anwenden.

Setzt man nämlich ϱ konstant und gleich 1 voraus, so geht die Gleichung (5) des vorigen Paragraphen über in:

$$(1_0) \qquad \iint dx\,dy = \iint \left|\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial y}{\partial \mu} - \frac{\partial x}{\partial \mu}\cdot\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)\right| \cdot d\lambda\, d\mu,$$

und die Massenbestimmung reduciert sich demnach auf die Berechnung eines einfachen Flächenraumes.

Die Summation erstrecke sich über eine Ellipse von den Halbachsen α, β. Alsdann zeigen also beide Doppelintegrale (1_0) den Inhalt dieser Ellipse an und müssen mithin das schon aus einer Aufgabe der reinen Elementargeometrie bekannte Resultat

$$\alpha\beta\pi$$

ergeben.

Für das transformierte Doppelintegral wählen wir den Ausdruck in gewöhnlichen Polarkoordinaten, den wir uns bereits in § 108 (S. 237 f.) vermittelst der Substitutionsgleichungen

$$(1') \qquad x = \lambda\cos\mu, \quad y = \lambda\sin\mu \qquad (0 \leqq \mu \leqq 2\pi)$$

verschafft haben. Dadurch erhalten wir statt der (1_0) die Formel:

$$(1) \qquad \iint dx\,dy = \iint \lambda\, d\lambda\, d\mu,$$

wo sich also rechts ein etwas komplizierteres Element als links, aber doch noch eine höchst einfache Funktion befindet.

Was die Grenzbedingung betrifft, so wird dieselbe für die rechtwinkligen Koordinaten durch die Ungleichheit

$$(2') \qquad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} < 1 \quad [\text{S. 227, (4)}],$$

für Polarkoordinaten aber durch die Ungleichheit

$$(2'') \qquad \lambda^2\left(\frac{\cos^2\mu}{\alpha^2} + \frac{\sin^2\mu}{\beta^2}\right) < 1$$

angegeben, die aus der Umformung der (2′) mittels der Werte (1′) hervorgeht.

Sehen wir nun genauer zu, wie sich die Inhaltsbestimmung der Ellipse gestaltet, je nachdem man ihr das eine oder das andere Doppelintegral der Gleichung (1) zu Grunde legt.

1. In dem Doppelintegral $\iint dx\,dy$ läfst sich natürlich die erste Integration, welche man auch dazu wählen möge, als blofse Integration eines Differentials, immer vollziehen [68]. Die aus der (2′) fliefsenden expliciten Grenzen der beiden Integrale kennen wir schon aus § 106. Sie sind, wenn mit der Integration nach x begonnen wird, durch die Ungleichheiten gegeben:

$$-\alpha\sqrt{1-\frac{y^2}{\beta^2}} < x < \alpha\sqrt{1-\frac{y^2}{\beta^2}} \quad \text{und} \quad -\beta < y < \beta.$$

Demnach gewinnt man zunächst aus dem unbestimmten Integral $\int dx = x + C$:

$$\int\limits_{-\alpha\sqrt{1-\frac{y^2}{\beta^2}}}^{\alpha\sqrt{1-\frac{y^2}{\beta^2}}} dx = 2\alpha\left|\sqrt{1-\frac{y^2}{\beta^2}}\right|,$$

und hieraus:

$$\iint dx\,dy = 2\alpha\int\limits_{-\beta}^{\beta}\left|\sqrt{1-\frac{y^2}{\beta^2}}\right| dy.$$

Dies Integral läfst sich unbestimmt integrieren, führt aber wegen der Quadratwurzel, die es enthält, doch noch auf einen zweiteiligen Ausdruck, deren einer ein arc sinus ist. Die Rechnung selbst, die natürlich das Resultat $\alpha\beta\pi$ ergeben würde, führen wir nicht aus, da wir ja nur erläutern wollen, wie sich die oben entwickelte Theorie in der Anwendung gestaltet, was sich an einem so einfachen Beispiele am besten übersehen läfst. Wir werden später ganz anders schwierige Anwendungen durchzumachen haben.

2. Bei der Ausmittelung des Doppelintegrals $\iint_{(}\lambda\, d\lambda\, d\mu$ wird, weil die Polarkoordinaten λ, μ der Symmetrie entbehren, die Rechnung eine wesentlich andere, je nachdem man zuerst nach λ oder nach μ integriert.

Einfacher ist es, mit der Integration nach λ zu beginnen.

Für die obere Grenze dieser stets positiven Variablen ergibt sich aus der (2''):

$$\lambda < \frac{1}{\left|\sqrt{\frac{\cos^2\mu}{\alpha^2}+\frac{\sin^2\mu}{\beta^2}}\right|},$$

während die untere Grenze, eben weil λ immer absolut zu nehmen ist, selbstverständlich durch die Bedingung

$$0 < \lambda$$

angegeben wird. Dies ist auch geometrisch klar (Fig. 23), indem durch diese Integration die Summation längs eines Sektors dargestellt wird, für den μ konstant ist.

Mithin hat man aus dem unbestimmten Integral

$$\int \lambda \, d\lambda = \frac{\lambda^2}{2} + C$$

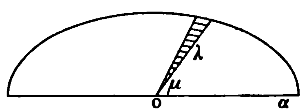
für das Integral zwischen den obigen Grenzen:

$$\int \lambda \, d\lambda = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\cos^2 \mu}{\alpha^2} + \frac{\sin^2 \mu}{\beta^2}}.$$

Dies ist nun — aber es fragt sich, innerhalb welcher Grenzen, — nach μ zu integrieren.

Für dieselben stellen sich hier gar keine Bedingungen heraus, weil das nur dann geschieht, wenn die erste Integration bezüglichen Grenzen schon eine Bedingung für die andere Variable involvieren; denn sonst ist ja für diese Integration (nach λ) nirgend ein Bedenken vorhanden, welchen Wert auch immer, falls er überhaupt nur möglich ist, die zweite Veränderliche (μ) besitze. Das heifst dann: die zweite Integration (nach μ) erstreckt sich innerhalb der weitmöglichsten Grenzen, also von 0 bis 2π, wie wiederum, in Anbetracht, dafs die Sektoren offenbar rings herum gehen, auch geometrisch einleuchtet.

Fig. 23.



Danach hat man:

$$\iint \lambda \, d\lambda \, d\mu = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\mu}{\frac{\cos^2 \mu}{\alpha^2} + \frac{\sin^2 \mu}{\beta^2}},$$

mit welchem Resultat wir diese Auflösung beschliefsen.

Jetzt nehmen wir das Problem zum drittenmal auf, indem wir an erster Stelle die Integration nach μ verrichten, also mit dem unbestimmten Integral

$$\int d\mu = \mu + C$$

den Anfang machen. Es wird sich dabei das Phänomen herausstellen, dessen bereits am Schlufs des § 106 Erwähnung geschehen, und wir nehmen die sich hier darbietende Gelegenheit wahr, uns an einem so einfachen Beispiele mit jener Erscheinung näher bekannt zu machen.

Die aus der (2″) gezogene Grenzbedingung für das immer innerhalb der ersten vier Quadranten gelegene μ:

$$\frac{\cos^2\mu}{\alpha^2}+\frac{\sin^2\mu}{\beta^2}<\frac{1}{\lambda^2} \quad \text{oder auch} \quad \sin^2\mu\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right)<\frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{\alpha^2},$$

zeigt nämlich, dafs hier Werte von μ nur existieren, wenn λ selbst schon gewisse Bedingungen erfüllt. Denn wenn wir — was bei den früheren Auflösungen ganz gleichgültig war, hier aber notwendig wird — eine bestimmte Gröfsenordnung für die Halbachsen der Ellipse, z. B.

$$\beta<\alpha$$

festsetzen, so kann man die letztere Ungleichheit durch den alsdann positiven Faktor $\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\alpha^2}$ dividieren, so dafs kommt:

$$\sin^2\mu<\frac{\frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{\alpha^2}}{\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\alpha^2}}. \tag{3}$$

In dieser Ungleichheit mufs, da ihre linke Seite ein Quadrat ist, notwendig auch der Quotient rechts gröfser als Null sein, was erfordert, dafs

$$\lambda<\alpha$$

ist. Dies ist also die Bedingung, die λ, soll es überhaupt ein μ geben, immer zu erfüllen hat. Es kann mithin die Integration nach λ nicht über α hinausgehen, mit anderen Worten, sie erstreckt sich von 0 bis α.

Wie weit geht aber nun die Reihe der μ?

In Anbetracht, dafs $\sin^2\mu$ den Wert 1 nie überschreiten kann, wird μ gar keinen Beschränkungen unterliegen, solange die zweite Seite der Ungleichheit (3), d. i. der Quotient

$$\frac{\frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{\alpha^2}}{\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\alpha^2}} \tag{3'}$$

gröfser als 1 ist, was der Fall ist, solange $\lambda<\beta$ ist. Für

$$0<\lambda<\beta$$

geht also die Integration nach μ rund herum.

Ist hingegen der Quotient (3′) kleiner als 1, was eintritt, wenn $\lambda>\beta$, bewegt sich also λ mit Rücksicht auf seinen ein für allemal feststehenden oberen Grenzwert α innerhalb der Grenzen

$$\beta < \lambda < \alpha,$$

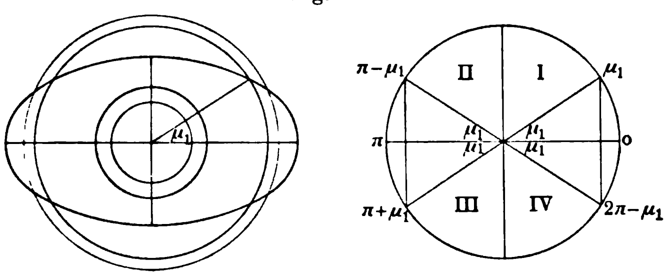
so nimmt offenbar in dem Bereiche der (3) $|\sin\mu|$ Werte bis zu 1 hin an, die stellenweise gröfser wären als derjenige Wert des Quotienten (3′), über den $\sin^2\mu$ nicht hinausgehen darf. Daher kann für solche λ die Integration nach μ nicht mehr ohne Unterbrechung von 0 bis 2π herumgehen, sondern wird, wie leicht zu sehen, in verschiedene voneinander getrennte Strecken zerfallen.

Bezeichnet man nämlich durch μ_1 denjenigen spitzen Winkel μ, der für ein solches als konstant angenommenes λ an der Grenze der zu erfüllenden Ungleichheit (3) liegt, so dafs man hat:

$$\sin\mu_1 = \left|\sqrt{\frac{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\alpha^2}}{\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2}}}\right|,$$

so ist aus dem Verlauf des sinus in den vier ersten Quadranten, über welche man überhaupt nicht hinausgehen darf, sofort erkennbar (Fig. 24), dafs in dem Intervall von μ_1 bis $\pi - \mu_1$ in der ersten Kreishälfte, und von $\pi + \mu_1$ bis $2\pi - \mu_1$ in der

Fig. 24.



zweiten Kreishälfte, die Werte von $\sin\mu$ numerisch gröfser als $\sin\mu_1$, also unzulässig sind[69]). Daraus folgt, dafs in dem von β bis α erstreckten Integral von λ die Integration nach μ sich in drei getrennten Intervallen vollzieht: von 0 bis μ_1 im ersten Quadranten, von $\pi - \mu_1$ bis $\pi + \mu_1$ zusammenhängend im zweiten und dritten Quadranten, und endlich von $2\pi - \mu_1$ bis zu 2π im letzten Quadranten.

Aus diesem allem ergibt sich:

$$\begin{aligned}\iint \lambda\, d\lambda\, d\mu &= \int_0^\beta \lambda\, d\lambda \int_0^{2\pi} d\mu + \int_\beta^\alpha \lambda\, d\lambda \Big(\int_0^{\mu_1} d\mu + \int_{\pi-\mu_1}^{\pi+\mu_1} d\mu + \int_{2\pi-\mu_1}^{2\pi} d\mu\Big)\\ &= \pi\beta^2 + \int_\beta^\alpha \lambda\, d\lambda\, (\mu_1 + 2\mu_1 + \mu_1)\\ &= \pi\beta^2 + 4\int_\beta^\alpha \lambda\mu_1\, d\lambda\\ &= \pi\beta^2 + 4\int_\beta^\alpha \lambda\, d\lambda \cdot \arcsin\left|\sqrt{\frac{\frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{\alpha^2}}{\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\alpha^2}}}\right|,\end{aligned}$$

wo in dem letzten Integral sich die Integration unbestimmt ausführen läfst, freilich durch ein, wenn auch nicht schwieriges, so doch kompliziertes Verfahren, indem man, um sich von dem arcus zu befreien, erst teilweise integrieren müfste.

Doch lassen wir das beiseite, da es uns nur darauf ankam, diese merkwürdige Teilung der Integration hervorzuheben und zu erläutern. Geometrisch erklärt sich dieselbe übrigens auf die einfachste Weise. Denn integriert man zuerst nach μ, wobei λ als konstant anzusehen ist, so gibt das für jedes konstante λ einen Kreisring (erste Fig. 24), der offenbar so lange vollständig ist, als $\lambda < \beta$, weil er alsdann ganz in die Ellipse hineinfällt; für zwischen β und α gelegene Werte von λ hingegen schneidet er in die Ellipse ein, und dann erstreckt sich natürlich auf den aufserhalb derselben fallenden Teil die Integration nicht mit. Dafs man aber dabei (geometrisch) augenscheinlich nur zwei, und nicht wie oben drei voneinander getrennte Streifen der Ellipse erhält, über welche sich die Integration nach μ ausdehnt, hat seinen Grund darin, dafs analytisch 2π nicht in den Anfangspunkt 0 zurückkehrt.

110. Inhaltsbestimmung der Ellipse vermittelst der Ivoryschen Substitution. — Auf welche Weise man im vorigen Paragraphen auch die Einteilung in Elemente vornahm und in welcher Ordnung man auch die Integrationen vollzog, immer wäre doch, um zu dem endgültigen Resultate $\alpha\beta\pi$ zu gelangen, etwas dabei zu rechnen gewesen. Jetzt aber wollen wir auf dasselbe triviale Beispiel eine Substitution anwenden, die, der Natur der Aufgabe vollkommen angepafst, alle Rechnung vermeiden macht.

Es ist dies die überhaupt sehr wichtige, von Ivory herrührende und in seiner berühmten Abhandlung über das Attraktionsproblem der Ellipsoide zuerst in Anwendung gebrachte Substitution, deren Formeln sehr ähnlich sind denen der Polarkoordinaten, nur noch etwas allgemeiner, indem in sie noch konstante Faktoren eingehen.

In der Aufgabe, die uns gegenwärtig beschäftigt, haben wir es aber erst mit einem speciellen Fall der Ivoryschen Substitution zu thun (s. u. S. 249). Derselbe ist charakterisiert durch die Gleichungen:

$$x = \alpha\lambda\cos\mu, \qquad y = \beta\lambda\sin\mu, \tag{1}$$

wo α und β konstante positive Werte bezeichnen sollen und λ, μ gerade wieder so zu beschränken sind wie bei den Polarkoordinaten, d. h. λ nur positiv und μ von 0 bis 2π zu nehmen ist. Dadurch sind diese neuen Koordinaten, einschliefslich des Winkels μ selbst, auch völlig eindeutig bestimmt, denn aus den (1) findet sich

$$\lambda = \left|\sqrt{\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2}}\right| \tag{1'}$$

und

$$\cos\mu = \frac{x}{\alpha\lambda}, \quad \sin\mu = \frac{y}{\beta\lambda} \qquad (0 \leqq \mu \leqq 2\pi).$$

Auch die beiden neuen Liniensysteme weisen grofse Analogie mit dem Polarsystem auf. Sie sind:

1) für das veränderliche μ lauter vom Anfangspunkte auslaufende gerade Linien, wie die aus den (1) hergeleitete Relation

$$y = \frac{\beta}{\alpha}\operatorname{tg}\mu \cdot x$$

zeigt, die die Gleichung einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden darstellt. Jedoch ist die Neigung derselben gegen die x-Achse nicht wie bei den Polarkoordinaten der Winkel μ selbst, sondern diesem Winkel nur proportional; denn wird sie durch ν bezeichnet, so hat man:

$$\operatorname{tg}\nu = \frac{\beta}{\alpha}\operatorname{tg}\mu.$$

2) Für den veränderlichen Parameter λ ein System von konzentrischen ähnlichen Ellipsen. Denn die aus der (1') entspringende Relation

(2) $$1 = \frac{x^2}{(\alpha\lambda)^2} + \frac{y^2}{(\beta\lambda)^2}$$

drückt die Gleichung einer Ellipse aus mit dem Mittelpunkt in (0, 0) und den Halbachsen $\alpha\lambda$ und $\beta\lambda$. Daraus folgt, dafs die den verschiedenen Werten von λ zugehörigen Ellipsen sämtlich konzentrisch und in Anbetracht, dafs ihre Achsen dasselbe konstante Verhältnis $\frac{\alpha}{\beta}$ haben, auch ähnlich sind.

Das neue Flächenelement endlich wird wieder aus den partiellen Differentialquotienten von x und y nach λ und μ:

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \alpha \cos \mu, \qquad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \beta \sin \mu,$$
$$\frac{\partial x}{\partial \mu} = -\alpha\lambda \sin \mu, \quad \frac{\partial y}{\partial \mu} = \beta\lambda \cos \mu,$$

durch deren kreuzweise Multiplikation und Subtraktion der Produkte gewonnen, woraus sich unmittelbar für dasselbe der Ausdruck

$$\alpha\beta\lambda$$

ergibt.

Diese Einteilung der Ebene besitzt nun vor allen anderen Systemen, auch dem der gewöhnlichen Polarkoordinaten, den Vorzug, dafs sie sich der Grenzbedingung, wenn diese auf eine Ellipse gehen soll, viel besser anschmiegt, indem dazu nur vonnöten ist, in den Transformationsformeln (1) die Konstanten α und β den beiden Halbachsen der Ellipse proportional oder geradezu gleich zu setzen.

Ist also vermittelst der zwischen den beiden Doppelintegralen bestehenden Gleichheit

$$\iint dx\, dy = \alpha\beta \iint \lambda\, d\lambda\, d\mu$$

der Inhalt der Ellipse

(2_0) $$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

zu bestimmen, so verwandelt sich die Grenzbedingung

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} < 1$$

vermöge der Formeln (1) in:

$$\lambda^2 \cos^2 \mu + \lambda^2 \sin^2 \mu < 1, \quad \text{d. i.} \quad \lambda^2 < 1.$$

Die Integration nach λ ist mithin von 0 bis 1 zu erstrecken. Dafs sie nicht über diese Grenze hinausgehen darf, zeigt auch die das System der Ellipsen darstellende Relation (2), welche für $\lambda = 1$ die Ellipse (2_0) liefert, um deren Berechnung es sich handelt.

Für die andere Variable haben sich gar keine Grenzbedingungen eingestellt; es ist daher nach μ im weitesten Umfange, von 0 bis 2π zu integrieren.

Die Grenzen beider Integrationen sind also konstant und unabhängig voneinander. Infolgedessen ergibt sich für den Wert des Doppelintegrals oder den Inhalt der Ellipse sofort und ohne alle Rechnung:

$$\alpha\beta\int_0^1\int_0^{2\pi}\lambda\,d\lambda\,d\mu = \frac{1}{2}\alpha\beta\int_0^{2\pi}d\mu = \alpha\beta\pi.$$

Man ersieht aus diesem Beispiele hinsichtlich der Zweckmäfsigkeit einer in Anwendung zu bringenden Transformation aufs deutlichste, dafs man bei ihrer Wahl immer auf zweierlei sein Augenmerk zu richten hat: die Substitutionsformeln müssen der besonderen Natur der zu transformierenden Funktion genau angepafst sein und zugleich die Grenzbedingungen möglichst vereinfachen.

Zweites Kapitel.

Anwendung der Lehre von den Doppelintegralen auf die Inhaltsbestimmung krummer Oberflächen.

I. Theorie der Komplanation.

111. Vorbemerkung. — Transformation der Koordinaten. — Wir beschäftigen uns in diesem Kapitel[70]) mit dem rein geometrischen Problem der Inhaltsbestimmung beliebiger krummer Flächen oder dem sogenannten Problem der Komplanation.

Die zu dieser Aufgabe notwendigen Formeln werden wir gleich in der allgemeinsten Gestalt ableiten, deren sie fähig sind, wiewohl man leicht auch von den speciellen Formeln zu den allgemeinen übergehen könnte. Aber abgesehen davon, dafs ersteres Verfahren ebenso kurz ist, hat es noch den Vorteil voraus, daſs man alsdann der allgemeinen Transformation der Variablen überhoben ist, indem dieselbe schon einen Bestandteil der resultierenden Ausdrücke bildet.

Die allgemeine Formel, um die es sich handelt, entspricht folgendem Gesichtspunkte.

Unter Zugrundelegung des räumlichen rechtwinkligen Koordinatensystems der x, y, z wird eine krumme Oberfläche durch die Gröfse der dritten Koordinate z bestimmt, und da ist es die gewöhnliche Methode, dieselbe unmittelbar als eine Funktion der beiden anderen Koordinaten x, y darzustellen. Da diese Darstellungsweise aber gegen die Symmetrie verstöfst, so drücken wir vielmehr eine jede der drei rechtwinkligen Koordinaten durch zwei Hülfsvariable

$$\lambda, \mu$$

aus, indem wir die drei Gleichungen aufstellen:

$$(1) \qquad x = \varphi(\lambda, \mu), \quad y = \psi(\lambda, \mu), \quad z = \chi(\lambda, \mu),$$

die rein symmetrisch sind und durch welche ebenfalls eine krumme Fläche völlig bestimmt wird.

Auch hier hat man natürlich dafür zu sorgen, dafs man die Variablen λ, μ gehörig beschränke, damit man die ganze Fläche erhalte und keinen ihrer Teile zwei- oder mehrmal. Da sich darüber aber keine allgemeinen Vorschriften geben lassen, so mufs dies in jedem einzelnen Falle besonders geschehen.

Setzt man in den (1) speciell

$$(1') \qquad x = x, \quad y = y, \quad z = \chi(x, y),$$

so erkennt man, dafs die allgemeinen Formeln (1) die Formeln, welche bei dem gewöhnlichen Verfahren in Anwendung kommen, als Species in sich enthalten.

Um die vorstehend skizzierte Methode an einem Beispiele zu erläutern, wählen wir den wichtigen Fall des dreiachsigen Ellipsoids, dessen Oberfläche für rechtwinklige Koordinaten und für die Halbachsen α, β, γ bekanntlich durch die Gleichung

$$(2) \qquad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

bestimmt wird.

Dieser Gleichung genau angepafst sind die Formeln der allgemeinen Ivoryschen Substitution:

$$(1_0)\qquad x = \alpha \cos\lambda,\quad y = \beta \sin\lambda \cos\mu,\quad z = \gamma \sin\lambda \sin\mu.$$

Dieselbe führt die beiden Winkel λ und μ ein, durch welche ein jeder Punkt der Fläche bestimmt wird; und wie sehr sie auf das Ellipsoid pafst, ersieht man an der Identität

$$\cos^2\lambda + \sin^2\lambda(\cos^2\mu + \sin^2\mu) = 1,$$

zu der man durch Einsetzung der Werte (1_0) in die (2) gelangt. Dazu gesellt sich noch der Vorteil, dafs durch die Hülfsgröfsen λ, μ alle drei Koordinaten rational ausgedrückt werden.

Um das ganze Ellipsoid zu umfassen und um jeden Punkt der Oberfläche nur einmal zu erhalten, mufs man, wie die einfachsten Deduktionen zeigen, λ von 0 bis zu 2 R und μ von 0 bis zu 4 R gehen lassen, so dafs also die Grenzbedingungen sind:

$$0 < \lambda < \pi,\qquad 0 < \mu < 2\pi.$$

Diese Transformation, von der wir schon im vorigen Paragraphen einen speciellen Fall kennen gelernt haben, wird uns in vielen noch zu erörternden Fragen die wesentlichsten Dienste leisten.

112. Gröfsenbegriff der krummen Fläche. — Allgemeinste Transformationsformel. — Da jede Fläche sich in zwei Dimensionen ausdehnt, so versteht es sich von selbst, dafs ein Element derselben, wie auch immer, unendlich klein von der zweiten Ordnung ist und ihr Inhalt mithin durch eine doppelte Integration zu bestimmen sein wird. Dieses Element des Doppelintegrals oder der beliebigen krummen Fläche, von welchem die Wertbestimmung ihres Inhalts abhängt, soll jetzt aufgesucht werden, wozu wir uns vor allem darüber Klarheit verschaffen müssen, was man denn eigentlich unter der Gröfse einer krummen Fläche zu verstehen habe.

An sich ist die krumme Fläche nicht mit der Ebene vergleichbar. Es gibt zwar gröfsere und kleinere Polyederflächen und gröfsere und kleinere ebene Flächenstücke, und ein jeder weifs, was das heifst, und dafs dieselben völlig bestimmt sind. Die Gröfse, der Inhalt einer krummen Fläche aber ist an sich gar nichts Bestimmtes, denn es läfst sich keine polyedrische Fläche angeben, die im Vergleich zu jener gröfser oder kleiner wäre. Auch das Archimedische Axiom, welchem zufolge man in der umhüllenden Polyederfläche eine gröfsere, in der eingeschriebenen eine kleinere Fläche hätte, vermag über diese Schwierigkeit nicht hinwegzuhelfen, weil das immer schon die Vorstellung eines Gröfsenbegriffs voraussetzen würde.

Schon mit dem Längenbegriff der krummen Linie verhält es sich ganz analog. Denn wenn man auch, eben auf Grund des Archimedischen Axioms, sagt — und es sogar hat beweisen wollen, dafs (Fig. 25) ein System umschriebener Geraden gröfser, und ein System eingeschriebener Geraden kleiner ist als die Kurve, so nahe sie auch an dieselbe heranrücken, so ist damit doch nichts gewonnen, weil auch dies schon die Vorstellung von der Gröfse des Bogens voraussetzt. Es liegt dieser Auffassungsweise eigentlich eine physikalische Anschauung zu Grunde, indem man sich nämlich die Kurve als ausdehnbar denkt, vermöge welcher Eigenschaft sie thatsächlich zum Zusammenfallen mit der umschriebenen Linie gebracht werden könnte und alsdann allerdings an Länge zunehmen würde.

Fig. 25.

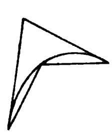


Fig. 26.

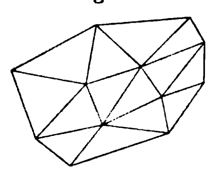
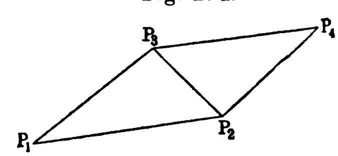


Fig. 27a.



So ist also die gerade Linie nicht mit der krummen Linie, die ebene Fläche nicht mit der krummen Fläche vergleichbar, und können wir mithin die Gröfse der krummen Fläche als reine Definitionssache ansehen, bei der nichts zu beweisen ist. Wir stellen folgende Definition auf:

Es seien (Fig. 26) lauter auf der Fläche nahe beieinander gelegene Punkte in der Weise durch gerade Linien verbunden, dafs durch diese eine zusammenhängende Reihe ebener Dreiecke bestimmt wird. Dann soll unter Gröfse der krummen Fläche die Grenze verstanden werden, gegen welche der Gesamtinhalt dieses Systems von Dreiecken konvergiert, wenn man die Punkte unendlich nahe aneinander rücken, mithin alle Dreiecke unendlich klein werden läfst.

Dementsprechend denken wir uns also nun — analog mit der Aufgabe des § 108 (man vergleiche Fig. 19, S. 232) — auf unserer Oberfläche vier solche benachbarte, in unendlich kleiner Entfernung voneinander liegende Punkte (Fig. 27a):

$$P_1, \qquad P_2, \qquad P_3, \qquad P_4,$$

die (in der Fundamentalebene) den Stellen

$$(\lambda, \mu), \quad (\lambda + d\lambda, \mu), \quad (\lambda, \mu + d\mu), \quad (\lambda + d\lambda, \mu + d\mu)$$

entsprechen mögen, und verbinden sie durch gerade Linien: so ist, streng genommen, das Viereck $P_1 P_2 P_4 P_3$ kein ebenes Viereck, sondern wird durch seine Diagonale $P_2 P_3$ in zwei nicht in derselben Ebene befindliche Dreiecke geteilt. Da aber der Neigungswinkel der beiden Dreiecke offenbar nur unendlich wenig von 2 R verschieden sein kann, so darf an der Grenze das Viereck, das schon geradlinig ist, auch als ein ebenes angesehen werden.

Aber dies Viereck ist, mit Vernachlässigung verschwindender Fehler der höheren unendlich kleinen Ordnungen, auch ein Parallelogramm, wozu, wie in § 108, zu zeigen ist, dafs die betreffenden Quotienten, durch welche die trigonometrischen Tangenten ausgedrückt werden, einander gleich sind, hier aber immer in Bezug auf zwei Achsen; es mufs also z. B. nicht nur

$$\frac{P_2 - P_1}{dx} = \frac{P_4 - P_3}{dx}, \quad \text{sondern auch} \quad \frac{P_2 - P_1}{dy} = \frac{P_4 - P_3}{dy}$$

sein.

Zu diesem Nachweise sind vermittelst der Gleichungen (1) des vorigen Paragraphen $\lambda, \mu, \ldots$ durch die ihnen entsprechenden rechtwinkligen Koordinaten zu ersetzen, auf welche man übergehen mufs, weil uns in diesem System schon alles durch die analytische Geometrie vorbereitet ist. Setzt man zur Abkürzung die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = a, \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = b, \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda} = c;$$
$$\frac{\partial x}{\partial \mu} = a_1, \quad \frac{\partial y}{\partial \mu} = b_1, \quad \frac{\partial z}{\partial \mu} = c_1,$$

so sind, mit Vernachlässigung der höheren Ordnungen, die rechtwinkligen Koordinaten der vier Punkte

$$(P)\begin{cases} \text{für } P_1 \ldots x, y, z, \\ \;\;\text{„}\;\; P_2 \ldots x + a\,d\lambda,\ y + b\,d\lambda,\ z + c\,d\lambda, \\ \;\;\text{„}\;\; P_3 \ldots x + a_1 d\mu,\ y + b_1 d\mu,\ z + c_1 d\mu, \\ \;\;\text{„}\;\; P_4 \ldots x + a\,d\lambda + a_1 d\mu,\ y + b\,d\lambda + b_1 d\mu,\ z + c\,d\lambda + c_1 d\mu. \end{cases}$$

Nun sind hier sogar schon, was nicht einmal zur Erfüllung des

Parallelismus nötig wäre, alle Differenzen, welche Zähler und Nenner der betreffenden Quotienten bilden, selbst einander gleich, indem sie sich auf die Differentiale reducieren, z. B. für die Seiten $P_2 P_1$ und $P_4 P_3$ die beiden Zähler:

$z + c\,d\lambda - z = c\,d\lambda$ bezw. $z + c\,d\lambda + c_1\,d\mu - z - c_1\,d\mu = c\,d\lambda$,

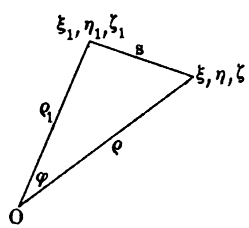
und die beiden Nenner dx:

$x + a\,d\lambda - x = a\,d\lambda$ bezw. $x + a\,d\lambda + a_1\,d\mu - x - a_1\,d\mu = a\,d\lambda$;

und ebenso fände man für die Seiten $P_3 P_1$ und $P_4 P_2$ beide Zähler gleich $c_1\,d\mu$, beide Nenner dx gleich $a_1\,d\mu$. Um wieviel mehr werden die Quotienten einander gleich sein.

Danach ist das Viereck ein Parallelogramm und mithin das Dreieck $P_1 P_2 P_3$ seine Hälfte, so dafs es, um den gesuchten Inhalt des Parallelogramms zu haben, nur auf die Formel ankommt, die den Inhalt eines Dreiecks im Raume aus den Koordinaten seiner drei Ecken finden lehrt. Diese Formel kann man erhalten entweder durch Projicierung des Dreiecks auf zwei Koordinatenebenen, was eine Zurückführung auf die analoge Aufgabe des § 108 wäre, oder auch direkt durch Formeln der Trigonometrie. Wir schlagen diesen letzteren Weg ein.

Fig. 27 b.



Die eine Ecke P_1 des Dreiecks liege im Anfangspunkt O (Fig. 27 b) der rechtwinkligen Koordinaten; die Koordinaten der beiden anderen Ecken seien

$$\text{für } P_2:\ \xi, \eta, \zeta, \qquad \text{für } P_3:\ \xi_1, \eta_1, \zeta_1,$$

(auch ihre Projektionen ergäben sich hier ohne Schwierigkeit: man hätte nur $\zeta = 0$, $\zeta_1 = 0$, bezw. $\eta = 0$, $\eta_1 = 0$ zu setzen); die drei Seiten seien ϱ, ϱ_1, s, letztere dem Nullpunkt und dem Winkel φ des Dreiecks gegenüberliegend. Dann ist der Inhalt des Dreiecks:

$$\tfrac{1}{2}\varrho\,\varrho_1 \sin\varphi;$$

ferner:

$$\cos\varphi = \frac{\varrho^2 + \varrho_1^2 - s^2}{2\varrho\,\varrho_1}.$$

Da aber, in den Koordinaten ausgedrückt,

$$\begin{aligned}\varrho^2 + \varrho_1^2 - s^2 = {} & \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 \\ & - (\xi - \xi_1)^2 - (\eta - \eta_1)^2 - (\zeta - \zeta_1)^2,\end{aligned}$$

also

$$\cos\varphi = \frac{\xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1}{\varrho\varrho_1}$$

und folglich

$$\varrho\varrho_1 \sin\varphi = \sqrt{(\varrho\varrho_1)^2 - (\xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1)^2}$$

ist, so gewinnt man für den Inhalt des Parallelogramms ($P_1 P_2 P_4 P_3$ in Fig. 27a) die Formel:

$$(1) \quad \sqrt{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2) - (\xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1)^2}.$$

Man kann diese Formel leicht auch noch auf eine andere Gestalt bringen.

Nach einem bekannten Satze aus der Algebra ergibt nämlich das Produkt zweier Summen von je vier Quadraten wiederum eine Summe von vier Quadraten, und zwar haben in dem uns vorliegenden speciellen Falle, wo sich in jedem der beiden Faktoren die vier Quadrate auf drei reducieren, drei Quadrate des Produkts zu Basen Determinanten oder in sich selbst zurückkehrende Differenzen. Durch Anwendung dieses Satzes auf die Formel (1) erhält man für das erste Glied des Radikanden den Ausdruck:

$$(\xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1)^2 + (\xi\eta_1 - \eta\xi_1)^2 + (\eta\zeta_1 - \zeta\eta_1)^2 + (\zeta\xi_1 - \xi\zeta_1)^2,$$

und mithin für den Inhalt des Parallelogramms die andere Formel — und beide leisten gleich wesentliche Dienste:

$$(2) \quad \sqrt{(\xi\eta_1 - \eta\xi_1)^2 + (\eta\zeta_1 - \zeta\eta_1)^2 + (\zeta\xi_1 - \xi\zeta_1)^2}.$$

Hat aber nun das Dreieck eine beliebige Lage im Raume, so braucht man sich nur den Anfangspunkt der Koordinaten nach einem der Eckpunkte des Dreiecks hin verlegt zu denken. Dann sind die neuen Koordinaten seiner beiden anderen Ecken gleich ihren ursprünglichen Koordinaten weniger den Koordinaten des neuen Anfangspunktes, und man hat wieder den vorigen Fall.

Denkt man sich also z. B. den Anfangspunkt nach der Ecke P_1 des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ in der Fig. 27a, mithin nach O in Fig. 27b, d. i. nach (λ, μ) oder (x, y, z) verlegt, so sind jetzt offenbar die früheren Koordinaten ξ, η, ζ von P_2 durch die auf P_2 und P_1 bezüglichen Differenzen, also durch die aus den Werten (P) fließenden Ausdrücke

$$\frac{\partial x}{\partial\lambda}\,d\lambda,\ \frac{\partial y}{\partial\lambda}\,d\lambda,\ \frac{\partial z}{\partial\lambda}\,d\lambda,$$

und ebenso die Koordinaten ξ_1, η_1, ζ_1 von P_3 durch

$$\frac{\partial x}{\partial \mu} d\mu, \; \frac{\partial y}{\partial \mu} d\mu, \; \frac{\partial z}{\partial \mu} d\mu$$

zu ersetzen und in (1) und (2) zu substituieren.

Dadurch ergeben sich für den Inhalt unseres Parallelogramms oder für das allgemeine Element der krummen Fläche die beiden Formeln:

$$(1_0) \quad d\lambda\, d\mu \sqrt{\left\{\begin{array}{c}\left(\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2\right)\left(\left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \mu}\right)^2\right)\\ -\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial \mu}+\frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial \mu}+\frac{\partial z}{\partial \lambda}\frac{\partial z}{\partial \mu}\right)^2\end{array}\right\}}$$

und

$$(2_0) \quad d\lambda\, d\mu \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial \mu}-\frac{\partial x}{\partial \mu}\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{\partial z}{\partial \mu}-\frac{\partial y}{\partial \mu}\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial \mu}-\frac{\partial z}{\partial \mu}\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2},$$

wo in Anbetracht, dafs $d\lambda$, $d\mu$ stets positiv zu nehmen sind, dasselbe auch von den Quadratwurzeln gilt.

113. Folgerungen. — 1. So wie die Aufgabe des vorigen Paragraphen analog ist der in § 108 behandelten, so ist auch der für das allgemeine Element der krummen Fläche gefundene Ausdruck analog demjenigen des § 108 für das Element einer Ebene, nur dafs jener allgemeiner ist und das frühere Resultat als speciellen Fall in sich enthält. Denn setzt man $z = 0$ und x und y arbiträr, d. h. ohne Relation zueinander voraus, so müssen die Gleichungen der krummen Fläche in die der Ebene übergehen, wo ja die dritte Koordinate z gleich Null (oder konstant) ist und die beiden anderen Koordinaten völlig beliebig und unabhängig voneinander sind. Und in der That verwandelt sich dann, indem man nunmehr $\frac{\partial z}{\partial \lambda} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial \mu} = 0$ hat, die (2_0) des § 112 unmittelbar in die (3) des § 108:

$$d\lambda\, d\mu \cdot \left|\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial \mu} - \frac{\partial x}{\partial \mu}\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)\right|.$$

2. Unserer Darstellung der drei Koordinaten x, y, z der krummen Fläche als drei Funktionen der beiden Variablen λ, μ vermittelst der Gleichungen

$$(1) \qquad x = \varphi(\lambda, \mu), \quad y = \psi(\lambda, \mu), \quad z = \chi(\lambda, \mu)$$

entspricht auch wieder wie bei der Ebene die Einteilung der

Fläche in Elemente durch zwei Systeme von Kurven. Denn eliminiert man, während μ konstant gesetzt wird, aus diesen Gleichungen λ, so erhält man zwei Gleichungen zwischen x, y, z und dem Parameter μ, die, mittels zweier ihrer Projektionen, eine Kurve darstellen, welche zugleich mit μ variiert. Und auf dieselbe Weise verschafft man sich das andere System von Kurven, wenn man λ konstant macht und μ eliminiert.

3. In den allgemeinen Formeln des § 112 ist auch der häufig vorkommende und schon oben [**111**, (1')] besonders hervorgehobene specielle Fall enthalten, wo die eine Koordinate, z. B. z, direkt durch die beiden anderen Koordinaten ausgedrückt ist. Dazu hat man nur *pure* $\lambda = x$, $\mu = y$ zu setzen, so dafs x und y mit λ und μ zusammenfallen und die Gleichungen (1) sich auf

$$(1_0) \qquad x = \lambda, \quad y = \mu, \quad z = \chi(x, y)$$

reducieren.

Dann ist nicht nur die gegenseitige Relation zwischen diesen Gröfsen die denkbar einfachste, sondern nehmen selbstverständlich auch unsere Ausdrücke für das Flächenelement eine einfachere Gestalt an. Denn unter Benutzung der bekannten Bezeichnungen für die partiellen Derivierten von z, die seit Monge in der Flächentheorie gäng und gäbe sind, nämlich:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \ \frac{\partial z}{\partial y} = q; \ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t\right),$$

verwandelt sich in diesem Falle wegen der dann stattfindenden Werte

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = 1, \ \frac{\partial y}{\partial \lambda} = 0, \ \frac{\partial z}{\partial \lambda} = \frac{\partial z}{\partial x} = p,$$
$$\frac{\partial x}{\partial \mu} = 0, \ \frac{\partial y}{\partial \mu} = 1, \ \frac{\partial z}{\partial \mu} = \frac{\partial z}{\partial y} = q$$

z. B. die (1_0) des vorigen Paragraphen in den Ausdruck

$$(2) \qquad \begin{aligned} &dx\,dy \sqrt{(1+p^2)(1+q^2) - p^2q^2} \\ &= dx\,dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}, \end{aligned}$$

der sich auch leicht direkt aus dem Fundamentalsatze der analytischen Geometrie ableiten läfst, dafs irgend eine ebene Figur gleich ist ihrer senkrechten Projektion auf eine feste Ebene, multipliciert mit der secante der Neigung der beiden Ebenen zueinander oder der secante des Winkels ihrer beiden Normalen.

Nun ist aber hier die Projektion unseres Flächenelementes (des Parallelogramms) auf die Ebene der x, y das Rechteck $dx\,dy$, und der Faktor $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$ drückt in der That, wie man weifs, die secante des Neigungswinkels der beiden Ebenen zueinander aus.

Umgekehrt könnte man auch, worauf wir schon am Anfang des § 111 hingewiesen haben, von der speciellen Formel (2) aus zu dem allgemeinen Ausdruck für das Flächenelement übergehen, was nicht die geringste Schwierigkeit hat, aber als Übung sehr empfehlenswert ist. Dabei ist zu beachten, dafs man alsdann — ein einfaches Beispiel zu der in den Elementen der Differentialrechnung gelehrten Vertauschung der Variablen — nicht nur dx und dy als Funktionen der unabhängigen Veränderlichen λ, μ anzusehen, sondern, um nur gleichförmige Differentialquotienten zu haben, auch $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ in solche nach λ und μ umzusetzen hätte.

4. Der Ausdrucksweise der drei Koordinaten x, y, z durch λ und μ kann man, zur Verdeutlichung der Auffassung, leicht eine geometrische Interpretation unterlegen. Man denke sich nämlich auf irgend einer Hülfsebene λ und μ als rechtwinklige Koordinaten. Alsdann ist das Produkt $d\lambda\,d\mu$ das rektanguläre Element dieser Ebene, und in Bezug auf die Schlufsformeln des vorigen Paragraphen ist ein jedes dieser Elemente mit dem daselbst stattfindenden Werte der Quadratwurzel zu multiplicieren. So entspricht ein solcher Ausdruck der Gröfse des zugehörigen Elementarparallelogramms (bei x, y) auf unserer krummen Oberfläche, und der ganzen zu ermittelnden Oberfläche wird ein gehöriges Stück der Hülfsebene korrespondieren.

Gebraucht man speciell die Substitution (1_0), so ist dadurch schon die Hülfsebene bestimmt, indem sie dann zusammenfällt mit der Koordinatenebene der x, y; in dem dieser Substitution zugehörigen Ausdruck (2) bedeutet, wie in Nr. 3 gezeigt, die Quadratwurzel den inversen Projektionsfaktor des entsprechenden Elementes der krummen Fläche. — Handelt es sich z. B. um das Ellipsoid (2) des § 111, so würde die Hülfsebene der durch die Halbachsen α und β gelegte Hauptschnitt desselben sein.

II. Komplanation des Ellipsoids.

114. Inangriffnahme des Problems. — Wir gehen jetzt dazu über, die vorstehende allgemeine Theorie auf das Ellipsoid[71]) anzuwenden. Wir werden bei diesem Problem uns etwas länger verweilen und die Fläche des Ellipsoids auf drei bis vier verschiedene Methoden quadrieren, um die Vorteile kennen zu lernen, die man durch Einführung neuer Variablen erzielen kann.

In diesem Paragraphen untersuchen wir zunächst, wie sich die Aufgabe gestaltet und wie weit ihre Lösung gelingt, wenn wir der Komplanation des durch seine auf rechtwinklige Achsen bezogene Mittelpunktsgleichung

$$\text{(I)} \qquad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

gegebenen Ellipsoids einerseits die Formeln (1_0) und (2) des vorigen Paragraphen

$$\text{(1)} \qquad z = \chi(x, y), \qquad dx\,dy\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2},$$

andererseits die Ivorysche Substitution [111, (1_0)]

$$\text{(2)} \qquad x = \alpha\cos\lambda, \quad y = \beta\sin\lambda\cos\mu, \quad z = \gamma\sin\lambda\sin\mu$$

$$(0 < \lambda < \pi; \quad 0 < \mu < 2\pi)$$

zu Grunde legen.

Es ist klar, dafs man bei Anwendung der Formeln (1) die (I) nach z auflösen müfste, um die Funktion $z = \chi(x, y)$ zu erhalten und aus ihr die partiellen Derivierten von z herzuleiten. Man könnte zwar auch zuerst differentiieren und dann den Wert von z einsetzen, aber, wie man sieht, einer Auflösung der Gleichung entgeht man nie.

Die Gleichung (I) liefert

$$z = \pm\gamma\sqrt{1 - \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2}},$$

also eigentlich zwei Systeme von Koordinaten, die indessen in Bezug auf die Ebene der x, y völlig symmetrisch sind; und da die Funktionen unter dem Integralzeichen immer eindeutig sein müssen, so kann man ganz gut sich auf den absoluten Wert der Quadratwurzel beschränken, so dafs dann die Integration sich nur über die obere Hälfte der Oberfläche des Ellipsoids erstreckt.

— Bevor man aber zu der Integration übergeht, hat man selbstverständlich in die zweite Formel (1) die Werte für die Derivierten von z einzusetzen.

Bedient man sich hingegen der Formeln (2), so hat man diese Substitution in einer der Schlufsformeln des § 112, z. B. in

$$(2_0)\quad d\lambda\, d\mu \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial \mu}-\frac{\partial x}{\partial \mu}\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{\partial z}{\partial \mu}-\frac{\partial y}{\partial \mu}\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial \mu}-\frac{\partial z}{\partial \mu}\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2}$$

vorzunehmen.

Beide Methoden verlaufen wesentlich verschieden. Bei jener wird man gar keine, bei dieser wenigstens eine Integration vollführen können, wenngleich das Resultat auch nicht in der besten Form erscheint.

I. Zunächst verfolgen wir diese letztere Methode weiter.

Nach dem eben Bemerkten haben wir zuvörderst uns die Werte der sechs partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda},\quad \frac{\partial y}{\partial \lambda},\quad \frac{\partial z}{\partial \lambda},$$
$$\frac{\partial x}{\partial \mu},\quad \frac{\partial y}{\partial \mu},\quad \frac{\partial z}{\partial \mu}$$

zu verschaffen, um sie in die (2_0) einzusetzen. Für dieselben ergeben sich aus den (2) beziehentlich die Ausdrücke:

$$(2')\qquad \begin{cases} -\alpha \sin\lambda, & \beta\cos\mu\cos\lambda, \quad \gamma\sin\mu\cos\lambda, \\ 0, & -\beta\sin\lambda\sin\mu, \quad \gamma\sin\lambda\cos\mu. \end{cases}$$

Bei ihrer Substitution in die (2_0) braucht man aber nun nicht so ängstlich gerade dieselbe Ordnung von Minuend und Subtrahend der einzelnen Determinanten einzuhalten, wie sie in der (2_0) befolgt ist; sondern da von den Differenzen doch die Quadrate zu nehmen sind, so darf man ersichtlicherweise die verschiedenen Kreuzprodukte der Werte (2′), von denen wegen $\frac{\partial x}{\partial \mu} = 0$ noch zwei ausscheiden, ohne Rücksichtnahme auf obige Ordnung voneinander subtrahieren. So kommt offenbar unter der Quadratwurzel der Ausdruck zu stehen:

$$\alpha^2\beta^2\sin^4\lambda\sin^2\mu + \alpha^2\gamma^2\sin^4\lambda\cos^2\mu$$
$$+ \beta^2\gamma^2\sin^2\lambda\cos^2\lambda(\cos^2\mu + \sin^2\mu)^2,$$

aus dem noch im letzten Gliede der Faktor $(\cos^2\mu + \sin^2\mu)^2$ als $= 1$ fortfällt.

Das Flächenelement ist also, wenn man den gemeinschaftlichen Faktor $\sin^2\lambda$ vor die Wurzel treten läſst:

$$(2_0') \quad d\lambda\, d\mu \sin\lambda \sqrt{\beta^2\gamma^2\cos^2\lambda + \alpha^2\sin^2\lambda\,(\beta^2\sin^2\mu + \gamma^2\cos^2\mu)},$$

wo $\sin\lambda$, dessen arcus von 0 bis π geht, stets positiv, und mithin auch die Wurzel absolut zu nehmen ist.

Auch hier setzt sich der Radikand, wie in der (2_0), aus lauter Quadraten zusammen.

Nun erkennt man ohne Schwierigkeit, daſs vorstehender Ausdruck nach der Variablen λ integrabel ist, aber nicht nach μ. Denn bei der Integration nach μ müſste unter der Wurzel entweder $\sin^2\mu$ oder $\cos^2\mu$ eliminiert werden, wodurch dieselbe, im ersteren Falle zum Beispiel, die Form erhielte:

$$\sqrt{\beta^2\gamma^2\cos^2\lambda + \alpha^2\beta^2\sin^2\lambda + \alpha^2(\gamma^2 - \beta^2)\sin^2\lambda\cdot\cos^2\mu},$$

immer aber von der Gestalt sein würde:

$$\sqrt{k + l\begin{cases}\sin^2\mu\\ \cos^2\mu\end{cases}},$$

wo k und l nach μ konstant sind: und eine Quadratwurzel von dieser Beschaffenheit konstituiert bekanntlich ein elliptisches Integral der zweiten Gattung.

Nach λ hingegen läſst sich wegen des noch vor der Wurzel befindlichen Faktors $\sin\lambda$ der Ausdruck $(2_0')$ unbestimmt integrieren. Denn, weil $\sin^2\lambda = 1 - \cos^2\lambda$, kann dieselbe Wurzel auch so geschrieben werden:

$$(2_0'') \quad \sqrt{\alpha^2(\beta^2\sin^2\mu + \gamma^2\cos^2\mu) + (\beta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2\sin^2\mu - \alpha^2\gamma^2\cos^2\mu)\cdot\cos^2\lambda},$$

ist also dann ebenfalls von der Form

$$\sqrt{k + l\cos^2\lambda},$$

wo k und l konstant in Bezug auf λ sind.

Danach hat man

$$\int d\lambda \sin\lambda \sqrt{k + l\cos^2\lambda}$$

oder, vermittelst der Substitution

$$\cos\lambda = z, \qquad d\lambda\sin\lambda = -dz,$$

$$(3) \qquad -\int dz\sqrt{k + l z^2},$$

und diese Integration ist bekanntlich ausführbar.

So wäre denn nach derselben die Oberfläche des Ellipsoids wenigstens durch ein einfaches Integral, von elliptischer

Form, ausgedrückt, und mehr läfst sich überhaupt nicht erreichen. Aber das Resultat hätte weder die beste Gestalt noch die geeignetste Form, sondern wäre im Gegenteil sehr kompliziert und unangenehm, wie man sich leicht überzeugt, wenn man einige Schritte in der Rechnung thut.

Bezeichnet man nämlich in der $(2_0'')$ die erste der beiden nach λ Konstanten als immer positive Gröfse durch l^2 (wo aber l nicht mit dem eben gebrauchten l zu verwechseln ist), die andere, die positiv oder negativ sein kann, durch m, setzt man also

$$\alpha^2(\beta^2 \sin^2\mu + \gamma^2 \cos^2\mu) = l^2$$

und

$$\beta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2 \sin^2\mu - \alpha^2\gamma^2\cos^2\mu = m, \tag{3'}$$

so hat man das Integral $\int d\lambda \sin\lambda \sqrt{l^2 + m\cos^2\lambda}$ oder, statt der (3), das Integral

$$- \int du \sqrt{l^2 + m u^2}. \tag{3_0}$$

Dieses Integral kann also nach den bekannten Regeln unbestimmt gefunden werden: je nachdem m positiv oder negativ ist, ergibt es zwei verschiedene Formen, entweder einen Logarithmus oder eine Funktion invers trigonometrischen Charakters, welche beiden Formen indes ineinander überführbar sind, indem das eine Integral das Imaginäre des anderen ist.

Welches Zeichen aber m hat, hängt von dem Gröfsenverhältnis der drei Achsen des Ellipsoids zueinander ab, das man natürlich von vornherein festsetzen darf, wie man will. Und da ist es offenbar, dafs man sich so einrichten kann, dafs m stets, d. h. für alle Werte von μ positiv, oder immerfort negativ, oder endlich in dem einen Intervall von μ durchaus positiv, in dem anderen nur negativ ist, welches letztere das Allerunvorteilhafteste wäre und eine diesem Zeichenwechsel von m entsprechende Teilung des Integrals nach μ erforderlich machen würde. Wählt man aber α zur gröfsten oder kleinsten Halbachse, so tritt, wie wir jetzt zeigen wollen, dieser Fall nicht ein, sondern dann behält m immer dasselbe Zeichen bei.

Denn setzen wir z. B. voraus, α sei die kleinste Halbachse, während wir die gegenseitige Gröfse von β und γ ganz unentschieden lassen, so folgt mit Notwendigkeit, dafs sowohl $\alpha^2\beta^2$ als auch $\alpha^2\gamma^2$ kleiner ist als $\beta^2\gamma^2$; und da aufserdem die beiden ersteren dieser drei Produkte in der (3′) noch mit $\sin^2\mu$ bezw. $\cos^2\mu$ multipliciert sind, deren Summe erst $= 1$ ist, so mufs auch die Summe dieser beiden Produkte kleiner sein als $\beta^2\gamma^2$[72]). In der That, ganz allgemein bewegt sich ein Ausdruck

$$b^2\cos^2\mu + c^2\sin^2\mu = b^2 + (c^2 - b^2)\sin^2\mu,$$

während $|\sin\mu|$ von 0 bis 1 geht, offenbar stetig von b^2 bis c^2, kann aber darüber hinaus keine Werte haben. Zieht man ihn also von a^2 ab, so erhält man für alle Werte von μ etwas Positives, wenn a^2 (d. i. $\beta^2\gamma^2$) gröfser ist als b^2 und als c^2, etwas Negatives, wenn a^2 kleiner ist als b^2 und c^2, etwas Wechselndes, wenn a^2 zwischen b^2 und c^2 liegt.

Hiernach ist also in dem von uns angenommenen Falle (α kleinste Halbachse) m immer positiv und $\sqrt{m}$ stets reell (während, wenn α die gröfste Halbachse, im Gegenteil m immer negativ wäre). Das Integral (3_0) kann daher jetzt so geschrieben werden:

$$-\int du\sqrt{l^2 + mu^2} = -\sqrt{m}\int du\sqrt{u^2 + \frac{l^2}{m}} \qquad \begin{matrix}(\alpha < \beta,\\ \alpha < \gamma)\end{matrix}$$

und wird durch die gewöhnlichen Mittel ausgewertet. Es ergibt sich:

$$\int du\sqrt{u^2 + \frac{l^2}{m}}$$
$$= \frac{1}{2}u\sqrt{u^2 + \frac{l^2}{m}} - \frac{1}{2}\frac{l^2}{m}\log\left(u + \sqrt{u^2 + \frac{l^2}{m}}\right) + C\text{[73]},$$

und für das ganze, von $\lambda = 0$ bis $\lambda = \pi$, mithin in Bezug auf $u = \cos\lambda$ von 1 bis -1 erstreckte Integral, unter Anwendung des Satzes von der Umkehrung der Grenzen:

$$\int_{-1}^{1} du\sqrt{u^2 + \frac{l^2}{m}} = \sqrt{1 + \frac{l^2}{m}} + \frac{1}{2}\frac{l^2}{m}\log\frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{l^2}{m}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{l^2}{m}}}.$$

Weiter ist nunmehr die Integration dieses Ausdruckes nach μ vorzunehmen, die sich von 0 bis 2π zu erstrecken hat, aber nicht ausführbar ist. Dabei würde man finden, dafs dann ein Integral kommt, welches genau eine solche Quadratwurzel wie das elliptische Integral der zweiten Gattung enthält, aber unter einem Logarithmus befindlich, also, wie wir eben zeigen wollten, in einer ungeheuer komplizierten Form. und das bleibt sie auch ungeachtet einiger Vereinfachungen, die sich noch anbringen liefsen.

Ähnlich sind die Resultate bei einer anderen Rangordnung der Achsen, nur dafs dann die Quadratwurzel unter einer invers trigonometrischen Funktion erscheinen würde.

Aus allem diesem geht hervor, dafs diese Methode nicht empfehlenswert ist. Nur den einen Vorteil bietet sie, dafs sich, wie leicht einzusehen, durch sie auch ein beliebiges Stück der Oberfläche des Ellipsoids auf ein einfaches Integral zurückführen läfst.

II. Wir wenden uns jetzt der Behandlungsweise des Problems vermittelst der Formeln (1) zu, die von einfacherer Zusammensetzung sind, aber, wie schon bemerkt, an und für sich gar keine Integration gestatten.

Man hat damit zu beginnen, in den Ausdruck (1) für das Flächenelement die Werte von $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ und darauf den Wert von z selbst einzuführen.

Die Gleichung (I) des Ellipsoids gibt:

$$\frac{x}{\alpha^2} + \frac{z}{\gamma^2}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \text{also} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\frac{x}{z}.$$

Ebenso hat man infolge der vollkommenen Symmetrie der (I), ohne Rechnung, lediglich durch Vertauschung von x mit y und von α mit β:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\gamma^2}{\beta^2}\frac{y}{z}.$$

Danach wird die (1):

$$dx\,dy\,\frac{\gamma^2}{z}\sqrt{\frac{z^2}{\gamma^4} + \frac{y^2}{\beta^4} + \frac{x^2}{\alpha^4}},$$

wo die Quadratwurzel absolut zu nehmen ist, weil z hier nur positive Werte hat (vergl. S. 257).

Wir bemerken noch, was bei einer anderen Behandlung unserer Aufgabe (118; 120) von Nutzen sein kann, dafs diese Quadratwurzel eine geometrische Bedeutung hat. Läfst man nämlich vom Mittelpunkt des Ellipsoids ein Perpendikel herab auf seine Tangentialebene im Punkte (x, y, z) der Oberfläche, so ist die Länge dieses Perpendikels gleich

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{\alpha^4}+\frac{y^2}{\beta^4}+\frac{z^2}{\gamma^4}}}. —$$

Ersetzen wir nun noch z durch seinen Wert

$$(1') \qquad z = \gamma\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}},$$

so erhalten wir für das Element unseres Doppelintegrals den Ausdruck:

$$(1_0) \qquad dx\,dy\frac{\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\gamma^2}\right)x^2+\frac{\gamma^2}{\beta^2}\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\gamma^2}\right)y^2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}}},$$

der also im Nenner eine ähnliche Wurzel wie im Zähler aufweist. Ein Ausdruck von der Beschaffenheit des vorstehenden trägt aber den Charakter eines elliptischen Integrals in algebraischer Form an sich, und zwar in Bezug auf jede der beiden Variablen x, y, weshalb er auch weder nach x noch nach y integrabel ist. Da er aber nicht einmal die übliche Form eines elliptischen Integrals besitzt, so müfste man ihn erst auf diese zubereiten, wozu zuvörderst der Bruch mit der in seinem Zähler befindlichen Wurzel zu erweitern wäre, um daselbst eine rationale Funktion zu haben.

Obschon dann der Nenner gleich die geraden Potenzen (bis zur vierten einschliefslich) enthalten würde, auf welche Form man sonst erst den Ausdruck zu reducieren hätte, so läfst sich doch auch von dieser zweiten Methode nicht behaupten, dafs sie zu einem genügenden Resultate führt. Nichtsdestoweniger ist sie am geeignetsten, durch gewisse geometrische Betrachtungen auf dem einfachsten Wege das Endresultat in seiner passendsten Form abzuleiten.

Das soll im folgenden Paragraphen geschehen.

115. Die Catalansche Lösung. — Die geometrische Bedeutung des Flächenelements

$$(1) \qquad dx\,dy\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

ist uns schon aus § 113, 3. und 4. bekannt. Nun leuchtet aber ein, dafs es unendlich viele Wertsysteme von x und y geben mufs, für welche die secante

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

oder der zugehörige arcus ein und denselben Wert hat, also konstant ist, und zwar wird sich finden, dafs diese sämtlichen Wertsysteme in der Projektionsebene der x, y, dem einen Hauptschnitt des Ellipsoids, eine gewisse Ellipse determinieren oder vielmehr einen Streifen zwischen zwei solchen benachbarten Ellipsen. Dies zeigt sogleich, dafs sich unser Doppelintegral auf ein einfaches Integral wird reducieren lassen, indem man nur diesen ovalen Ring zu berechnen und dann mit der konstanten secante zu multiplicieren hat.

Dazu empfiehlt es sich wieder, um über die Vorzeichen der Koeffizienten von x^2 und y^2 im Zähler der (1_0) des vorigen Paragraphen ganz nach unserem Belieben verfügen zu können, eine bestimmte Rangordnung der Achsen festzusetzen, und zwar wollen wir es so einrichten, dafs jene beiden Koeffizienten negativ werden. Bringen wir zu diesem Zwecke zuvor den Faktor von $dx\,dy$ in der (1_0) auf die Form

$$\frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}\left(1-\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right)-\frac{y^2}{\beta^2}\left(1-\frac{\gamma^2}{\beta^2}\right)}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}}},$$

so erkennt man auf der Stelle, dafs wir dann γ zur kleinsten Halbachse wählen müssen, während über die gegenseitige Gröfse von α und β gar keine Bestimmung getroffen zu werden braucht. Der Einfachheit halber möge der vorstehende inverse Projektionsfaktor des Elementes durch v, und die Koeffizienten von $\frac{x^2}{\alpha^2}$ und $\frac{y^2}{\beta^2}$ in seinem Zähler, die mithin jetzt positive echte Brüche sind, durch l^2 bezw. m^2 bezeichnet werden. Alsdann hat man

$$\gamma<\begin{cases}\beta\\ \alpha\end{cases};\quad 1-\frac{\gamma^2}{\alpha^2}=l^2<1,\quad 1-\frac{\gamma^2}{\beta^2}=m^2<1$$

und

$$(2)\qquad v=\frac{\sqrt{1-l^2\frac{x^2}{\alpha^2}-m^2\frac{y^2}{\beta^2}}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}}},$$

wo beide Wurzeln der ganzen Ableitung nach absolut zu nehmen sind und v daher einwertig ist. Dieses v ist aber offenbar ein positiver unechter Bruch, da die Subtrahenden im Zähler beide kleiner sind als im Nenner, wie übrigens auch schon daraus folgt, dafs ja v eine secante ausdrückt.

Ändert sich nun v, so umfassen die verschiedenen Projektionen den ganzen betreffenden Raum.

Für ein konstantes v aber bilden, wie die aus der (2) hergeleitete Relation

$$(3)\qquad (v^2 - l^2)\frac{x^2}{\alpha^2} + (v^2 - m^2)\frac{y^2}{\beta^2} = v^2 - 1,$$

in der alle drei Koeffizienten positiv sind, zeigt, die zugehörigen Projektionen eine Ellipse in dem Hauptschnitt, deren auf die Achsen der x und y bezogene Mittelpunktsgleichung man erhält, wenn man die (3) in der Form schreibt:

$$\frac{x^2}{\left(\alpha\left|\sqrt{\frac{v^2-1}{v^2-l^2}}\right|\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\beta\left|\sqrt{\frac{v^2-1}{v^2-m^2}}\right|\right)^2} = 1.$$

Die beiden Halbachsen dieser Ellipse sind mithin

$$(3_0)\qquad \alpha\left|\sqrt{\frac{v^2-1}{v^2-l^2}}\right| \quad \text{und} \quad \beta\left|\sqrt{\frac{v^2-1}{v^2-m^2}}\right|,$$

wo die Faktoren von α und β für jeden Wert, den v haben kann, (positive) echte Brüche bezeichnen.

Für ein anderes v wird natürlich auch die Ellipse eine andere, und es ist evident, dafs sich diese verschiedenen Ellipsen nicht schneiden können, sondern sich gegenseitig einschliefsen. Denn sie haben sämtlich denselben Mittelpunkt (welcher zugleich der Mittelpunkt des Ellipsoids ist), und die Gröfse ihrer beiden Achsen nimmt infolge der eben hervorgehobenen Beschaffenheit der Ausdrücke (3_0) gleichzeitig mit v immerfort zu. Aber auch an sich ist dies klar, denn schnitten sich zwei verschiedenen Werten von v zugehörige Ellipsen, so müfste ihr gemeinschaftlicher Durchschnittspunkt dieselben Koordinaten x, y haben, und es entsprächen mithin in der (2) einem Wertepaar x, y zwei verschiedene Werte von v, was sich mit der Eindeutigkeit dieses Ausdruckes nicht verträgt.

Die Grenzwerte von v ergeben sich nun auch leicht. Aus der (1') des § 114:

$$z = \gamma \sqrt{1 - \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2}},$$

in der z reell sein mufs und nur positive Werte bis zu γ hin annehmen darf, fliefst die Grenzbedingung

$$1 \geqq \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} \geqq 0.$$

Der unteren Grenze

$$(2_0) \qquad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 0$$

entspricht der kleinstmögliche Wert von v:

$$v = 1,$$

weil der (2_0) nur genügt werden kann, wenn gleichzeitig

$$x = 0, \quad y = 0$$

ist, also in der (2) nichts von 1 abgezogen wird. Für diese Grenze verschwindet somit die Gleichung (3) der Ellipse, und die Ellipse selbst reduciert sich auf einen Punkt, den Mittelpunkt des Hauptschnittes durch α und β.

Von da an wächst v über alle Grenzen hinaus und wird offenbar unendlich grofs für die obere Grenze unserer Ungleichheit:

$$1 = \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2},$$

die den Nenner in der (2) zu Null macht. Alle diese letztere Bedingung erfüllenden Wertepaare von x und y gehören alsdann der Oberfläche des Ellipsoids selbst an, und die durch sie bestimmte Ellipse ist die Durchschnittskurve des Ellipsoids mit seinem durch α und β gelegten Hauptschnitt.

Noch bemerken wir, dafs die verschiedenen Ellipsen des ganzen konzentrischen Systems weder ähnlich noch konfokal sind, denn im ersteren Falle müfste das Verhältnis der Achsen, im zweiten Falle die Differenz der Quadrate der Halbachsen konstant sein, was beides, wie die Werte (3_0) zeigen, nicht zutrifft. Unser System von Ellipsen ist vielmehr komplizierterer Natur.

Nehmen wir also nun einen zwischen zwei unendlich nahen Ellipsen liegenden Ring und betrachten den entsprechenden Teil der Oberfläche, für welchen dieser Ring die Summe der Projektionselemente $dx\,dy$ abgibt, so ist nach dem Vorhergehenden auf demselben der inverse Projektionsfaktor v

konstant, und mithin nur der elliptische Ring auszurechnen und mit dem konstanten v zu multiplicieren. Und damit ist gleich eine Integration gemacht, und es bleibt dann nur noch nach v zwischen den Grenzen 1 und ∞ zu integrieren.

Jener Ring wird ohne die geringste Schwierigkeit gefunden. Denn der Inhalt der Ellipse, auf welcher der feste Wert v stattfindet, und deren Halbachsen die in der (3_0) angegebenen Werte haben, ist, wenn zur Abkürzung

$$\frac{v^2 - 1}{\sqrt{(v^2 - l^2)(v^2 - m^2)}} = V$$

gesetzt wird, gleich

$$\pi \alpha \beta V.$$

Der Ring wird also das der unendlich kleinen Änderung dv (Fig. 28) von v zugehörige Differential dieses Ausdruckes, d. i.

$$\pi \alpha \beta \frac{dV}{dv} dv$$

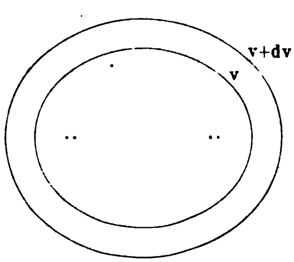
sein, wo wir nur deshalb $\frac{dV}{dv} dv$ statt des bloßen dV schreiben, um alle Zweideutigkeit zu vermeiden.

Somit ist eine Integration vollzogen und die Oberfläche des halben Ellipsoids nunmehr nach dem Obigen auf der Stelle durch das einfache Integral ausgedrückt:

$$(4) \qquad \pi \alpha \beta \int_1^\infty \frac{dV}{dv} v \, dv.$$

Wie man sieht, ist die unter dem Integralzeichen befindliche algebraische Funktion irrational und enthält unter der Quadratwurzel die Variable in der zweiten und vierten Potenz. Wir haben also ein elliptisches Integral, das in endlicher Form nicht weiter ausdrückbar ist, und folglich wäre unser Problem gelöst, wenn uns nicht noch obläge, das erhaltene Resultat in die für elliptische Integrale vorgeschriebene Normalform überzuführen. Das soll im folgenden Paragraphen geschehen.

Fig. 28.



116. Reduktion auf die kanonische Form. — Schon Euler beschäftigte sich mit den elliptischen Integralen, aber die Ausbildung ihrer Theorie haben wir Legendre zu verdanken, der für sie gewisse Haupttypen, die sogenannten kanonischen Formen aufstellte, auf welche man sie sämtlich zu ihrer gegenseitigen Vergleichung zurückführen mufs, und gerade erst durch diese Formen hat die Theorie der elliptischen Integrale eine so bedeutende Förderung erfahren.

Man unterscheidet zwischen der algebraisch und trigonometrisch kanonischen Form.

In der ersteren, die wir zunächst allein ins Auge fassen, befindet sich unter dem Integralzeichen die Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

wo der „Modul“ k numerisch kleiner als 1 sein mufs und der erste Faktor $\sqrt{1-u^2}$ sich, in einer anderen Gattung, auch oben befinden kann.

Es handelt sich also jetzt darum, unser Resultat des vorigen Paragraphen, das Integral

$$(1)\qquad \int_1^\infty \frac{dV}{dv}\, v\, dv \qquad \left(V=\frac{v^2-1}{\sqrt{(v^2-l^2)(v^2-m^2)}}\right),$$

auf eine solche Normalform zu bringen, wobei wir uns aber auf das unbestimmte Integral beschränken.

Wir wenden, was ersichtlich zweckmäfsig ist, auf den ersten Faktor teilweise Integration an. Das gibt:

$$(2)\left\{\begin{aligned}\int\frac{dV}{dv}\cdot v\,dv &= vV-\int V\,dv\\ &=\frac{v(v^2-1)}{\sqrt{(v^2-l^2)(v^2-m^2)}}-\int\frac{v^2-1}{\sqrt{(v^2-l^2)(v^2-m^2)}}\,dv.\end{aligned}\right.$$

Hier ist, im neuen Integral, eine andere zu v reciproke Variable einzuführen, wobei es jedoch, wie sich im weiteren zeigen wird, nicht gleichgültig ist, ob man zu ihrem Zähler l oder m nimmt. Wir setzen

$$v=\frac{l}{u},\quad dv=-\frac{l}{u^2}du;$$

dann ist

$$- \int \frac{v^2 - 1}{\sqrt{(v^2 - l^2)(v^2 - m^2)}}\, dv$$

(3) $$= \frac{1}{l} \int \frac{\left(\frac{l^2}{u^2} - 1\right) du}{\sqrt{(1 - u^2)\left(1 - \frac{m^2}{l^2} u^2\right)}},$$

wo

$$m^2 < l^2$$

sein mufs, weil man sonst noch nicht die kanonische Form hätte (die einen Modul $k < 1$ voraussetzt), und, um sie zu erhalten, nochmals transformieren müfste. Dieser Bedingung können wir in Anbetracht, dafs über das Gröfsenverhältnis der beiden echten Brüche

(1′) $$l^2 = 1 - \frac{\gamma^2}{\alpha^2}, \quad m^2 = 1 - \frac{\gamma^2}{\beta^2}$$

zueinander bisher noch keine Festsetzung getroffen ist, dadurch genügen, dafs wir jetzt $\alpha > \beta$ annehmen, so dafs man also die Gröfsensubordination hat

$$\alpha > \beta > \gamma,$$

die übrigens, für besondere Fälle, die Gleichheit nicht ausschliefst.

Wegen seines zweigliedrigen Zählers besteht das Integral (3) aus zwei Integralen, von denen erst das zweite ein rein elliptisches ist; das erste weist aufser der Wurzel noch den Faktor u^2 im Nenner auf, läfst sich aber durch eine kleine Rechnung in ein elliptisches Integral anderer Gattung umwandeln. Und das schliefsliche Gesamtresultat bleibt auch wirklich gemischt zwischen zwei Gattungen.

Es ist aber die trigonometrische kanonische Form der elliptischen Integrale noch üblicher als ihre algebraische Form, und daher sollen die weiteren Rechnungen in jener Form durchgeführt werden.

Die trigonometrischen kanonischen Ausdrücke werden aus den algebraischen vermittelst der Substitution

$$u = \sin\varphi$$

hergeleitet, welche als Haupttypen für die erste Gattung die Normalform

$$\int\limits_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = \int\limits_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(k, \varphi) \qquad (k^2<1)$$

und für die zweite Gattung die Normalform

$$\int\limits_0^u \frac{\sqrt{1-k^2u^2}}{\sqrt{1-u^2}}\, du = \int\limits_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\cdot d\varphi = E(k, \varphi) \qquad (k^2<1)$$

ergibt.

Da der Modul k nur im Quadrat vorkommt, so kann k selbst immer positiv angenommen werden. Der konstante Wert der oberen Grenze φ ist die Amplitude des Integrals und liegt immer im ersten Quadranten $\left(\varphi \leqq \frac{\pi}{2}\right)$, indem sie für weitere Ausdehnungen darauf zurückführbar ist. Das Radikal ist immer absolut zu nehmen und wird zur Abkürzung durch

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \Delta$$

bezeichnet. Beide Integrale sind also von zwei Parametern, dem Modul k und der Amplitude φ abhängig, während bekanntlich eine dritte Gattung noch einen dritten Parameter enthält. Die zweite Gattung drückt wirklich die Länge eines elliptischen Bogens aus.

Indem wir nun die vorhin abgebrochenen Rechnungen wieder aufnehmen, haben wir zum Modul k den aus den Relationen (1′) entspringenden Wert von $\frac{m}{l}$ zu wählen, wobei wir m und l selbst, gleichwie k, positiv voraussetzen, da alle diese Größen in den Radikalen nur im Quadrat vorkommen. Es ist mithin

$$0 < \frac{m}{l} = k = \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{\sqrt{\beta^2-\gamma^2}}{\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}} < 1 \qquad (\alpha > \beta > \gamma).$$

Nun könnten wir vermittelst der neuen Substitution $u = \sin\varphi$ aus dem Integral (3) das Resultat in der trigonometrischen kanonischen Form ableiten. Statt dessen ziehen wir es vor, vielmehr das Integral der Formel (2):

$$(2') \qquad \int \frac{v^2-1}{\sqrt{(v^2-l^2)(v^2-m^2)}}\, dv,$$

unseren Rechnungen zu Grunde zu legen, indem wir, die beiden letzten Substitutionen in eine einzige zusammenfassend, daselbst gleich

$$(2'') \qquad v = \frac{l}{\sin\varphi}, \qquad dv = -\,l\,\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

einführen.

Betreffs des geschlossenen Gliedes in der (2) ist übrigens zu bemerken, dafs man auch in ihm noch nicht sofort zu den Grenzen 1 und ∞ von v übergehen könnte, weil man dann für $v = \infty$ die unangenehme Form $\frac{\infty}{\infty}$ erhalten würde: man müfste zur Vermeidung dieses Übelstandes zuvor noch etwas von dem Gliede ablösen.

Durch die Substitution (2″) geht nach einigen einfachen Rechnungen, die im einzelnen

$$v^2 - 1 = \frac{l^2 - \sin^2\varphi}{\sin^2\varphi},$$

$$v^2 - l^2 = \frac{l^2\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}, \qquad v^2 - m^2 = \frac{l^2}{\sin^2\varphi}(1 - k^2\sin^2\varphi)$$

ergeben, die (2) über in

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \int v\,\frac{dV}{dv}\,dv &= \frac{l^2 - \sin^2\varphi}{l\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} \\ &+ \frac{1}{l}\int\frac{l^2 - \sin^2\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}\cdot\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}, \end{aligned} \right.$$

wo die Radikale wieder absolut zu nehmen sind, weil die herausgetretenen Faktoren $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ in der ganzen Ausdehnung, die immer nur einen (beliebigen) Teil des ersten Quadranten ausfüllt (siehe unten, S. 273), durchaus positiv sind.

Aber auch hier hat das neue Integral noch immer nicht die kanonische Form, ja, es ist noch nicht einmal ein reines elliptisches Integral, weil das Radikal im Nenner noch mit $\sin^2\varphi$ multipliciert ist, so dafs es vor allen Dingen darauf ankommt, diesen Faktor zu beseitigen.

Stände das Radikal Δ im Zähler, so könnte man sich von dem Faktor $\frac{1}{\sin^2\varphi}$ durch teilweise Integration befreien, da ja

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} = -\frac{d\,\mathrm{cotg}\,\varphi}{d\varphi}$$

ist: es käme dann in dem neuen Integral die Wurzel allein in den Nenner, und in seinen Zähler nur wieder eine ähnliche Verbindung. Verführe man aber so mit dem vorliegenden Integral, wo das Radikal schon im Nenner steht, so würde man dadurch hier $\varDelta$ in der dritten Potenz erhalten und sich also von dem erstrebten Ziele nur noch weiter entfernen. Es mufs daher unser Bestreben sein, $\varDelta$ in den Zähler hineinzubringen, und das erreicht man, wenn man im stande ist, es zum Faktor auch nur eines Teiles des Zählers zu machen. Und in der That, setzt man identisch

$$l^2 - \sin^2\varphi = l^2(1 - k^2\sin^2\varphi) + (k^2l^2 - 1)\sin^2\varphi,$$

so kommt

$$\frac{1}{l}\int\frac{l^2 - \sin^2\varphi}{\varDelta}\cdot\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} = l\int\varDelta\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} + \left(k^2l - \frac{1}{l}\right)\int\frac{d\varphi}{\varDelta},$$

woselbst das letztere Glied schon rein elliptisch ist, während auf das erstere sich nun die teilweise Integration anwenden läfst. Sie gibt:

$$\int\varDelta\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} = -\int\frac{d\operatorname{cotg}\varphi}{d\varphi}\cdot\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\cdot d\varphi$$

$$= -\varDelta\operatorname{cotg}\varphi + \int\frac{\operatorname{cotg}\varphi\,(-k^2\sin\varphi\cos\varphi)}{\varDelta}\,d\varphi,$$

also:

$$l\int\varDelta\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} = -l\varDelta\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} + lk^2\int\frac{\sin^2\varphi - 1}{\varDelta}\cdot d\varphi.$$

Vermöge dieser Resultate heifst jetzt die (4):

$$\int v\frac{dV}{dv}dv = \frac{l^2 - \sin^2\varphi}{l\sin\varphi\cos\varphi}\cdot\frac{1}{\varDelta} - \frac{l\cos\varphi}{\sin\varphi}\varDelta$$

$$+ \int\frac{lk^2\sin^2\varphi - \frac{1}{l}}{\varDelta}\cdot d\varphi.$$

Hier ist das neue Integral von dem Charakter

$$\int\frac{a + b\sin^2\varphi}{\varDelta}d\varphi,$$

woraus sich immer Integrale der ersten und zweiten Gattung gleichzeitig bilden lassen. Denn stellt man die Relation auf:

$$\frac{a + b\sin^2\varphi}{\varDelta} = a'\varDelta + \frac{b'}{\varDelta},$$

so wird derselben durch die Werte genügt:

$$a' = -\frac{b}{k^2}, \quad b' = a + \frac{b}{k^2}.$$

In unserem Falle ist also:

$$\int \frac{-\frac{1}{l} + l k^2 \sin^2 \varphi}{\varDelta} d\varphi = -l \int \varDelta\, d\varphi + \left(l - \frac{1}{l}\right) \int \frac{d\varphi}{\varDelta},$$

und somit:

$$(4_0) \quad \left\{ \begin{aligned} \int v \frac{dV}{dv} dv &= \frac{l^2 - \sin^2 \varphi}{l \sin \varphi \cos \varphi} \cdot \frac{1}{\varDelta} - \frac{l \cos \varphi}{\sin \varphi} \varDelta \\ &\quad + \left(l - \frac{1}{l}\right) \int \frac{d\varphi}{\varDelta} - l \int \varDelta\, d\varphi. \end{aligned} \right.$$

Jetzt gehen wir zu den Grenzen über.

Dieselben waren für v 1 und ∞. Die zugehörigen Grenzen von φ liefert die Relation $v = \frac{l}{\sin \varphi}$. Für $v = 1$ ergibt sie $\sin \varphi = l$, welcher Bedingung, weil l ein positiver echter Bruch ist, immer durch im ersten Quadranten gelegene Werte von φ genügt werden kann; für $v = \infty$ ergibt sie $\sin \varphi = 0$. Demnach hat man:

$$v = 1: \qquad 0 < \varphi = \arcsin l < \frac{\pi}{2},$$

$$v = \infty: \qquad \sin \varphi = 0, \qquad \varphi = 0.$$

Was zuvörderst die beiden geschlossenen Glieder anbetrifft, so stellt sich auch hier der Übelstand ein, wie wir ihn ähnlich schon bei dem geschlossenen Gliede der (2) konstatiert haben, dafs sie nämlich an der einen Grenze ($\varphi = 0$) wegen des im Nenner befindlichen $\sin \varphi$ in der unbestimmten Form $\infty - \infty$ erscheinen. Durch Zusammenziehen der beiden Glieder wird aber diese Unbestimmtheit beseitigt, indem sich alsdann aus dem Zähler und Nenner des Bruches der Faktor $\sin \varphi$ fortbebt und nach einigen einfachen Reduktionen an die Stelle der Differenz (der beiden Glieder) der Ausdruck tritt

$$\frac{\sin \varphi}{l \cos \varphi \cdot \varDelta} (l^2 - 1 + l^2 k^2 \cos^2 \varphi),$$

der für $\sin \varphi = 0$ verschwindet und für $\sin \varphi = l$, also

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - l^2},$$

schliefslich den Wert annimmt:

$$-\sqrt{1 - l^2} \cdot \sqrt{1 - l^2 k^2}.$$

Danach gewinnt man aus der (4_0), unter Berücksichtigung der Schlufsformel (4) des vorigen Paragraphen, und wenn man noch (mit Umkehrung der Zeichen) die Grenzen φ und 0 der Integrale vertauscht, für den Inhalt der ganzen Oberfläche des Ellipsoids den Ausdruck:

$$2\pi\alpha\beta\left(\sqrt{(1-l^2)(1-l^2k^2)}+\left(\frac{1}{l}-l\right)\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\Delta}+l\int_0^\varphi\Delta\,d\varphi\right)$$

$$=2\pi\alpha\beta\left(\sqrt{(1-l^2)(1-l^2k^2)}+\left(\frac{1}{l}-l\right)\cdot F(k,\varphi)+l\cdot E(k,\varphi)\right).$$

Hier sind aber noch die schon früher angegebenen Werte von l und k aus den drei Achsen einzusetzen:

$$(4') \qquad l=\frac{\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}{\alpha}, \qquad k=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\sqrt{\beta^2-\gamma^2}}{\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}},$$

also:

$$\frac{1}{l}-l=\frac{\gamma^2}{\alpha\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}, \qquad 1-l^2=\frac{\gamma^2}{\alpha^2}, \qquad 1-l^2k^2=\frac{\gamma^2}{\beta^2},$$

wodurch sich der letzte Ausdruck verwandelt in

$$2\pi\alpha\beta\left(\frac{\gamma^2}{\alpha\beta}+\frac{\gamma^2}{\alpha\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}F(k,\varphi)+\frac{\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}{\alpha}E(k,\varphi)\right)$$

$$(\mathrm{I}) \qquad =2\pi\left(\gamma^2+\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}\left((\alpha^2-\gamma^2)E(k,\varphi)+\gamma^2F(k,\varphi)\right)\right).$$

Aber auch diese Formel läſst sich noch etwas gefälliger schreiben, wenn man auch in die Koeffizienten der beiden elliptischen Integrale die Transcendente φ einführt, nämlich

$$(4'') \qquad \sqrt{\alpha^2-\gamma^2}=\alpha l=\alpha\sin\varphi, \qquad \gamma=\alpha\sqrt{1-l^2}=\alpha\cos\varphi$$

setzt. Die Formel wird dann:

$$(\mathrm{I}_0) \qquad 2\pi\left(\gamma^2+\frac{\alpha\beta}{\sin\varphi}\left(\sin^2\varphi\cdot E(\varphi)+\cos^2\varphi\cdot F(\varphi)\right)\right),$$

indem unter den Charakteristiken der Modul als konstanter Parameter fortgelassen werden darf.

Jeder der beiden Ausdrücke (I) und (I_0) gibt also endgültig die Oberfläche des ganzen Ellipsoids an, für dessen Achsen die Gröſsenordnung

$$(\mathrm{I}') \qquad \alpha>\beta>\gamma$$

gilt, während unter der Amplitude φ der spitze Winkel, für den

$$(\mathrm{I}'') \qquad \sin\varphi=l=\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{\alpha^2}},$$

und unter dem Modul k der positive echte Bruch

$$(\mathrm{I}''') \qquad k = \frac{\alpha}{\beta}\sqrt{\frac{\beta^2 - \gamma^2}{\alpha^2 - \gamma^2}}$$

zu verstehen sind.

Somit ist unser Problem gelöst.

117. Die speciellen Fälle der Umdrehungsellipsoide und der Kugel. — Als Verifikationsmittel für das vorstehend gefundene allgemeine Resultat ist es anzusehen, wenn man von ihm zu den speciellen Fällen des Rotationsellipsoids oder gar der Kugel übergeht, in welchen beiden Fällen sich der Inhalt der Oberfläche auch auf ganz elementarem Wege finden läfst. Wenigstens gilt das von der Kugel, aber auch für die Umdrehungsellipsoide existieren bekanntlich einfachere Methoden der Flächenberechnung.

In beiden Fällen nämlich verschwinden, wie es ja notwendig geschehen mufs, aus dem erhaltenen Resultat die elliptischen Integrale, was indes nur für das Rotationsellipsoid gezeigt zu werden braucht, da die Kugel wiederum einen speciellen Fall von diesen Ellipsoiden ausmacht.

Aber auch da haben wir noch zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $\alpha = \beta$ oder $\beta = \gamma$ ist, mit anderen Worten, je nachdem die kleinere (2γ) oder die gröfsere (2α) der beiden Achsen die Umdrehungsachse des Körpers darstellt.

I. Die Rotationsellipsoide.

Für $\alpha = \beta$ wird

$$k = 1, \quad \Delta = \cos\varphi,$$

also

$$E(k, \varphi) = E(1, \varphi) = \int_0^\varphi \cos\varphi\, d\varphi = \sin\varphi,$$

$$F(k, \varphi) = F(1, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \log\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$$

$$= \log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right).$$

Für $\beta = \gamma$ wird

$$k = 0, \qquad \Delta = 1,$$

also

$$F(k, \varphi) \text{ und } E(k, \varphi) = F(0, \varphi) = E(0, \varphi) = \int_0^\varphi d\varphi = \varphi.$$

Mithin hat man für die Gesamtoberfläche des Rotationsellipsoids, dessen Umdrehungsachse γ kleiner als der Radius α des Äquators ist, also für das abgeplattete Ellipsoid (Sphäroid) den Ausdruck:

$$\text{(I)}\quad 2\pi\left(\gamma^2 + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}\left((\alpha^2-\gamma^2)\sin\varphi + \gamma^2 \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)\right)\right),$$

und für dasjenige, dessen Umdrehungsachse α gröfser als der Radius γ des Äquators ist, also für die Oberfläche des länglichen Ellipsoids, den Ausdruck:

$$\begin{aligned} & 2\pi\left(\gamma^2 + \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}\left((\alpha^2-\gamma^2)\cdot\varphi + \gamma^2\cdot\varphi\right)\right) \\ \text{(II)}\quad & = 2\pi\gamma\left(\gamma + \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}\varphi\right) \end{aligned}$$

oder, wenn man die Formel (I_0) des vorigen Paragraphen anwendet:

$$\text{(II}_0\text{)}\quad 2\pi\gamma\left(\gamma + \frac{\alpha}{\sin\varphi}\cdot\varphi\right).$$

II. Die Kugel.

Der Übergang vom Rotationsellipsoid zur Kugel kann von jedem der drei eben gewonnenen Resultate aus erfolgen, indem man

$$\gamma = \alpha$$

setzt, und mufs selbstverständlich jedesmal

$$4\pi\alpha^2$$

als Inhalt der Kugelfläche ergeben.

Diese Reduktionen erfordern zum Teil etwas umständliche Zwischenrechnungen, weil, wie die (I″) des § 116 (S. 274) zeigt, für $\gamma = \alpha$ aufser $\alpha^2 - \gamma^2$ auch $\sin\varphi$, und mithin auch φ selbst zu Null werden, so dafs erst die Werte der Quotienten ermittelt werden müssen, die infolge davon in den obigen drei Ausdrücken unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ erscheinen [74].

Nur bei Anwendung der Formel (II_0), die für $\gamma = \alpha$ in

$$2\pi\alpha\left(\alpha + \alpha\cdot\frac{\varphi}{\sin\varphi}\right)$$

übergeht, wird wegen des bekannten Grenzwertes

$$\lim_{\varphi=0} \frac{\varphi}{\sin\varphi} = 1$$

eine solche Zwischenrechnung überflüssig und unmittelbar das Resultat erhalten:

$$2\pi\alpha(\alpha + \alpha) = 4\pi\alpha^2.$$

118. Die Jacobische Lösung. — Wir gehen jetzt an die Darstellung der Jacobischen sehr hübschen Methode der Komplanation des Ellipsoids. Sie hat den Erfolg, dafs — im Gegensatz zu den allgemeinen Transformationsformeln des § 112 — durch die in Anwendung gebrachte Umformung das ganze Flächenelement rational ausgedrückt wird, und dafs sich ebenfalls eine Integration bewerkstelligen läfst, die, je nachdem man die Sache angreift, gleich auf ein in geeigneter Form erscheinendes elliptisches Integral, oder aber zu einem ebensolchen komplizierten Integral führt, wie es sich uns schon früher, bei der Behandlung des Problems in § 114, I dargeboten hat. Auch findet man durch diese Methode, dafs es Stücke der Oberfläche des Ellipsoids gibt, die sich einfacher, in gewöhnlichen Funktionen, ausdrücken lassen, also einfacher sind als die Oberfläche des ganzen Ellipsoids [75]).

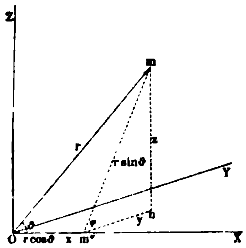
Der Grundgedanke der Methode ist folgender:

Wie überhaupt eine jede Gerade, so bildet auch die Normale zur Oberfläche des Ellipsoids drei Winkel mit den rektangulären Achsen von solcher Abhängigkeit zueinander, dafs die Summe der Quadrate ihrer cosinus gleich 1 ist. Diese drei Winkel werden hier durch zwei Winkel ausgedrückt, die dieselbe Rolle spielen, wie in unserer allgemeinen Theorie (111 f.) die Gröfsen λ und μ, und durch welche also gleichfalls die Richtung der Normale angegeben wird, wobei — wie es auch in der Mechanik immer geschieht — zweckmäfsig ihre beiden Richtungen voneinander zu unterscheiden sind. Die beiden Hülfswinkel sind nun nichts anderes als die Winkel θ und φ, welche in dem System der räumlichen Polarkoordinaten zwei der drei Koordinaten darstellen, und wir gelangen zu ihnen vermittelst der Formeln, die zur Transformation der rechtwinkligen in Polarkoordinaten dienen, und die wir daher zunächst abzuleiten haben.

Die drei räumlichen Polarkoordinaten irgend eines Punktes m (Fig. 29 a. f. S.) sind: der stets absolut zu nehmende Radiusvektor $Om = r$, der von 0 bis π zu zählende Linienwinkel

$m\,O\,X = \theta$, den der Radiusvektor mit einer der drei senkrechten Achsen, hier mit der $O\,X$ macht, und der Flächenwinkel φ zwischen der Ebene der x, y und der Ebene $m\,O\,X$, der in einer vorweg festgesetzten Richtung von 0 bis 2π herumgezählt wird, so dafs sich also die Ebene $m\,O\,X$ nicht über die Achse $O\,X$ hinaus erstreckt und daher eigentlich immer nur eine halbe Ebene umfafst. Zum Mafs hat dieser Flächenwinkel φ natürlich den Linienwinkel $m m'' n$, den die von m auf $O\,X$ gefällte Senkrechte $m m''$ mit ihrer Projektion $m'' n$ in der Ebene der x, y bildet. — Die drei rektangulären Koordinaten des Punktes m sind aber offenbar: das von m auf die Ebene $X\,O\,Y$ herabgelassene Lot $m\,n\,(\parallel O\,Z) = z$, $m'' n\,(\parallel O\,Y) = y$, $O m'' = x$. Aus den beiden rechtwinkligen Dreiecken $m\,O m''$, $m m'' n$, die alle sechs Koordinaten als Stücke enthalten, ergeben sich nun unmittelbar die verlangten Transformationsformeln:

Fig. 29.



(1) $\quad x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad z = r\sin\theta\sin\varphi.$

Da aber die Quotienten $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$ die direkten Ausdrücke für die cosinus der drei Winkel sind, welche die Richtung $O m$ mit den drei positiven Achsen macht, so erhält man durch Division mit r aus den Gleichungen (1) für diese drei cosinus die Werte:

(1_0) $\quad \cos\theta, \qquad \sin\theta\cos\varphi, \qquad \sin\theta\sin\varphi,$

also einfache trigonometrische Verbindungen der beiden Winkel θ und φ, von denen θ schon von vornherein einen der drei Achsenwinkel selbst darstellt, die Bedeutung von φ aber oben genau angegeben ist.

Jetzt gehen wir auf unsere Gleichung des Ellipsoids zurück:

(2) $$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

oder auch

(2') $$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} - 1 = 0.$$

Es handelt sich um die Tangentialebene in einem beliebigen Punkte (x, y, z) seiner Oberfläche.

Ist aber

$$W$$

irgend eine Funktion von x, y, z und wird durch den aus der Gleichung

$$W = 0$$

gezogenen Ausdruck für z die (senkrechte) Koordinate einer gewissen krummen Fläche dargestellt, so lehren die ersten Anwendungen der Infinitesimalrechnung auf die höhere Geometrie, dafs dann die Gleichung der Tangentialebene in dem Punkte (x, y, z) dieser Fläche

$$(3_0) \qquad \frac{\partial W}{\partial x}(t - x) + \frac{\partial W}{\partial y}(u - y) + \frac{\partial W}{\partial z}(v - z) = 0$$

ist, wo t, u, v die veränderlichen orthogonalen Koordinaten der Tangentialebene bezeichnen.

Danach ergibt sich als Gleichung der in Rede stehenden Tangentialebene des Ellipsoids aus der (2′) unmittelbar:

$$\frac{x}{\alpha^2}(t - x) + \frac{y}{\beta^2}(u - y) + \frac{z}{\gamma^2}(v - z) = 0,$$

oder vielmehr, wegen der (2):

$$(3) \qquad \frac{x}{\alpha^2}t + \frac{y}{\beta^2}u + \frac{z}{\gamma^2}v = 1,$$

was auch ohne Hülfe der Differentialrechnung rein algebraisch abgeleitet werden könnte.

Nun seien

$$\lambda, \mu, \nu$$

die drei Winkel, welche die Normale zur Oberfläche des Ellipsoids im Punkte (x, y, z), d. i. die Normale zur Tangentialebene in diesem Punkte, in einer bestimmten Richtung, über die wir uns weiter unten entscheiden werden, mit den positiven Achsenrichtungen bildet.

Wiederum aber lehrt die analytische Geometrie des Raumes, dafs, wenn man die Gleichung einer Ebene hat:

$$lt + mu + nv = p,$$

die cosinus der drei Winkel, welche ein vom Anfangspunkt der Koordinaten auf dieselbe herabgelassenes Perpendikel — oder jede damit parallele Linie — in dieser Richtung hin mit den drei positiven Achsen der t, u, v macht, beziehungsweise sind:

$$\pm\frac{l}{\left|\sqrt{l^2+m^2+n^2}\right|},\quad \pm\frac{m}{\left|\sqrt{l^2+m^2+n^2}\right|},\quad \pm\frac{n}{\left|\sqrt{l^2+m^2+n^2}\right|}$$
$$(p \gtreqless 0),$$

wohingegen gerade die umgekehrten Beziehungen zwischen p und den Vorzeichen stattfänden, falls man die Wurzel negativ nähme.

Auf unser Ellipsoid angewendet, gibt das die cosinus der drei Winkel, welche seine nach aufsen gerichtete Normale mit den drei Achsen macht (denn der Anfangspunkt der Koordinaten ist ja der Mittelpunkt des Ellipsoids), und es gilt das obere Zeichen, weil, nach der (3), p positiv, nämlich $=1$ ist. Aus derselben Gleichung (3) findet sich

$$l=\frac{x}{\alpha^2},\quad m=\frac{y}{\beta^2},\quad n=\frac{z}{\gamma^2},$$

mithin als Wert der absolut zu nehmenden Quadratwurzel, die zur Abkürzung durch q bezeichnet werde,

$$q=\left|\sqrt{\frac{x^2}{\alpha^4}+\frac{y^2}{\beta^4}+\frac{z^2}{\gamma^4}}\right|.$$

Demnach ist

$$\cos\lambda=\frac{x}{\alpha^2 q},\quad \cos\mu=\frac{y}{\beta^2 q},\quad \cos\nu=\frac{z}{\gamma^2 q},$$

oder, wenn man diese cosinus durch die Ausdrücke (1_0) ersetzt:

$$(4)\qquad \cos\theta=\frac{x}{\alpha^2 q},\quad \sin\theta\cos\varphi=\frac{y}{\beta^2 q},\quad \sin\theta\sin\varphi=\frac{z}{\gamma^2 q}.$$

Für die nach innen gerichtete Normale gelten natürlich dieselben Werte, aber mit entgegengesetzten Zeichen behaftet.

Diese Gleichungen sind nun noch, gemäfs der allgemeinen Theorie des § 111, nach x, y, z aufzulösen, und da ist nicht zu übersehen, dafs q selbst noch eine Verbindung dieser drei Gröfsen ist. Der durch θ und φ ausgedrückte Wert von q läfst sich aber gleich den vorstehenden Relationen selbst entnehmen. Denn zunächst geben sie

$$q\alpha\cos\theta=\frac{x}{\alpha},\quad q\beta\sin\theta\cos\varphi=\frac{y}{\beta},\quad q\gamma\sin\theta\sin\varphi=\frac{z}{\gamma},$$

und wenn man nun quadriert und addiert und der Abkürzung halber noch

$$(4')\qquad \left|\sqrt{\alpha^2\cos^2\theta+\beta^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+\gamma^2\sin^2\theta\sin^2\varphi}\right|=\Delta$$

gesetzt wird, so erhält man unter Berücksichtigung der (2) auf der Stelle

$$(4'') \qquad q = \frac{1}{\Delta},$$

und vermöge dieses Wertes aus den (4) die Relationen

$$(5) \quad x = \frac{\alpha^2 \cos\theta}{\Delta}, \quad y = \frac{\beta^2 \sin\theta\cos\varphi}{\Delta}, \quad z = \frac{\gamma^2 \sin\theta\sin\varphi}{\Delta},$$

um deren Ermittelung es sich handelte, und in denen θ und φ die Stelle der in den Gleichungen (1) des § 111 durch λ und μ bezeichneten Gröfsen vertreten.

Übrigens könnte man die drei Formeln (5) gleich von vornherein als Substitutionsgleichungen für das Ellipsoid aufstellen. Denn wenn man die eben vorgenommenen Rechnungen in umgeänderter Ordnung vollzieht, so findet sich:

$$(5') \quad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = \frac{\alpha^2\cos^2\theta + \beta^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + \gamma^2\sin^2\theta\sin^2\varphi}{\Delta^2},$$

was rechts identisch $= 1$ ist und eben die Gleichung des Ellipsoids darstellt. Aber es ist bei geometrischen Problemen, die man der höheren Analysis unterwerfen mufs, also nur analytisch lösen kann, gerade das Wesentliche, sich von der geometrischen Bedeutung der Operationen Rechenschaft zu geben, ganz abgesehen davon, dafs es in der Regel gerade die geometrischen Betrachtungen sind, durch welche die erheblichsten Simplifikationen erzielt werden.

Man hat jetzt nur noch die sechs Differentialquotienten $\frac{\partial x}{\partial\theta}, \frac{\partial x}{\partial\varphi}; \frac{\partial y}{\partial\theta}, \ldots$ zu bilden, um sie alsdann in eine der Schlufsformeln des § 112 einzusetzen. Diese Rechnungen sind etwas unangenehm und liefsen sich durch andere Betrachtungen vermeiden, die aber hier auch zu weit führen würden.

Die Differentialquotienten können in einer solchen Form entwickelt werden, dafs ihre Zähler rational und ihre Nenner sämtlich Δ^3 werden. Dazu mufs man einen jeden derselben einzeln auf einen Nenner bringen.

Zunächst hat man:

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\theta} = \frac{\sin\theta\cos\theta}{\Delta}(-\alpha^2 + \beta^2\cos^2\varphi + \gamma^2\sin^2\varphi),$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi} = \frac{(-\beta^2 + \gamma^2)\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}.$$

Alsdann kommt, nach Ausführung der verschiedenen Reduktionen [76]):

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -\frac{\alpha^2 \sin\theta}{\Delta} - \frac{\alpha^2 \cos\theta}{\Delta^2} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \theta}$$
$$= -\frac{\alpha^2 \sin\theta}{\Delta^3} (\beta^2 \cos^2\varphi + \gamma^2 \sin^2\varphi),$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\beta^2 \cos\theta \cos\varphi}{\Delta} - \frac{\beta^2 \sin\theta \cos\varphi}{\Delta^2} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \theta}$$
$$= \frac{\alpha^2 \beta^2 \cos\theta \cos\varphi}{\Delta^3},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\gamma^2 \cos\theta \sin\varphi}{\Delta} - \frac{\gamma^2 \sin\theta \sin\varphi}{\Delta^2} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \theta}$$
$$= \frac{\alpha^2 \gamma^2 \cos\theta \sin\varphi}{\Delta^3};$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\frac{\alpha^2 \cos\theta}{\Delta^2} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi}$$
$$= -\frac{\alpha^2(-\beta^2 + \gamma^2)}{\Delta^3} \sin^2\theta \cos\theta \sin\varphi \cos\varphi,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\beta^2 \sin\theta \sin\varphi}{\Delta} - \frac{\beta^2 \sin\theta \cos\varphi}{\Delta^2} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi}$$
$$= -\frac{\beta^2 \sin\theta \sin\varphi}{\Delta^3} (\alpha^2 \cos^2\theta + \gamma^2 \sin^2\theta),$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\gamma^2 \sin\theta \cos\varphi}{\Delta} - \frac{\gamma^2 \sin\theta \sin\varphi}{\Delta^2} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi}$$
$$= \frac{\gamma^2 \sin\theta \cos\varphi}{\Delta^3} (\alpha^2 \cos^2\theta + \beta^2 \sin^2\theta).$$

Nun haben wir für diese Werte den Ausdruck (2_0) des § 112, d. h., wenn wir zur Abkürzung

$$\frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \theta} = A,$$
$$\frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial z}{\partial \varphi} - \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial z}{\partial \theta} = B,$$
$$\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial \varphi} - \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \theta} = C$$

setzen, den Ausdruck

(6) $$d\theta\, d\varphi \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

zu berechnen und zu diesem Behufe von den sechs, wie folgt, angeordneten Differentialquotienten:

$$\frac{\partial x}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial z}{\partial \theta},$$
$$\frac{\partial x}{\partial \varphi}, \qquad \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \qquad \frac{\partial z}{\partial \varphi},$$

alle verschiedenen Kreuzprodukte und die ihnen zugehörigen Determinanten zu bilden, wobei es, wie in den gleichartigen Rechnungen in § 114, I. (S. 258), gleichgültig ist, welche Produkte man zu Minuenden und welche zu Subtrahenden wählt, da von den Differenzen doch die Quadrate zu nehmen sind.

Man erhält:

$$A = \frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{\Delta^4}\sin^2\theta\sin\varphi, \qquad A^2 = \frac{\alpha^4\beta^4\gamma^4}{\Delta^8}\sin^4\theta\sin^2\varphi,$$
$$B = \frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{\Delta^4}\sin\theta\cos\theta, \qquad B^2 = \frac{\alpha^4\beta^4\gamma^4}{\Delta^8}\sin^2\theta\cos^2\theta,$$
$$C = \frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{\Delta^4}\sin^2\theta\cos\varphi, \qquad C^2 = \frac{\alpha^4\beta^4\gamma^4}{\Delta^8}\sin^4\theta\cos^2\varphi.$$

Die einfache Gestalt dieser Resultate ist wesentlich dem Umstande zu verdanken, dafs der in allen drei als Faktor enthaltene, der Einheit gleiche Ausdruck auf der rechten Seite der (5′) in Fortfall kommt.

Demnach wird das Radikal

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$
$$= \frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{\Delta^4}\cdot\sqrt{\sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta + \sin^2\theta\cos^2\varphi}\cdot\sin\theta,$$

wo die Wurzel absolut zu nehmen ist, weil der ganze Ausdruck bekanntlich immer positiv sein mufs und auch der herausgetretene Faktor $\sin\theta$, dessen arcus von 0 bis π geht, nirgend negativ wird. Und da zudem noch die Wurzel augenfällig $= 1$ ist, so gewinnt man für die (6), das Element unseres Doppelintegrals, den Ausdruck:

$$(6_0) \qquad d\theta\, d\varphi \sin\theta\cdot\frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{\Delta^4},$$

der in der That, wie schon prädiciert wurde, rational und unendlich einfach ist, und das ist es eben, was diese Behandlungsweise des Problems so sehr interessant macht.

Um das ganze Ellipsoid zu umfassen, ist die Integration nach θ von 0 bis π, diejenige nach φ von 0 bis 2π zu erstrecken.

Es leuchtet ein, dafs dann jeder Punkt der Oberfläche ein- und nur einmal in die Integration einbezogen wird.

Somit ist der Jacobische Ausdruck für die Oberfläche eines Ellipsoids das Doppelintegral

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi}{(\alpha^2\cos^2\theta+\beta^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+\gamma^2\sin^2\theta\sin^2\varphi)^2}. \tag{7}$$

Als rational ist in ihm die Integralfunktion *ad libitum*, d. h. ebensogut nach θ wie nach φ integrabel. Aber die Integration nach θ taugt nichts und würde zu einem ähnlich komplizierten Resultate führen, wie es bei der Ivoryschen Substitution in § 114, I. (S. 260 f.) der Fall war. Wie leicht zu sehen. Denn wenn man im Nenner $\sin^2\theta$ fortschafft, so nimmt das betreffende Integral die Form an:

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\,d\theta}{(l+m\cos^2\theta)^2},$$

wo l und m konstant nach θ sind, und verwandelt sich vermittelst der auch a. a. O. angewandten Substitution $\cos\theta = x$ in das Integral

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(l+mx^2)^2},$$

das noch ganz leicht unbestimmt zu integrieren ist und, zwischen seinen Grenzen genommen, aus einem algebraischen Gliede und einer von arc tg abhängigen Funktion besteht. Aber das darauf nach φ zu bildende und von 0 bis 2π zu erstreckende Integral dieses Ausdruckes wäre es, welches eine gleich schwierige und verwickelte Zusammensetzung besäfse wie das Integral nach μ, von dem auf S. 261 die Rede war.

Wenn man hingegen umgekehrt zuerst die Integration nach φ vollführt, die auch keine Schwierigkeit hat, so findet man nach derselben ein elliptisches Integral, das zwar noch nicht von kanonischer Form ist, aber leicht dahin gebracht werden kann. Man bringt zunächst wieder im Nenner der (7) $\cos\varphi$ oder $\sin\varphi$ fort, wodurch man z. B. im letzteren Falle ein Integral von der Form

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{(l+m\cos^2\varphi)^2} = 2\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{(l+m\cos^2\varphi)^2}$$

bekommt, in dem l und m konstant nach φ sind. Und setzt man nun wieder wie vorhin

$$\cos\varphi = x, \qquad d\varphi = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

so erhält man:

$$2\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{|\sqrt{1-x^2}|\cdot(l+mx^2)^2}.$$

Weiter führen wir dies nicht aus, aber wer sich in der Integralrechnung üben will, wird gut thun, dieses sowie andere ähnliche Beispiele selbst ganz durchzurechnen. Man müſste natürlich wieder genau zu dem Resultat des § 116 gelangen.

119. Die Krümmung ebener Kurven und das Gauſssche Analogon für die Krümmung der Flächen. — Man kann zu dem so einfachen Jacobischen Ausdruck (6_0) oder (7) des vorigen Paragraphen auch durch die einfachste Überlegung gelangen, wenn man sich auf einige oder eigentlich nur auf einen einzigen allgemeinen Satz aus der von Gauſs eingeführten äuſserst wichtigen Theorie des Krümmungsmaſses der Flächen stützt, die mit der gröſsten Wahrscheinlichkeit noch die Quelle vieler Entdeckungen sein wird. Wir wollen daher auch auf diesem Wege die Jacobische Formel ableiten, da die vorstehend befolgte Methode doch etwas unelegant ist, indem man sich, an die allgemeine Transformationsformel anknüpfend, durch dick und dünn hindurchschlagen muſs. Doch werden wir, als zu weit von unserem Ziele abliegend, die Hülfssätze, deren wir aus der vorerwähnten Theorie zur Herleitung des Gauſsschen Ausdrucks benötigt sind, nicht näher begründen.

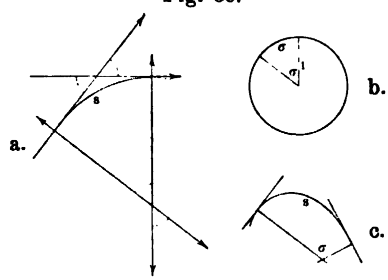
Wir holen etwas weiter aus und sprechen zunächst von dem allgemein bekannten, von Euler und Monge behandelten Analogon in der Ebene.

Denken wir uns eine ebene Kurve, so versteht man unter Krümmung eines Bogens oder arcus derselben die Gröſse der Ablenkung im Endpunkte dieses Bogens von der Richtung, die die Kurve im Anfangspunkte des Bogens hat, mit anderen Worten, die Gröſse des Winkels, den die nach derselben Seite hin gerichteten Tangenten der Kurve in diesen beiden Punkten unter sich bilden, oder auch die Gröſse des jenem gleichen

Winkels der beiden zugehörigen, ebenfalls nach ein und derselben Seite gerichteten Normalen (Fig. 30 a).

Nun pflegt man aber bekanntlich Winkel auch durch Bogen eines Kreises vom Radius 1 darzustellen. Zeichnet man also einen Hülfskreis mit dem Radius 1 (Fig. 30 b) und zieht seine zwei den beiden Normalen der ersten Figur parallelen und gleichgerichteten Radien, so schliefsen diese einen Winkel ein oder schneiden einen Kreisbogen ab, „σ", der das Mafs ist für die Ablenkung der Richtung des arcus. Die Krümmung des ganzen Bogens wird aber nun der Quotient dieses Winkels σ durch die Länge „s" unseres arcus, also der Quotient

Fig. 30.



$$\frac{\sigma}{s}$$

sein. Und in der That, je gröfser bei übrigens gleicher Länge des Bogens oder konstantem s die Ablenkung ist, um so mehr ist offenbar (Fig. 30 c) dieser Bogen gekrümmt.

Dementsprechend ist unter specifischer Krümmung der gegebenen Kurve an einer bestimmten Stelle die Grenze $\lim \frac{\sigma}{s}$ zu verstehen, gegen welche jenes Verhältnis konvergiert, wenn man den Bogen s bis ins Unendliche abnehmen läfst, in der Weise, dafs er immer die Stelle in sich enthält, deren Krümmung man haben will. Man erhält also diese Krümmung, wenn man ein an der fraglichen Stelle gelegenes unendlich kleines Stück der Kurve dividiert in den Winkel, den die nach einer Seite gerichteten Normalen seiner Endpunkte miteinander einschliefsen.

Da ferner

$$\lim \frac{\sigma}{s} = \frac{1}{\lim \frac{s}{\sigma}}$$

ist und bekanntlich

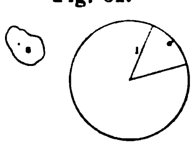
$$\lim \frac{s}{\sigma}$$

den Krümmungsradius der Kurve an der betreffenden Stelle ausdrückt, so ergibt sich noch, dafs die (im allgemeinen sich von Stelle zu Stelle ändernde) Krümmung einer Kurve in einem bestimmten Punkte der reciproke Wert des zugehörigen Krümmungsradius ist.

Dieser Begriff der Krümmung läfst sich nun, wie durch die Analogie so nahe liegt, auf beliebig krumme Flächen ausdehnen. Und es ist merkwürdig, dafs dies erst so spät, von Gaufs, geschehen ist, während man früher, selbst Euler und Monge, immer nur Kurven auf Flächen verzeichnet hatte.

Nimmt man also auf einer krummen Fläche einen Punkt an und begrenzt um diesen Punkt herum ein Element der Fläche, so dafs der Punkt immer — auch wenn man das Element bis ins Unendliche abnehmen läfst — an einer übrigens ganz beliebigen Stelle in ihm liegt (Fig. 31, links), und legt man an den ganzen Kontur des Elementes die Normalen zur Fläche, sämtlich in demselben Sinne (entweder alle nach aufsen, oder alle nach innen): so kann man sich jetzt, wie vorhin einen Kreis, eine Hülfskugel mit dem Radius 1 beschrieben und durch ihren Mittelpunkt lauter allen jenen Normalen parallele und gleichgerichtete Radien gezogen denken. Die Gesamtheit dieser Radien wird eine Kegelöffnung bilden und ein Stück der Kugelfläche herausschneiden, wie es in Fig. 31 (rechts) schematisch angedeutet ist. Wird dasselbe wieder durch σ und obiges Flächenstück durch s bezeichnet — wo aber jetzt σ und s Gröfsen von zwei Dimensionen bedeuten —, so ist nun der Quotient

Fig. 31.



$$\frac{\sigma}{s}$$

wieder das, was Gaufs die totale Krümmung (*curvatura integra*) des ganzen Flächenstückes nennt, und wenn man hier s bis ins Unendliche abnehmen läfst, so ist dieser (im allgemeinen von Punkt zu Punkt wechselnde) Grenzwert

$$\lim \frac{\sigma}{s}$$

das Krümmungsmafs (*mensura curvaturae*) der Fläche in dem angenommenen Punkte.

Wir haben es hier blofs mit diesem Grenzbegriff zu thun. Wir führen für ihn die besondere Bezeichnung k ein, setzen also

$$\lim \frac{\sigma}{s} = k. \tag{1}$$

Legt man durch den angenommenen Punkt alle möglichen Normalschnitte auf das Element, so hat bekanntlich von den unendlich vielen Schnittkurven eine die gröſste Krümmung und eine die kleinste Krümmung, und diese beiden Kurven sind senkrecht zueinander. Es läſst sich zeigen, daſs unser k durch diese beiden Hauptkrümmungen ausdrückbar, nämlich einfach ihr Produkt ist.

Im Unendlichen hat man also aus der (1):

$$s = \frac{1}{k}\sigma, \tag{1_0}$$

obwohl das eigentlich nicht so ohne weiteres als Gleichung aufgestellt werden darf, weil es nur an der Grenze streng richtig ist. Wollte man genau verfahren, so müſste man vielmehr schreiben

$$s = \frac{1}{k}\sigma + \varepsilon,$$

wo aber ε mit abnehmendem s und σ unaufhörlich gegen Null konvergiert und als von der dritten Ordnung unendlich vielmal kleiner als diese Gröſsen und daher zu vernachlässigen ist.

Ist also das Krümmungsmaſs k des Flächenelementes s bekannt, so kann man vermöge der (1_0) immer aus der inversen Krümmung $\frac{1}{k}$ und dem Hülfsfaktor σ, dem Element einer Kugelfläche vom Radius 1, das Element s finden, und so ist das Element jeder Fläche ausdrückbar durch das entsprechende Stückchen Kugelfläche.

Für k gibt es nun verschiedene einfache analytische Ausdrücke, je nachdem man die Gleichung der Fläche in dieser oder jener Gestalt, entweder in der Form

$$F(x, y, z) = 0,$$

oder in der Form

$$z = f(x, y), \tag{2}$$

oder in der allgemeinsten Form [§ 111, (1)]

$$x = \varphi(\lambda, \mu), \qquad y = \psi(\lambda, \mu), \qquad z = \chi(\lambda, \mu)$$

in Anwendung bringt.

Wir begnügen uns hier mit der gewöhnlichsten Gleichung (2). Dieselbe liefert auch die einfachste Formel für k, die man in der

Gaufsschen Abhandlung abgeleitet finden kann, und die jetzt auch schon in mehrere Lehrbücher, z. B. in Cournot[77]), übergegangen ist, woselbst aber ihre Herleitung nicht ganz genügend ist.

In dieser Formel ist k durch die partiellen Derivierten der ersten und zweiten Ordnung von der Ordinate z der Fläche (2) ausgedrückt. Werden dieselben nach Monges Vorgang durch

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q;$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = s, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t$$

bezeichnet (113, 3.), so erhält man:

$$(2_0) \qquad k = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}.$$

Diese Formel ist auch ganz leicht, nur mit ein paar Zeilen, zu beweisen und sehr geeignet, sich an ihrem Beweise selbst zu üben.

Zähler und Nenner des Quotienten (2_0) haben übrigens auch für sich eine uns schon bekannte Bedeutung: der Ausdruck

$$rt - s^2$$

kommt in der Theorie der Maxima und Minima der Funktionen zweier Variablen vor, und

$$\frac{1}{1 + p^2 + q^2}$$

ist, wie wir aus § 113, 3. und 4. und § 115 wissen, das Quadrat des cosinus des Winkels, den die Normale zu dem betreffenden Element der Fläche (2) mit der OZ bildet.

120. Herleitung der Jacobischen Formel vermittelst des Gaufsschen Ausdrucks für das Krümmungsmafs. — Der Jacobische Ausdruck (7) des § 118 für die Oberfläche des Ellipsoids ergibt sich fast unmittelbar aus der vorstehenden Formel (2_0) für das Krümmungsmafs der Flächen.

Bezeichnet man nämlich, wie üblich, die Elemente durch den vorgesetzten Buchstaben d, also das Element unserer Fläche bezw. der Hülfskugel etwa durch

$$d\psi \quad \text{und} \quad d\omega,$$

welche Symbole aber nicht gewöhnliche Differentiale, d. i. einen unendlich kleinen Zuwachs von ψ und ω oder simple Differenzen, sondern vielmehr Produkte von solchen Differentialen anzeigen, so hat man nach der (1) des § 119 für das Krümmungsmaſs der Fläche $z = f(x, y)$

$$k = \frac{d\omega}{d\psi},$$

und mithin für das Flächenelement:

$$d\psi = \frac{1}{k} d\omega,$$

wo aber auch $\frac{d\omega}{d\psi}$ keinen eigentlichen Differentialquotienten ausdrückt, weshalb wir nachher auch, für die wirkliche Berechnung und analytische Ausdrucksweise, zu den wahren Differentialen (den Produkten der Inkremente zweier Veränderlichen) werden übergehen müssen.

Ein endliches Stück der Fläche wird also, wenn man entsprechend nur ein Integralzeichen schreibt, durch die Formel gegeben:

$$\int d\psi = \int \frac{1}{k} \cdot d\omega, \tag{1}$$

wo auf der Hülfskugel die zu $\int d\psi$ gehörige Ausdehnung von $\int d\omega$ durch das S. 287 erläuterte Verfahren zu bestimmen ist.

Handelt es sich nun um die Fläche des Ellipsoids, so ergeben sich aus seiner Gleichung

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

durch direkte Differentiationen für die partiellen Derivierten von z die Werte:

$$p = -\frac{\gamma^2}{\alpha^2} \cdot \frac{x}{z} \qquad q = -\frac{\gamma^2}{\beta^2} \cdot \frac{y}{z};$$

$$r = -\frac{\gamma^4}{\alpha^2 z^3}\left(\frac{z^2}{\gamma^2} + \frac{x^2}{\alpha^2}\right), \qquad t = -\frac{\gamma^4}{\beta^2 z^3}\left(\frac{z^2}{\gamma^2} + \frac{y^2}{\beta^2}\right),$$

$$s = -\frac{\gamma^4}{\alpha\beta\gamma^3} \cdot \frac{x}{\alpha}\frac{y}{\beta},$$

von denen q und t wegen ihrer Symmetrie mit p bezw. r keiner besonderen Berechnung bedürfen. p und q finden sich auch schon § 114, II. (S. 262) abgeleitet.

Danach ist:

$$1 + p^2 + q^2 = \frac{\gamma^4}{z^2}\left(\frac{x^2}{\alpha^4} + \frac{y^2}{\beta^4}\right) + \frac{\gamma^4}{z^2} \cdot \frac{z^2}{\gamma^4}$$
$$= \frac{\gamma^4}{z^2}\left(\frac{x^2}{\alpha^4} + \frac{y^2}{\beta^4} + \frac{z^2}{\gamma^4}\right).$$

Ferner ist:

$$rt = \frac{\gamma^8}{\alpha^2\beta^2 z^6}\left(\frac{z^2}{\gamma^2}\left(\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2}\right) + \frac{x^2}{\alpha^2}\frac{y^2}{\beta^2}\right)$$
$$= \frac{\gamma^8}{\alpha^2\beta^2 z^6}\left(\frac{z^2}{\gamma^2} + \frac{x^2}{\alpha^2}\frac{y^2}{\beta^2}\right),$$

also:

$$rt - s^2 = \frac{\gamma^8}{\alpha^2\beta^2 z^6} \cdot \frac{z^2}{\gamma^2} = \frac{\gamma^6}{\alpha^2\beta^2 z^4}.$$

Vermöge dieser Werte verwandelt sich somit die (2_0) des vorigen Paragraphen in

$$k = \frac{1}{\alpha^2\beta^2\gamma^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x^2}{\alpha^4} + \frac{y^2}{\beta^4} + \frac{z^2}{\gamma^4}\right)^2},$$

also in einen nach x, y, z und α, β, γ völlig symmetrischen Ausdruck, wie es auch in Anbetracht, dafs sich die Krümmung auf dem Ellipsoid ganz symmetrisch nach den drei Richtungen verteilt, der Fall sein mufs.

Für den reciproken Wert von k erhält man mithin, wenn zur Abkürzung noch

$$\frac{x^2}{\alpha^4} + \frac{y^2}{\beta^4} + \frac{z^2}{\gamma^4} = \frac{1}{\Delta^2}$$

gesetzt wird,

$$(1') \qquad \frac{1}{k} = \frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{\Delta^4},$$

wo Δ identisch ist mit dem Δ in der (4') des § 118 (S. 280).

Während nämlich der eben gefundene Wert für das Krümmungsmafs des Ellipsoids ganz allgemein gilt, gebrauchen wir jetzt, wo es darauf ankommt, das Element $d\omega$ der Kugelfläche durch wirkliche Differentiale auszudrücken, zur Darstellung von $\frac{1}{k}\,d\omega$ die Jacobische Substitution (5) des § 118 (S. 281) vermittelst der beiden Hülfswinkel θ und φ, deren Bedeutung S. 277 f. näher erklärt ist. Aus diesen Formeln (5) und (4') fliefst aber:

$$\frac{x}{\alpha^2} = \frac{\cos\theta}{\sqrt{\alpha^2\cos^2\theta + \beta^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + \gamma^2\sin^2\theta\sin^2\varphi}},$$
$$\frac{y}{\beta^2} = \frac{\sin\theta\cos\varphi}{\sqrt{\alpha^2\cos^2\theta + \beta^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + \gamma^2\sin^2\theta\sin^2\varphi}},$$
$$\frac{z}{\gamma^2} = \frac{\sin\theta\sin\varphi}{\sqrt{\alpha^2\cos^2\theta + \beta^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + \gamma^2\sin^2\theta\sin^2\varphi}},$$

woraus sich durch Addition der Quadrate unmittelbar die Relation ergibt:

$$\frac{1}{\Delta^2} = \frac{1}{\alpha^2\cos^2\theta + \beta^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + \gamma^2\sin^2\theta\sin^2\varphi},$$

die unsere obige Behauptung bestätigt.

Dafs übrigens, wie schon S. 262 f. erwähnt ist, unser Δ die Länge des vom Anfangspunkt der Koordinaten auf die Tangentialebene des Ellipsoids im Punkte (x, y, z) herabgelassenen Perpendikels angibt, ist leicht zu sehen und folgt aus den Formeln (3_0) bis (4) des § 118 (S. 279 f.).

Um nun das Element $d\omega$ unserer Kugelfläche durch dieselben beiden Variablen θ und φ der Jacobischen Substitution ausgedrückt zu erhalten, erinnern wir daran, dafs diese Variablen im Grunde nichts anderes sind als die gewöhnlichen räumlichen Polarkoordinaten [S. 278, (1)]. Für diese wird aber, wie aus bekannten elementargeometrischen Betrachtungen folgt, das Element einer Kugelfläche vom Radius r durch den Ausdruck $r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$, im vorliegenden Falle also, wo $r = 1$ ist, durch

$$(1'') \qquad d\omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

gegeben. Doch brauchen wir nicht einmal zur Ermittelung dieses Ausdrucks die Geometrie zu Hülfe zu nehmen, wenn wir auf das in der $(2'_0)$ des § 114 (S. 259) durch die Ivorysche Substitution [S. 257, (2)] ausgedrückte Element der Fläche des Ellipsoids zurückgreifen. Denn setzt man daselbst $\alpha = \beta = \gamma$, so verwandelt sich das Ellipsoid in eine Kugel vom Radius α, jene Substitutionsformeln werden genau die unsrigen:

$$x = \alpha\cos\theta, \qquad y = \alpha\sin\theta\cos\varphi, \qquad z = \alpha\sin\theta\sin\varphi,$$

und durch ihre Einführung in den Ausdruck für das ellipsoidische Flächenelement erhält man für das Element der Kugelfläche:

$$\alpha^2 d\theta\, d\varphi \sin\theta \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}$$
$$= \alpha^2 d\theta\, d\varphi \sin\theta,$$

was also für $\alpha = 1$ in der That sich auf den obigen Ausdruck für $d\omega$ reduciert.

Vermöge der Werte (1') und (1'') für $\frac{1}{k}$ und $d\omega$ geht aber nun die (1) sofort in den Jacobischen Ausdruck über:

$$\int d\psi = \alpha^2\beta^2\gamma^2 \int\int \frac{\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{(\alpha^2\cos^2\theta + \beta^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + \gamma^2\sin^2\theta\sin^2\varphi)^2}.$$

Hiermit beschliefsen wir unsere Behandlung des Problems der Komplanation der Ellipsoide.

121. Geschichtliche Skizze. — Wir geben noch einen kurzen Überblick über die in mancher Hinsicht interessante Geschichte des Problems.

Während die Rotationsellipsoide natürlich schon längst kompliziert werden konnten, wofür man ja einfache allgemeine Methoden zur Verfügung hatte, hat unseres Wissens für das dreiachsige Ellipsoid zuerst Lagrange dieses Problem behandelt, in der 2. Ausgabe seiner „Théorie des Fonctions", die 1813 erschien, und zwar vermittelst der von Ivory in seiner berühmten Abhandlung vom Jahre 1809 in Anwendung gebrachten Substitution. Einige Zeit darauf nahm Legendre die Sache wieder auf, in der Absicht, die resultierenden Integrale auf elliptische zurückzuführen, womit er sich ja sein Leben lang abgab. Er wandte zwei verschiedene Methoden an, die eine durch Reihen, die aber eigentlich voraussetzt, dafs man das Resultat schon kennt. Seine andere Methode ist sehr schön, aber sehr kompliziert: er teilt die Oberfläche des Ellipsoids in Elemente durch die zueinander normalen Krümmungslinien von der gröfsten und der kleinsten Krümmung. So kommt er schliefslich auf elliptische Integrale, jedoch nicht blofs der ersten und zweiten, sondern auch der dritten Gattung. Diese letztere ist bekanntlich von höherer Ordnung und läfst sich im allgemeinen nicht auf die anderen zurückführen. Aber hier fand Legendre, dafs es sich um einen speciellen Fall handelte, wo diese Reduktion möglich ist, vermittelst der Reduktionsformeln, die er selbst schon in seinem grofsen Werke über die elliptischen Funktionen gegeben hatte.

Darauf veröffentlichte in den dreifsiger Jahren Jacobi im Crelleschen Journal seine Substitution, die unstreitig den einfachsten Weg zur Lösung des Problems bezeichnet, zumal wenn man noch manche Simplifikationen anbringt, wie sie zum Teil Jacobi selbst schon gab, und insbesondere, wenn man den zwar fremdartigen, aber so einfachen Satz aus der Gaufsschen Krümmungstheorie entlehnt.

Die in § 115 gegebene, dem Datum nach spätere Lösung rührt von Catalan her[78]) und hängt im Grunde doch mit der Jacobischen zusammen, insofern als sie auch durch geometrische Betrachtungen eine Variable vermeidet. Für eine elementare Darstellung ohne alle fremden Zuthaten eignet sie sich jedenfalls am meisten.

Aufserdem gibt es noch eine Menge anderer Behandlungsweisen, auf die wir uns aber nicht einlassen. Wir bemerken nur noch, dafs man durch die Ivorysche Substitution des § 114, I. schliefslich auf ein Integral kommt, von dem man auch zu den elliptischen übergehen kann (vergl. S. 259 ff. und 284 f.), und es ist merkwürdig, dafs dies Legendre entgangen ist, da sich, wenn man genau zusieht, die desfallsige Substitution in seinem eigenen Buche findet, wo er eine grofse Anzahl von Integralen aufgestellt hat, die alle einer Reduktion auf elliptische Integrale fähig sind.

Siebenter Abschnitt.

Die dreifachen Integrale,
insbesondere angewandt auf
das Problem der Attraktion der Ellipsoide.

Erstes Kapitel.

Theoretische Grundlagen des allgemeinen Attraktionsproblems.

122. Geschichtlicher Überblick über die erste Periode des Attraktionsproblems der Ellipsoide. — Das Problem der Attraktion der Ellipsoide ist das famoseste der Integralrechnung. Es hebt schon mit Newton an. Nach ihm beschäftigte sich eine grofse Anzahl von Mathematikern mit demselben. Zunächst der bekannte Maclaurin, der eine gemischte, damals namentlich bei den Engländern übliche Methode, wo Geometrie und Rechnung Hand in Hand gehen, anwandte und schon sehr weit damit kam. Dann folgen die Untersuchungen von d'Alembert und Lagrange, die aber gar keine neuen Resultate gewannen und nur, mit der allergröfsesten Anstrengung, zu Wege brachten, rein analytisch zu beweisen, was Maclaurin schon geometrisch gefunden hatte.

Den nächsten Schritt that darauf Legendre und löste das Problem für die Umdrehungsellipsoide, was für jene Zeit schon mit ungeheueren Schwierigkeiten verknüpft war.

Damit war man aber noch lange nicht zum Ziele gelangt. Man vermutete schon das Resultat für das dreiachsige Ellipsoid: — gefunden hat es zuerst Laplace durch eine sehr schwierige Methode, vermittelst Reihen, die zudem noch den Übelstand darbieten, nicht einmal immer zu konvergieren.

Nun nahm Legendre das Problem von neuem auf und verfolgte einen immens komplizierten Weg, wo kaum durchzukommen ist.

Wesentliche Simplifikationen wurden dann erst in diesem Jahrhundert zu Wege gebracht, die aber im voraus zu erwähnen, doch unverständlich bleiben würde. Wir werden daher die näheren geschichtlichen Details bei der Behandlung des Problems selbst einschalten.

123. Ausdruck für das Raumelement in Polarkoordinaten. — Weil wir es hier mit drei Dimensionen zu thun haben, so gebrauchen wir eigentlich die allgemeine Transformationsformel für das Raumelement, also das Analogon zu den in den §§ 108, (3) und 112, (1_0) und (2_0) abgeleiteten allgemeinsten Ausdrücken für das Element der Ebene und das Element einer beliebigen krummen Fläche, denen sie auch in der äufseren Form ganz analog ist, indem sie sich wie diese aus Determinanten zusammensetzt. Da wir aber bei unserem Problem nur die Transformation der rechtwinkligen in Polarkoordinaten benutzen werden, so begnügen wir uns allein mit dem Ausdruck für das diesem System entsprechende Raumelement, der sich durch einfache geometrische Betrachtungen direkt herleiten läfst, natürlich aber auch als specieller Fall in der allgemeinen Formel enthalten sein müfste.

Übrigens verhält es sich hier im Raume — ganz im all gemeinen — ebenso wie in der Ebene. So wie da die speciellen Werte einer jeden der neuen Veränderlichen λ, μ als Funktionen von x und y die Bedeutung hatten (§ 107), dem Punkte in der Ebene eine gewisse Kurve anzuweisen, so auch im Raume: die neuen Veränderlichen

$$\lambda, \mu, \nu$$

können als Funktionen von x, y, z entwickelt werden, und z. B. λ kennen, heifst dann, eine gewisse Fläche kennen, auf der sich der Punkt befinden mufs. Denn

$$\varphi(x, y, z) = \lambda,$$

wo λ eine Konstante bedeutet, ist ja, auf die gewöhnlichen senkrechten Koordinaten bezogen, die Gleichung einer durch die Ordinate z gegebenen Fläche. So wird also die Lage des Punktes im Raume durch drei Flächen (die im allgemeinen von verschiedener Art sind) bestimmt, indem er, auf jeder derselben gelegen, ihr Durchschnittspunkt sein mufs.

Läfst man sich aber nun die Parameter λ, μ, ν allmählich ändern, indem man ihnen in unendlich kleinen Intervallen aufeinander folgende Werte beilegt, so entstehen diesen Werten zugehörig drei Systeme von Flächen, die den ganzen Raum in nach allen drei Dimensionen hin unendlich kleine Stückchen zerschneiden. Und ein solches Stückchen ist das Raumelement, das stets adäquat sein wird der besonderen Natur der Variablen λ, μ, ν.

Für die zu Grunde liegenden rechtwinkligen Koordinaten sind die drei Flächen drei zueinander und zu den Achsen senkrechte Ebenen, und das zugehörige Raumelement ist mithin ein unendlich kleines rechtwinkliges Parallelepipedon

$$dx\,dy\,dz.$$

Für Polarkoordinaten aber gestaltet sich dies alles wie folgt:

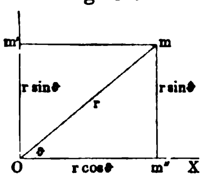
Irgend ein beliebiger Punkt im Raume ist der Pol. Von diesem gehen die positiven Radienvektoren r aus. Ein beliebiger derselben wird als fest gedacht: die Achse. Durch diese wird eine beliebige Ebene gleichfalls fixiert: die Grundebene. Der bewegliche Radiusvektor r bildet die erste Koordinate. Die zweite Koordinate ist dann der Linienwinkel θ, den der bewegliche Radiusvektor mit der Achse macht; er wird von 0 bis zu 2 R gezählt. Die dritte Koordinate endlich ist der Flächenwinkel φ, den — stets nach derselben Richtung hin — die durch den Linienwinkel θ bestimmte Ebene mit der Grundebene bildet; er wird von 0 bis zu 4 R gezählt. — Liegt schon ein rechtwinkliges Koordinatensystem zu Grunde, so läfst man gewöhnlich den Pol mit dessen Anfangspunkte O, die Achse mit der positiven Richtung der x-Achse und die Grundebene mit der Ebene der x, y zusammenfallen.

Alsdann bestehen zwischen den rechtwinkligen Koordinaten x, y, z und den Polarkoordinaten r, θ, φ irgend eines Punktes m im Raume die Beziehungen:

(1) $$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta\cos\varphi, \quad z = r\sin\theta\sin\varphi.$$

Diese Transformationsformeln haben wir bereits gelegentlich der in § 118 behandelten Aufgabe aus Fig. 29 (S. 278) hergeleitet, der wir aber hier die zur Ermittelung des Raumelementes für Polarkoordinaten geeignetere Fig. 32 substituieren. In beiden Figuren sind dieselben Stücke durch die gleichen Buchstaben bezeichnet. Aber Fig. 32 liegt ganz in der durch den Radiusvektor $Om = r$ und die Achse OX bestimmten Ebene. Es ist

Fig. 32.

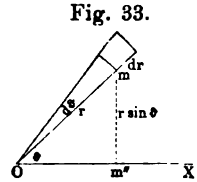


also die Neigung dieser Ebene zur Ebene der x, y unser Winkel φ, ferner $\angle\, mOX = \theta$, und in dem Rechteck $mm''Om'$ Seite Om'' als Projektion von r auf OX direkt gleich $x = r\cos\theta$; Seite Om' hingegen, parallel und gleich $mm'' = r\sin\theta$, ist die Projektion von r auf die Ebene der y, z oder der Durchschnitt der beiden Ebenen mOX und YOZ. Während also Flächenwinkel φ in Fig. 29 den Linienwinkel $mm''n$ zum Maſse hat, wird er hier durch den Winkel gemessen, den Om' mit der positiven Achse der y einschlieſst, so daſs dann die Projektion von Om' auf die y-Achse, bezw. die zur Ebene der x, y senkrechte Projicierende des Punktes m' den beiden Koordinaten y und z von m parallel und gleich sind und für dieselben die obigen Werte in der (1) ergeben.

Nun heiſst offenbar: r kennen, wissen, daſs der Punkt m auf einer Kugelfläche liegen muſs, deren Mittelpunkt O und Radius r ist; θ kennen, wissen, daſs der Punkt sich auf der Oberfläche eines gewissen Umdrehungskegels befindet, dessen Achse OX und halber Winkel an der Spitze θ ist; während φ endlich dem Punkte eine gewisse Ebene anweist, die, aber nur nach einer Seite hin, durch OX gelegt, mit der Ebene der x, y den Winkel φ bildet. Mithin ist der Punkt m oder (r, θ, φ) oder (x, y, z) der Durchschnittspunkt dieser drei Flächen.

Das Raumelement bei m oder an der Stelle (r, θ, φ) liegt also zwischen zwei solchen unendlich nahen Kugelflächen bezw.

Fig. 33.



Oberflächen zweier Umdrehungskegel und zwei benachbarten Ebenen des Systems φ. Seine Gestalt und Gröſse ergibt sich aus der näheren Betrachtung der Fig. 33.

In der durch den Winkel φ bestimmten Ebene mOX ist bei m, wo $\angle\,(r, x) = \theta$, der Radiusvektor $Om = r$ um seinen Zuwachs dr verlängert und um O als Mittelpunkt mit dem Radius Om ein unendlich kleiner

Kreisbogen beschrieben, der dem Zuwachs $d\theta$ des Winkels θ entspricht, also die Länge $r\,d\theta$ besitzt. So wird in dieser Ebene ein kleines Figürchen determiniert, welches nichts anderes ist als das ebene Flächenelement für Polarkoordinaten. Seiner unendlichen Kleinheit wegen ist es, mit Vernachlässigung der Fehler höherer Ordnung, als ein geradliniges Rechteck zu betrachten. Sein Inhalt ist mithin

$$(2') \qquad r\,d\theta\,dr.$$

Dieser Ausdruck mufs natürlich als specieller Fall in unserer früheren allgemeinen Formel für das Element der Ebene enthalten sein, und in der That haben wir ihn schon damals direkt aus derselben hergeleitet [s. § 108, (3) und (4)].

Denkt man sich nun die ganze Figur um OX als Achse gedreht, bis sie in die dem Zuwachs $d\varphi$ des Flächenwinkels φ entsprechende benachbarte Ebene hineinfällt, so ist klar, dafs ein jeder ihrer Punkte einen Kreisbogen beschreibt, speciell Punkt m den Bogen

$$(2'') \qquad r \sin\theta\,d\varphi,$$

und dafs durch diese drehende Bewegung unseres Flächenelementes das verlangte Raumelement erzeugt wird. Da der Bogen (2″) seiner unendlichen Kleinheit wegen als geradlinig und als senkrecht gegen die ursprüngliche Ebene anzusehen ist, so ist das Raumelement selbst — wiederum unter Vernachlässigung der Fehler höherer Ordnung — als ein rechtwinkliges Parallelepiped von der Grundfläche $r\,dr\,d\theta$ und der Höhe $r \sin\theta\,d\varphi$ zu betrachten. Sein Inhalt, der gesucht wurde, ist mithin

$$(2) \qquad r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi.$$

124. Die Grundformeln der Attraktion zwischen zwei materiellen Punkten. — Für unser Problem werden aus der analytischen Mechanik nur die allereinfachsten Grundlehren als bekannt vorausgesetzt: die Zusammensetzung und die Zerlegung der Kräfte, die an materiellen Punkten wirksam sind, vornehmlich also das Parallelogramm und das Parallelepipedon der Kräfte.

Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz ist die Anziehung zwischen zwei Masseneinheiten umgekehrt proportional dem Quadrate ihrer Entfernung. Da aber gewisse Dinge in unserem Problem unabhängig sind von diesem

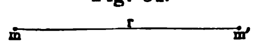
Gesetz, so nehmen wir zunächst, um allgemeine Formeln zu erhalten, an, dafs die Anziehung zwischen zwei Masseneinheiten in der Entfernung r irgend eine von der Entfernung abhängige noch nicht näher bestimmte Funktion

$$\varphi(r) \tag{1}$$

sei.

Nun ist, wenn wir uns fürs erste die Massenteilchen oder Massen, welche eine gegenseitige Anziehung aufeinander ausüben, in Punkten konzentriert denken, der Fundamentalsatz für die Attraktion, dafs *ceteris paribus*, d. h. bei gleichbleibender Entfernung die Gesamtanziehung zwischen zwei solchen materiellen Punkten den Massen proportional ist.

Fig. 34.



Befinden sich also in dem einen Punkte m Masseneinheiten, in dem anderen Punkte aber nur eine Masseneinheit, so wird in der Entfernung r die gegenseitige Anziehung

$$m \cdot \varphi(r)$$

statthaben; hat man aber auch noch in dem zweiten Punkte eine Masse m' (Fig. 34), so wird die totale gegenseitige Anziehung

$$m m' \cdot \varphi(r) \tag{2}$$

sein.

Speciell ist für das obige, von Newton beobachtete und unter seinem Namen gehende Naturgesetz, wenn durch die Konstante

$$k = \varphi(1)$$

die Gröfse der Anziehung zwischen zwei Masseneinheiten in der Einheit der Entfernung bezeichnet wird,

$$\varphi(r) = \frac{k}{r^2}, \tag{1_0}$$

vermöge welches Wertes dann die (2) übergeht in

$$\frac{m m' k}{r^2}. \tag{2_0}$$

Die Formel (2) bezw. (2_0) drückt also die Gröfse der totalen Anziehung zwischen m und m' in der Entfernung r aus, d. h. die Kraft, mit der m nach m' und ebenso m' nach m hinzutreiben strebt, indem hier immer *actio* und *reactio* gleichzeitig vorhanden und gleich grofs sind. Was effektiv geschieht, ist eine andere Frage.

Das sich auf diesen Fundamentalsatz gründende Problem ist nun eigentlich in seiner gröfsten Allgemeinheit, „die Gröfse der gegenseitigen Anziehung zweier ganz beliebiger ausgedehnter Körper zu bestimmen". Aber wir behandeln im folgenden gleichsam nur den Anfang dieser Theorie, nämlich das Problem der Attraktion eines ausgedehnten Körpers auf einen materiellen Punkt, wo also die zweite Masse m in einem Punkt konzentriert gedacht oder unendlich klein angenommen wird. Das allgemeine Problem ist noch viel komplizierter und bildet gewissermafsen eine Wiederholung dieser specielleren Aufgabe.

125. Aufgabe. — Die Anziehung einer beliebigen Masse auf einen materiellen Punkt m zu bestimmen.

Zur Auflösung dieser Aufgabe ist es erforderlich, die anziehende Masse in Elemente zu zerschneiden.

Da wir zunächst keine bestimmte Einteilung des Raumes ins Auge fassen, so wollen wir fürs erste das Raumelement — ähnlich wie in § 120 (S. 289) das Flächenelement — einfach durch das Symbol

$$dv$$

bezeichnen. Weil es sich aber hier nie um rein geometrische Räume, sondern um materielle Körper, um Massen handelt, so mufs uns von der anziehenden Masse auch noch die Dichtigkeit

$$\varrho$$

an jeder Stelle bekannt sein, d. h. der Faktor, womit man das Raumelement zu multiplicieren hat, um das Massenelement

$$\varrho\, dv$$

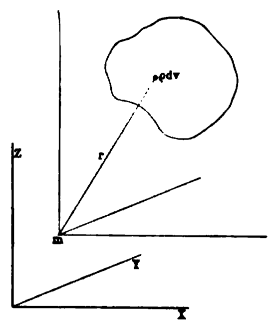
zu erhalten. Dieses Produkt, in dem der Dichtigkeitsfaktor ϱ im allgemeinen eine Funktion der einzelnen Stellen des anziehenden Körpers, also eine Funktion der rechtwinkligen Koordinaten x, y, z sein wird, konstituiert mithin das Funktionalelement unseres Problems.

Hiernach verwandelt sich die (2) des vorigen Paragraphen, welche die Elementaranziehung, d. i. die Anziehung eines Massenelementes des anziehenden Körpers auf den materiellen Punkt m in der Entfernung r angibt, in den Ausdruck

$$m\varrho \cdot \varphi(r)\, dv. \tag{1}$$

Geht man nun den ganzen Körper durch, so erhält man unendlich viele verschiedene Elementaranziehungen, verschieden der Richtung und der Gröfse nach, und um die Gesamtanziehung des Körpers zu haben, hat man alle diese Elementaranziehungen zu vereinigen. Das könnte geschehen durch unendlich oft wiederholte Anwendung des Parallelogramms der Kräfte, indem man die erste Elementaranziehung mit der zweiten, ihre Resultante mit der dritten u. s. w. f. vereinigte. Das thut man aber nicht. Man zerlegt lieber eine jede der Elementaranziehungen in ihre Komponenten nach drei aufeinander senkrecht stehenden Richtungen, die zwar im allgemeinen ganz beliebig sind, falls man aber dem Raume rechtwinklige Koordinaten zu Grunde gelegt hat, den Achsen derselben natürlich parallel genommen werden (Fig. 35). Und wie immer in der Mechanik, werden diese Komponenten — zur ungeheueren Erleichterung der Rechnung — mit dem positiven oder negativen Zeichen versehen, je nachdem ihre Richtungen den von vornherein als positiv festgesetzten Richtungen der drei Achsen gleich oder entgegengesetzt sind, denn ein Drittes ist nicht möglich. Die wirklichen Kräfte hingegen, die tausend verschiedene Richtungen haben, werden immer absolut genommen.

Fig. 35.



Macht die Richtung der Elementaranziehung (1), also r, mit den drei positiven Achsen bezw. die Winkel

$$\lambda, \mu, \nu,$$

so sind bekanntlich ihre drei Komponenten entsprechend:

$$(1') \quad m\varrho \cdot \varphi(r) \cos\lambda\, dv, \quad m\varrho \cdot \varphi(r) \cos\mu\, dv, \quad m\varrho \cdot \varphi(r) \cos\nu\, dv.$$

Jeder dieser drei Ausdrücke stellt einen Wert dar, womit gleichsam ein jeder Punkt des Körpers behaftet ist. Um also die Komponenten der Totalanziehung des Körpers auf den Punkt m zu erhalten, hat man für jede der drei Richtungen die sämtlichen ihr zugehörigen Werte (1') zu summieren, was offenbar, als über den ganzen Körper, also räumlich nach den drei Dimensionen zu erstrecken, dreifache Integrationen ergibt.

Mithin erhält man, indem man gleich das konstante m heraussetzt und der Bezeichnung des Raumelementes durch dv entsprechend, nur ein Integralzeichen schreibt, für die drei Komponenten A, B, C der Totalanziehung die Ausdrücke:

$$A = m\int \varrho \cdot \varphi(r) \cdot \cos\lambda\, dv,$$
$$B = m\int \varrho \cdot \varphi(r) \cdot \cos\mu\, dv,$$
$$C = m\int \varrho \cdot \varphi(r) \cdot \cos\nu\, dv.$$

Die wahre Anziehung oder die Resultante ist also dem Parallelepipedon der Kräfte zufolge

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Doch für gewöhnlich macht man von dieser Resultante keinen Gebrauch, da es gerade die Komponenten sind, aus denen sich weitere Schlufsfolgerungen ergeben.

Somit wäre, durch Aufstellung der analytischen Formeln, unser allgemeines Problem gelöst. Und nun kann man nur zusehen, was daraus wird und welcher Vereinfachungen es sich fähig erweist, wenn ϱ und φ bestimmte, näher gegebene Werte annehmen und dem anziehenden Körper eine bestimmte Gestalt gegeben wird.

Fürs erste ist aber schon aus den obigen Formeln ersichtlich, dafs alle drei Komponenten der Attraktionskraft des anziehenden Körpers stets proportional sind der Masse m des angezogenen Punktes, also z. B. bei doppelter Masse m doppelt so grofs werden. Um sich daher mit diesem konstanten Faktor nicht herumschleppen zu müssen, pflegt man m auf die Einheit zu reducieren, d. h. den angezogenen Punkt mit der Masse 1 zu behaften.

Ist ferner der Körper homogen, d. h. seine Dichtigkeit ϱ konstant, was im allgemeinen das Problem unendlich simplificiert — obschon für ϱ auch solche Funktionen sich denken liefsen, die speciell in einem gerade vorliegenden Falle eine noch weit gröfsere Vereinfachung herbeiführen würden —, so tritt auch ϱ als ein solcher konstanter Faktor heraus und kann dann wieder, wie vorhin m, gleich 1 gesetzt oder zum Mafs für die Dichtigkeit genommen werden.

Dann hat man also für die Komponenten die Ausdrücke:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} A = \int \varphi(r) \cdot \cos\lambda \cdot dv, \\ B = \int \varphi(r) \cdot \cos\mu \cdot dv, \\ C = \int \varphi(r) \cdot \cos\nu \cdot dv. \end{cases}$$

Ist endlich noch die Anziehung das Newtonsche Gravitationsgesetz:

$$\varphi(r) = \frac{k}{r^2} \text{ [124, } (1_0)],$$

und setzt man auch hier den Einheitsfaktor der Attraktion $k = 1$, was gleichzeitig mit $m = 1$ und $\varrho = 1$ gestattet ist, da ja diese drei Konstanten in gar keiner gegenseitigen Beziehung zueinander stehen, so gehen die Komponenten in folgende Form über:

$$(\mathrm{I}_0) \quad A = \int \frac{dv}{r^2} \cos\lambda, \quad B = \int \frac{dv}{r^2} \cos\mu, \quad C = \int \frac{dv}{r^2} \cos\nu.$$

Schliefslich, sieht man, hängt alles, wenn erst einmal die Funktion $\varphi(r)$ näher bestimmt ist, davon ab, wie der anziehende Körper begrenzt ist.

Wir behandeln nun im folgenden von der hier gelösten allgemeinen Aufgabe nur den einen speciellen Fall, wo der anziehende Körper ein homogenes dreiachsiges Ellipsoid ist und die Attraktion dem Newtonschen Gesetze folgt.

Zweites Kapitel.

Attraktion der homogenen Ellipsoide auf einen inneren Punkt.

126. Einleitung. — Das Problem der Attraktion der Ellipsoide bietet ungeheuere Schwierigkeiten, die hauptsächlich davon abhängig sind, wie man den Raum in Elemente teilt oder ob man geschickt die Variablen wählt. Nun ergibt sich aber bei den ersten Schritten, die man zu thun hat, das merkwürdige Resultat, dafs, wenn man die gewöhnlichen Polarkoordinaten einführt und ihren Pol in den angezogenen Punkt m hinverlegt, so dafs er also infolge der durch die Anziehung bewirkten beständigen Ortsveränderung des Punktes m jeden Augenblick wechselt — während es doch eigentlich natürlich wäre, ihn mit dem festen Anfang der x, y, z, dem Mittelpunkt des Ellipsoids, zusammenfallen zu lassen —, sich dann die Sache ungemein einfach stellt für einen im Innern des Ellipsoids gelegenen angezogenen Punkt und für jede beliebige innere Lage desselben die vollständige Lösung des Problems gewonnen wird. Es ist dies (vergl. § 122) die von Lagrange befolgte Methode, durch die er zu dem Resultat gelangte, das Maclaurin schon durch seine gemischte Methode gefunden hatte und auf reinem Rechnungswege auch gar nicht hätte ableiten können, denn damals kannte man noch gar nicht eine solche Elementareinteilung des Raumes, noch weniger ihre Bezeichnungsweise.

Jedoch genügt es nicht, die Anziehung auf einen inneren Punkt zu kennen. Ebenso vonnöten ist das Resultat für einen aufserhalb des Ellipsoids gelegenen Punkt. Jene spielt z. B. eine Rolle bei der Bestimmung der Gestalt der Erde, die hervorgebracht ist durch ihre Achsenrotation, als sie noch in flüssigem Zustande war, wobei eben die Wirkung einer flüssigen Masse auf jeden ihrer Punkte in Betracht kommt. Hingegen ist es die Attraktion auf einen äufseren Punkt, deren Kenntnis in vielen anderen Problemen unerläfslich ist, wie z. B., wenn es sich um den Einflufs handelt, den die Erde auf den Mond ausübt.

Für einen äufseren Punkt aber ging nun jene Methode, welche dort so glückte, durchaus nicht: nach einer Integration lag man vollständig fest, und das hat eben die Mathematiker so viel beschäftigt. Die Einführung von Polarkoordinaten nach der Lagrangeschen Methode läfst einen hier also völlig im Stich; eine andere Betrachtung aber wird zeigen, wie man diesen Fall auf den ersteren schon gelösten zurückführen kann. Und zwar ist es das Ivorysche Theorem, das wir weiter unten (§ 133) zu erweisen haben werden, durch welches diese Reduktion bewerkstelligt und somit die Lösung des Problems der Attraktion der Ellipsoide überhaupt zum Abschlufs gebracht wird.

Zuerst also haben wir den Fall des inneren Punktes zu behandeln.

127. Aufgabe. — Die Attraktion eines homogenen Ellipsoids auf einen inneren Punkt unter Voraussetzung des Newtonschen Gravitationsgesetzes zu bestimmen.

Auflösung. — Wählt man den Dichtigkeitsfaktor ϱ, die Masse m des angezogenen Punktes und den konstanten Attraktionsfaktor k sämtlich zu Mafseinheiten für ihre betreffenden Gebiete, so werden die Komponenten der Totalanziehung des

Körpers auf einen materiellen Punkt nach drei aufeinander senkrechten Achsen durch die Gleichungen (I_0) des § 125 gegeben:

$$(\mathrm{I})\qquad A = \int \frac{dv}{r^2}\cos\lambda,\quad B = \int \frac{dv}{r^2}\cos\mu,\quad C = \int \frac{dv}{r^2}\cos\nu.$$

Der anziehende Körper ist das durch die Gleichung

$$(1)\qquad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

bestimmte Ellipsoid, mit dessen Mittelpunkt und Achsen der Anfangspunkt und die korrespondierenden Achsen der rechtwinkligen Koordinaten vorerst noch zusammenfallen.

Während aber die Gleichung (1) für alle Punkte der Oberfläche des Ellipsoids gilt, kommt es uns bei unserem Problem noch auf gewisse Ungleichheiten an, durch welche die innerhalb oder aufserhalb des Ellipsoids (1) gelegenen Punkte voneinander unterschieden werden. Diese Ungleichheiten ergeben sich unmittelbar aus folgender Betrachtung. Je nachdem ein Punkt $P = (x, y, z)$ aufserhalb oder innerhalb des Ellipsoids liegt, trifft seine Verbindungslinie mit dem Mittelpunkt des Ellipsoids entweder selbst oder in ihrer Verlängerung die Oberfläche desselben. Zur Abkürzung werde dieser Treffpunkt P_1, seine Koordinaten entsprechend x_1, y_1, z_1 genannt, ferner $OP = r$, $OP_1 = r_1$ gesetzt: so leuchtet ein, dafs r und r_1 den Koordinaten von P und P_1 beziehentlich proportional sind und mithin die gleichen Verhältnisse statthaben:

$$r : r_1 = x : x_1 = y : y_1 = z : z_1.$$

Je nachdem also r kleiner oder gröfser als r_1 ist, werden auch x, y, z bezüglich kleiner oder gröfser sein als x_1, y_1, z_1, woraus wegen der (1) folgt, dafs alle Punkte (x, y, z) im Innern des Ellipsoids die Ungleichheit

$$(1')\qquad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} < 1,$$

alle aufserhalb gelegenen Punkte hingegen die Ungleichheit

$$(1'')\qquad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} > 1$$

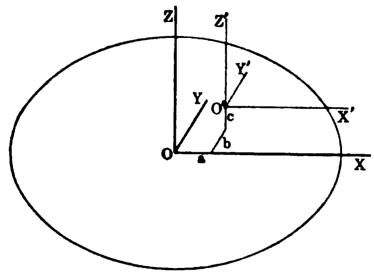
erfüllen müssen.

Jetzt verlege man den Anfangspunkt der Koordinaten in den der Voraussetzung nach innerhalb des Ellipsoids liegenden angezogenen Punkt, dessen auf das ursprüngliche System bezogenen Koordinatenwerte

$$a, b, c$$

sein mögen. Die neuen Achsen werden natürlich den alten Achsen parallel und gleichgerichtet angenommen. Dann sind offenbar (Fig. 36) für jeden beliebigen Punkt im Raume seine ursprünglichen Koordinaten x, y, z und seine neuen Koordinaten x', y', z' durch die Relationen miteinander verknüpft:

Fig. 36.



$$x = x' + a,$$
$$y = y' + b,$$
$$z = z' + c.$$

Vermittelst dieser Werte wird, wenn man die Accente wieder fortläfst, die auf die neuen Achsen bezogene Gleichung des Ellipsoids:

$$(1_0) \qquad \frac{(x+a)^2}{\alpha^2} + \frac{(y+b)^2}{\beta^2} + \frac{(z+c)^2}{\gamma^2} = 1,$$

und die Ungleichheit, die jeder Punkt (x, y, z) im Innern des Ellipsoids zu erfüllen hat:

$$(1_0') \qquad \frac{(x+a)^2}{\alpha^2} + \frac{(y+b)^2}{\beta^2} + \frac{(z+c)^2}{\gamma^2} < 1.$$

Nun haben wir nur noch die Polarkoordinaten r, θ, φ einzuführen und zu ihrem Pol den angezogenen Punkt, zu ihrer Achse die Achse der x, zu ihrer Grundebene die Ebene der x, y zu wählen. Dann hat man nach den Formeln (2) und (1) des § 123 für das Raumelement an der Stelle (x, y, z)

$$dv = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi,$$

und für die Koordinaten des Punktes (x, y, z)

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta\cos\varphi, \quad z = r\sin\theta\sin\varphi.$$

Der Radiusvektor r ist dann eben der nach jedem Punkte des anziehenden Ellipsoids hingezogene Strahl oder die Entfernung des anziehenden Elementes von dem angezogenen Punkt, und mithin sind, wie S. 278 gezeigt worden ist, die cosinus der drei Winkel λ, μ, ν, die er mit den positiven Richtungen der drei senkrechten Achsen macht:

$$\cos\lambda = \cos\theta, \quad \cos\mu = \sin\theta\cos\varphi, \quad \cos\nu = \sin\theta\sin\varphi.$$

Diese Werte für die cosinus und für dv sind nun in die (I) einzusetzen. Dadurch werden, indem sich r^2 ganz heraushebt, die Komponenten der Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned} A &= \int \cos\theta \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi, \\ B &= \int \sin^2\theta \cos\varphi \, dr\, d\theta\, d\varphi, \\ C &= \int \sin^2\theta \sin\varphi \, dr\, d\theta\, d\varphi. \end{aligned}$$

Wir brauchen aber diese Integrationen nur für **eine** Komponente zu führen, denn wenn auch die vorstehenden Ausdrücke selbst nicht symmetrisch sind, so ist doch nach der Natur des Problems und wie auch durch die allgemeinen Formeln (I) unmittelbar bestätigt wird, von Hause aus alles symmetrisch in Bezug auf die drei rechtwinkligen Achsen oder die Richtungen der x, y, z. Hat man also A gefunden, so ist nur nötig, a mit b, α mit β, oder a mit c, α mit γ zu vertauschen, um B bezw. C zu erhalten.

Wir haben uns demnach allein mit dem dreifachen Integral zu befassen:

$$A = \iiint \cos\theta \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi. \tag{2}$$

Hier hat es keine Schwierigkeit, welche Integration auch immer an erster Stelle vorzunehmen. Wir wählen dazu die Integration nach r. Das gibt einfach

$$\int dr = r + C.$$

Die Grenzen dieses Integrals mufs die Ungleichheit (1.) liefern, nachdem man Polarkoordinaten in sie eingeführt hat. Dadurch verwandelt sie sich in

$$\frac{(r\cos\theta + a)^2}{\alpha^2} + \frac{(r\sin\theta\cos\varphi + b)^2}{\beta^2} + \frac{(r\sin\theta\sin\varphi + c)^2}{\gamma^2} < 1. \tag{2'}$$

Entwickeln wir dieses nach Potenzen von r und bezeichnen zur Abkürzung die (nach r konstanten) Koeffizienten bezw. durch l, m, n, so findet sich

$$\begin{aligned} l &= \frac{\cos^2\theta}{\alpha^2} + \frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{\beta^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{\gamma^2}, \\ m &= \frac{a\cos\theta}{\alpha^2} + \frac{b\sin\theta\cos\varphi}{\beta^2} + \frac{c\sin\theta\sin\varphi}{\gamma^2}, \\ n &= 1 - \left(\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} + \frac{c^2}{\gamma^2}\right). \end{aligned}$$

Die (2′) lautet nunmehr:

$$l r^2 + 2 m r < n,$$

kann aber noch nach Multiplikation mit l, das als Summe von lauter Quadraten immer positiv ist, auf die für die folgenden Untersuchungen geeignetere Form gebracht werden:

$$(2_0) \qquad (l r + m)^2 < m^2 + l n.$$

Diese Ungleichheit ist jetzt behufs Ermittelung der Grenzen des Integrals $\int dr$ zu diskutieren.

Zunächst ist schon rein geometrisch klar, dafs sich die Sache hinsichtlich der Grenzen ganz verschieden gestaltet, je nachdem der angezogene Punkt innen oder aufsen liegt: für einen inneren Punkt existieren nach allen Richtungen ringsherum Elemente, nicht aber so für einen äufseren Punkt. Denn wenn man dann vom angezogenen Punkte aus einen umhüllenden Kegel an das Ellipsoid legt, so gibt es in allen Richtungen aufserhalb dieses Kegels gar keine r. Dasselbe mufs natürlich auch die Rechnung ergeben, und es ist wenigstens interessant zu sehen, wie analytisch dies Resultat gewonnen wird.

Je nachdem der angezogene Punkt ein innerer oder äufserer ist, ist wegen der (1′) und (1″) das nach r, θ, φ konstante n positiv oder negativ. Der Grenzfall $n = 0$, wo dann der angezogene Punkt auf der Oberfläche des Ellipsoids selbst liegt, kommt, da er am ersteren Falle participiert, für sich nicht weiter in Betracht.

Ist nun n positiv, also der angezogene Punkt ein innerer und

$$\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} + \frac{c^2}{\gamma^2} < 1,$$

so ist ln und daher auch $m^2 + ln$ stets gröfser als Null, wie es die (2_0) erfordert, da ihre linke Seite als ein Quadrat immer positiv ist. Was für Werte also auch m, l, n oder θ und φ haben mögen, in diesem Falle läfst sich die Bedingung (2_0) immer erfüllen. Ist hingegen — für einen äufseren Punkt — n, also auch ln negativ, so gäbe es Werte von $m^2 + ln$ unter Null, und durch diese Werte würde die Bedingung (2_0) nie erfüllt werden können.

In unserem Falle des inneren Punktes ($n > 0$) gibt nun die Ungleichheit (2_0) für jeden Wert von l, m, n oder θ, φ die Grenzen

$$-\left|\sqrt{m^2 + l n}\right| < l r + m < \left|\sqrt{m^2 + l n}\right|,$$

denn wenn auch der numerische Wert der Quadratwurzel aus $(lr+m)^2$ oder $|lr+m|$ gröfser als Null ist, also zwischen 0 und $|\sqrt{m^2+ln}|$ liegen mufs, so ist es wegen des Wertes von m, der $\gtrless 0$ sein kann, doch auch möglich, dafs (algebraisch) $lr+m$ negativ sei.

Man hat also, indem man durch das positive l dividieren darf,

$$(3) \qquad \frac{-m-|\sqrt{m^2+ln}|}{l} < r < \frac{-m+|\sqrt{m^2+ln}|}{l},$$

in welcher Ungleichheit wiederum die Gleichheit als Grenzfall mit eingeschlossen ist.

Dies ist die eine Grenzbedingung für r. Die andere ist die stets für den Radiusvektor im System der Polarkoordinaten bestehende Einschränkung, dafs er durchaus absolut zu nehmen ist, also

$$r > 0$$

sein mufs. Daher kommen in der letzten Ungleichheit nur die positiven Werte in Betracht. Obzwar nun $m \gtrless 0$ sein kann, ist doch jedenfalls $|\sqrt{m^2+ln}| > |m|$, woraus folgt, dafs selbst im schlimmsten Falle, d. h. wenn m wirklich positiv, also $-m$ subtraktiv ist, die obere Grenze in der (3) stets positiv, die untere aber, selbst für $m < 0$, stets negativ ist und diese mithin durch 0 ersetzt werden mufs.

Demnach hat man für einen inneren Punkt, und welches auch die Werte von l, m, n oder von θ und φ sein mögen, die Grenzbedingung:

$$(3_0) \qquad 0 < r < \frac{-m+|\sqrt{m^2+ln}|}{l}.$$

Dagegen würde für einen äufseren Punkt ($n < 0$) die Sache sich ganz anders stellen: die Grenzen würden variieren und alles sehr kompliziert, ja unlösbar werden. Wir kommen später auf diesen Fall noch einmal zurück (S. 313).

Für das zwischen den Grenzen (3_0) erstreckte Integral $\int dr = r + C$ ergibt sich nun unmittelbar der Wert

$$\frac{-m+|\sqrt{m^2+ln}|}{l},$$

mithin für die Komponente A nach Einsetzung dieses Wertes in den Ausdruck (2) das Doppelintegral

$$(A) \qquad A = \iint \cos\theta \sin\theta \left(\frac{- m + |\sqrt{m^2 + ln}|}{l} \right) d\theta\, d\varphi,$$

das über alle möglichen Werte von θ und φ, also ringsherum, d. h. nach θ von 0 bis π, nach φ von 0 bis 2π zu erstrecken ist.

Doch gilt das wiederum nur für den inneren Punkt. In dem Fall des äufseren Punktes wäre in vielen Richtungen gar kein Elementarkegel nach r zu integrieren gewesen (Fig. 37), und daraus folgt, wie wir weiter unten gleichfalls noch zeigen werden, dafs sich dann die Integrationen auch nicht über alle θ und φ erstrecken.

Fig. 37.

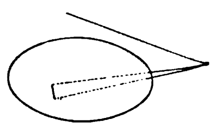
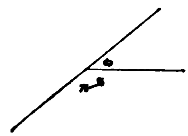


Fig. 38.



Nun scheint sich aber der Ausdruck (A) wegen der ungeheuer komplizierten Natur der in der Integralfunktion enthaltenen Wurzel doch nicht, weder nach θ noch nach φ, integrieren zu lassen. Glücklicherweise fällt der Teil mit der Wurzel ganz aus, d. h. es ist, aber nur vermöge des Umfanges der beiden Integrationen,

$$(A') \qquad \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta \, \frac{|\sqrt{m^2 + ln}|}{l} \, d\theta\, d\varphi = 0.$$

In der That, es ist leicht zu sehen, dafs in diesem Doppelintegral oder dieser Doppelsumme die Elemente, die entgegengesetzten Richtungen entsprechen, aus zwei Gliedersystemen bestehen, die sich in ihrer Vereinigung gegenseitig aufheben, aber nur dann in allen ihren Gliedern, wenn die Integration ganz herumgeht, für einen äufseren Punkt also nicht. Damit aber diese Destruktion stattfinde, mufs noch — sonst hätte das Ganze keinen Sinn — vorausgesetzt werden, dafs an je zwei entgegengesetzten Stellen die unendlich kleinen Faktoren, die Differentiale $d\theta$, $d\varphi$, beziehentlich einander gleich seien, was, wenn auch nicht notwendig, doch stets erlaubt ist. Mit anderen Worten, die Flächensysteme müssen, wenigstens an jenen Stellen, äquidistant sein, und daher mögen der gröfseren Einfachheit halber überhaupt alle $d\theta$, $d\varphi$ konstant angenommen werden.

Was nun die anderen im Doppelintegral (A') vorkommenden

Gröfsen betrifft, so ist zunächst klar, dafs die zwei entgegengesetzten Richtungen zugehörigen Winkel θ immer Supplemente zueinander sind (Fig. 38, a. v. S.), also:

$$\theta \text{ und } \pi - \theta,$$

dafs aber das zweite φ das erste um 2 R übertrifft, diese beiden Winkel mithin

$$\varphi \text{ und } \pi + \varphi$$

sind, weil ja Winkel φ immer von der Grundebene aus nach einer Seite hin bis zu 4 R gezählt wird.

Daraus ergibt sich für die zwei entgegengesetzten Richtungen entsprechenden einzelnen Bestandteile von (A') folgendes:

$d\theta\, d\varphi$ ist konstant,

$\cos\theta$ wird entgegengesetzt, $\sin\theta$ bleibt dasselbe,

l, aus lauter Quadraten bestehend, bleibt dasselbe,

n ist konstant,

m wird entgegengesetzt, aber m^2 bleibt dasselbe,

also auch

$$\frac{\sqrt{m^2 + ln}}{l} \text{ bleibt dasselbe.}$$

Alles in allem sind demnach die beiden fraglichen Elemente des Doppelintegrals (A') numerisch einander gleich, aber mit entgegengesetzten Zeichen behaftet, und heben sich folglich gegeneinander auf.

Für einen äufseren Punkt hingegen findet, wie schon bemerkt, diese merkwürdige Destruktion nicht statt.

Somit ist die (A') erwiesen.

Zu demselben Ergebnis führt die Zerlegung des Doppelintegrals (A') in die Summe der beiden Teilintegrale

$$\int_0^\pi\int_0^\pi (\ )\, d\theta\, d\varphi + \int_0^\pi\int_\pi^{2\pi} (\ )\, d\theta\, d\varphi.$$

Denn dadurch werden, wie in der eben abgeschlossenen Untersuchung, seine sämtlichen Elemente

$$\cos\theta \sin\theta \frac{|\sqrt{m^2 + ln}|}{l}\, d\theta\, d\varphi$$

auf zwei Gruppen verteilt, deren erstere alle dem ersten Teilintegral angehörigen Elemente, also alle möglichen Kombinationen der sämtlichen Werte von θ von 0 bis π mit allen Werten von φ von 0 bis π umfafst, die andere aber sämtliche Elemente des zweiten Teilintegrals, d. i. die Kombinationen derselben Reihe von Werten von θ mit allen Werten von φ zwischen π und 2π in sich vereinigt. Da aber, wie aus der obigen Diskussion folgt, für jedes Element des ersten Teilintegrals ein Element im zweiten Teilintegral vorhanden ist, das ihm gleich und entgegengesetzt ist, nämlich das, welches aus jenem Element erhalten wird, wenn man θ durch $\pi - \theta$, φ durch $\pi + \varphi$ ersetzt (wo θ und φ beliebige Werte von 0 bis π annehmen können), so heben sich beide Gruppen vollständig gegeneinander auf.

Bis hierhin gilt übrigens alles für alle drei Komponenten auf gleiche Weise, wie auch schon aus ihren Ausdrücken auf S. 308 hervorgeht, die sich blofs in Bezug auf die Variablen θ und φ, nicht aber in Bezug auf r (mithin auch nicht hinsichtlich der Gröfsen l, m, n) voneinander unterscheiden.

So hat man nun mit einem Schlage für die Komponente A der Attraktion auf einen inneren Punkt das rein rationale, also noch einer beliebigen Integration fähige Doppelintegral

$$(A_1) \qquad A = -\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta \cdot \frac{m}{l}\, d\theta\, d\varphi.$$

Ehe wir aber hierin weitergehen, wollen wir noch einige Worte über den Fall des äufseren Punktes hinzufügen und zeigen, dafs da die Integration nach θ und φ nicht ringsherum geht.

Wir haben schon gesehen (S. 309), dafs dann

$$n < 0,$$

also auch ln negativ ist, und daher wird hier

$$(2_0') \qquad m^2 + ln > 0$$

wirkliche Bedingung, da es Werte von l (und auch von m), d. h. Werte von θ und φ geben kann, für welche dieses Binom negativ ist. Dadurch wird also nur ein gewisser Spielraum für θ und φ übrig gelassen, indem nur diejenigen ihrer Werte in Betracht zu ziehen sind, die der $(2_0')$ und aufserdem der oben hergeleiteten Ungleichheit (3) (S. 310) genügen, durch welche die extremen Werte von r bestimmt werden. Diese beiden Grenzwerte von r sind aber entweder gleichzeitig positiv oder gleichzeitig negativ. Denn da ln negativ, so ist jedenfalls

$$|\sqrt{m^2 + ln}| < |m|,$$

so dafs das Zeichen von $-m$ immer auch das Zeichen des ganzen Zählers und des ganzen Ausdrucks sein wird. Je nachdem also m positiv oder negativ ist, sind beide extremen Werte von r, mithin auch alle zwischenliegenden Werte negativ oder positiv. Da aber durchaus $r > 0$ sein mufs, so ist für einen äufseren Punkt immer notwendige Bedingung, die als zweite zu der $(2_0')$ hinzutritt:

$$(2_0'') \qquad m < 0.$$

Nur dann, wenn θ und φ so beschaffen sind, dafs diese beiden Bedingungen erfüllt werden, gibt es r und ist eine Integration möglich nach r, und die Grenzen dieser Integration sind alsdann die in (3) angegebenen, für welche sich nun als zugehöriger Wert von $\int dr = r + C$ sofort

$$\frac{2\,|\sqrt{m^2 + ln}|}{l}$$

ergibt.

Untersucht man aber die Bedingungen $(2_0')$ und $(2_0'')$, so findet sich, analytisch und geometrisch, dafs es solche r nur in den Richtungen gibt, die, vom angezogenen Punkte aus, in das Ellipsoid oder das Innere des Umhüllungskegels hineinfallen.

Dann kommt auch in dem nunmehrigen Integral

$$A = 2\int\!\!\int \frac{\cos\theta \sin\theta\,|\sqrt{m^2 + ln}|}{l}\,d\theta\,d\varphi$$

gar nicht die entgegengesetzte Richtung vor, denn das würde, indem für $\pi - \theta$ und $\pi + \varphi$ $\cos\theta$, $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, also sämtliche Glieder von m entgegengesetzt werden, mit einem Zeichenwechsel von m verknüpft sein, während doch der $(2_0'')$ zufolge diese Gröfse nur negativ sein darf. — Auch leuchtet dies geometrisch unmittelbar ein.

Und dafs hier überhaupt von einer Destruktion wie beim inneren Punkt nicht die Rede sein kann, zeigt schon die Form des vorstehenden Ausdrucks für die Komponente: da derselbe eingliedrig ist, würde sich alsdann die ganze Anziehung auf Null reducieren.

Kurz, direkt ist hier nicht durchzukommen, wenigstens nicht anders als mit der gröfsten Anstrengung.

Wir wenden uns jetzt wieder unserer eigentlichen Aufgabe zu.

Setzt man in den zuletzt erhaltenen Ausdruck (A_1) für die

Komponente der Anziehung auf einen inneren Punkt die Werte von m und l ein, so erhält man

$$A = -\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\dfrac{a\cos\theta}{\alpha^2} + \dfrac{b\sin\theta\cos\varphi}{\beta^2} + \dfrac{c\sin\theta\sin\varphi}{\gamma^2}}{\dfrac{\cos^2\theta}{\alpha^2} + \dfrac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{\beta^2} + \dfrac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{\gamma^2}} \cos\theta\sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Wegen des dreigliedrigen Zählers besteht dieses Doppelintegral aus der Summe von drei Integralen, von denen aber wiederum, aus ähnlichen Gründen wie oben das Integral (A'), das zweite und dritte herausfallen, indem sie einzeln zu Null werden. Denn in jedem von ihnen haben schon allein in Bezug auf φ, währenddes also θ konstant ist, die Elemente in diametral entgegengesetzten Richtungen gleiche, aber entgegengesetzte Werte, da ja für die daselbst stattfindenden Argumente φ und $\pi + \varphi$ die in den Zählern vorkommenden Faktoren $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ bezw. $-\cos\varphi$ und $-\sin\varphi$ sind, während in dem Nenner l, der nur die Quadrate dieser Funktionen von φ enthält, sich nichts ändert. Es ist mithin für jeden beliebigen Wert von θ in beiden Integralen die Summe von je zwei Elementen gleich Null, und daher auch

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{b}{\beta^2}\, \frac{\sin^2\theta\cos\theta\cos\varphi}{l}\, d\theta\, d\varphi = 0$$

und

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{c}{\gamma^2}\, \frac{\sin^2\theta\cos\theta\sin\varphi}{l}\, d\theta\, d\varphi = 0.$$

Dasselbe fände man auch genau wie vorhin bei der Untersuchung des Integrals (A') durch Zerlegung eines jeden der beiden Integrale nach φ in die Summe der beiden Teilintegrale:

$$\int_0^{2\pi}(\ )\,d\varphi = \int_0^{\pi}(\ )\,d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi}(\ )\,d\varphi.$$

Somit bleibt einfach übrig:

$$A = -\frac{a}{\alpha^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{\dfrac{\cos^2\theta}{\alpha^2} + \dfrac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{\beta^2} + \dfrac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{\gamma^2}}.$$

Hier lassen sich nun noch die Grenzen beider Integrale vereinfachen.

In Bezug auf φ ist das Doppelintegral offenbar das Vierfache desselben, aber nach φ nur von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ erstreckten Integrals, denn ersichtlicherweise ist das vorliegende Integral nach φ in allen vier Quadranten dasselbe: im ersten und zweiten Quadranten haben die supplementären Winkel φ $\left(<\frac{\pi}{2}\right)$ und $\pi-\varphi$, im dritten und vierten Quadranten die Supplementswinkel $\pi+\varphi$ und $\pi-\pi-\varphi=-\varphi=2\pi-\varphi$, im zweiten und dritten Quadranten endlich die beiden Winkel $\pi-\varphi$ und $\pi+\varphi$ (wo φ überall denselben spitzen Winkel bedeutet) gleiche numerische Funktionen, worauf es, da sich nur ihre Quadrate vorfinden, allein ankommt. Und damit ist unsere Behauptung bestätigt. θ wird währenddes natürlich als konstant betrachtet, und da sein besonderer Wert zur Sache nichts beiträgt, so gilt die eben erwiesene Eigenschaft auch noch, wenn das von 0 bis π sich erstreckende Integral nach θ hinzutritt.

Aber auch in diesem Integral lassen sich, während man φ als konstant ansieht oder sich gar schon die desfallsige Integration ausgeführt denkt, die Grenzen vereinfachen. Denn die Elemente des Integrals sind dann für zwei supplementäre Werte von θ (im ersten und zweiten Quadranten) einander gleich, weil aufser seinen Funktionen im Quadrat nur noch der in beiden Quadranten positive $\sin\theta$ vorkommt. Mithin kann man die Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ nehmen und das Ganze verdoppeln.

Alles das würde auch wiederum die wirkliche Zerlegung in Teilintegrale ergeben.

So hat man endlich

$$(A_0)\quad A=-\frac{8a}{\alpha^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta\,d\varphi}{\frac{\cos^2\theta}{\alpha^2}+\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{\beta^2}+\frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{\gamma^2}}.$$

Ähnlich sind die Ausdrücke für die beiden anderen Komponenten, die genau ebenso entwickelt werden könnten, sich aber schon der blofsen Symmetrie wegen (s. S. 308) aus der (A_0) abschreiben lassen, indem man nur in dem konstanten Faktor vor dem Integral $\frac{a}{\alpha^2}$ mit $\frac{b}{\beta^2}$ bezw. $\frac{c}{\gamma^2}$ zu vertauschen hat. Denn in dem Nenner der Integralfunktion selbst ist, weil er allen drei Komponenten gemeinsam ist (s. S. 313), nichts zu vertauschen.

Obwohl nun die Rechnung noch nicht so weit getrieben ist, wie es möglich ist, so lassen sich doch schon aus dem Ausdruck (A_0) und den analogen Ausdrücken für die Komponenten B und C die charakteristischen Eigenschaften der Attraktion des Ellipsoids auf einen inneren Punkt mit Leichtigkeit deducieren.

Das soll, ehe wir unsere Aufgabe zu Ende führen, im folgenden Paragraphen geschehen.

128. Haupteigenschaften der Attraktion eines homogenen Ellipsoids auf einen inneren Punkt. —

I. Bringen wir zunächst in der letzten Formel des vorigen Paragraphen den Nenner α^2 des vor dem Integral befindlichen Faktors unter das Integralzeichen und verfahren ebenso mit β^2 bezw. γ^2 in den analogen Formeln für B und C, so erhält man:

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} A = -8a \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{\cos^2\theta + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\sin^2\theta\cos^2\varphi + \frac{\alpha^2}{\gamma^2}\sin^2\theta\sin^2\varphi}, \\[2ex] B = -8b \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{\frac{\beta^2}{\alpha^2}\cos^2\theta + \sin^2\theta\cos^2\varphi + \frac{\beta^2}{\gamma^2}\sin^2\theta\sin^2\varphi}, \\[2ex] C = -8c \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\cos^2\theta + \frac{\gamma^2}{\beta^2}\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi}. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke zeigen, dafs die Komponenten der Totalanziehung des Ellipsoids gar nicht abhängig sind von seinen drei Halbachsen α, β, γ selbst, sondern nur von den beiden Verhältnissen derselben:

$$\frac{\alpha}{\beta} \quad \text{und} \quad \frac{\alpha}{\gamma},$$

durch welche ja gleichzeitig auch das Verhältnis $\frac{\beta}{\gamma}$ bestimmt i

Es ist folglich die Komponente A — und analog verhält es sich mit den beiden anderen Komponenten — gleich a, multipliciert mit einer (durch die obige Formel gegebenen) Gröſse, die sich nicht ändert, wenn man die Achsen des Ellipsoids so ändert, daſs jene beiden Verhältnisse dieselben bleiben, mit anderen Worten, wenn man die Achsen nach demselben Verhältnis ändert, wobei selbstverständliche Voraussetzung ist, daſs der an seiner Stelle unveränderlich verharrende angezogene Punkt auch für das neue Ellipsoid ein innerer sei, man also die Achsen wohl beliebig vergröſsern, aber nur so weit verkleinern darf, bis der Punkt auf die Oberfläche des neuen Ellipsoids fällt.

Es seien

$$\alpha', \beta', \gamma'$$

die Halbachsen des neuen Ellipsoids und die Verhältnisse:

$$\frac{\alpha}{\beta} = p, \quad \frac{\alpha}{\gamma} = q, \quad \frac{\alpha'}{\alpha} = \delta,$$

wo, innerhalb der eben angedeuteten Einschränkung, α', mithin auch δ beliebig gewählt werden dürfen: nehmen wir alsdann

$$(1') \qquad \frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\alpha}{\beta} = p, \quad \frac{\alpha'}{\gamma'} = \frac{\alpha}{\gamma} = q, \quad \left(\frac{\beta'}{\gamma'} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{q}{p}\right)$$

und folglich

$$(1'') \qquad \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\gamma'}{\gamma} = \delta$$

an und setzen noch zur Abkürzung die Ausdrücke in den Formeln (I)

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta \sin\theta \, d\theta \, d\varphi}{\cos^2\theta + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\sin^2\theta\cos^2\varphi + \frac{\alpha^2}{\gamma^2}\sin^2\theta\sin^2\varphi} &= L, \\ 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta \sin\theta \, d\theta \, d\varphi}{\frac{\beta^2}{\alpha^2}\cos^2\theta + \sin^2\theta\cos^2\varphi + \frac{\beta^2}{\gamma^2}\sin^2\theta\sin^2\varphi} &= M, \\ 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta \sin\theta \, d\theta \, d\varphi}{\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\cos^2\theta + \frac{\gamma^2}{\beta^2}\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi} &= N, \end{aligned} \right.$$

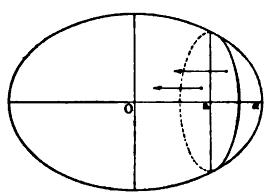
so bleiben, wie die (1″) zeigt, diese Gröſsen L, M, N (die natürlich selbst voneinander verschieden sind) unverändert, wenn man die Halbachsen α, β, γ sich so ändern läfst, dafs ihnen die neuen Halbachsen α', β', γ', was für Werte auch α' oder δ haben mögen, proportional sind. L, M, N sind also Funktionen von p und q und konstant, solange diese beiden Verhältnisse dieselben bleiben.

Es hängen demnach die Attraktionskomponenten, die man jetzt schreiben kann:

$$(\mathrm{I}_0) \qquad A = -aL, \quad B = -bM, \quad C = -cN,$$

auf die einfachste Weise von dem im Innern liegenden angezogenen Punkte ab, indem sie, wenn das Ellipsoid α, β, γ gegeben ist, also die Verhältnisse $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\alpha}{\gamma}$ feststehen, einfach den Koordinaten a, b, c des angezogenen Punktes beziehentlich proportional sind, während das transcendente Resultat sich allein auf die Konstanten L, M, N wirft.

Fig. 39.



Legt man daher eine das Ellipsoid durchschneidende Ebene senkrecht z. B. gegen die Achse α (Fig. 39), so werden alle dieser Ebene angehörigen Punkte, weil für sie a dasselbe ist, im Innern des Ellipsoids von diesem in der der Achse α parallelen Komponente gleich stark angezogen. Und in einer Parallelebene, für welche a das $m$fache ist, findet auch eine $m$mal so starke Anziehung statt.

Genau ebenso verhält es sich mit den beiden anderen Komponenten. Für die Totalanziehung $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ aber ist daraus durchaus kein Schlufs zu ziehen.

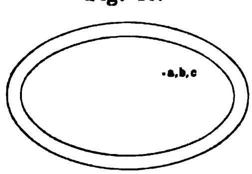
Das Ergebnis unserer Untersuchung läfst sich also in den Satz zusammenfassen: Jede der drei Attraktionskomponenten des Ellipsoids auf einen inneren Punkt ist nur von der ihr parallelen Koordinate dieses Punktes abhängig, und zwar ist sie, genauer, proportional der Entfernung des Mittelpunktes des Ellipsoids von derjenigen Ebene, die durch den angezogenen Punkt senkrecht gegen die der Komponente parallele Achse des Ellipsoids gelegt ist.

II. Eine andere Folgerung ist noch weit interessanter:

Bekanntlich werden Ellipsoide, deren Achsen dasselbe Verhältnis haben, ähnlich genannt. Es handelt sich also in den eben gewonnenen Resultaten um zwei ähnliche Ellipsoide, die zugleich konzentrisch und (wie wir selbstredend voraussetzen) ähnlich liegend sind, welch letzteres sich darauf bezieht, dafs die drei entsprechenden Achsen sich in denselben Richtungen befinden, während doch das eine Ellipsoid auch in einer anderen Lage gedacht werden könnte.

Hat man also zwei solche Ellipsoide, so folgt aus dem Vorhergehenden, dafs jede der drei Attraktionskomponenten auf einen im Innern beider Ellipsoide gelegenen Punkt und mithin auch ihre Resultante für beide Ellipsoide ein und denselben Wert besitzt. Das gröfsere Ellipsoid bringt also nur dieselben Komponenten hervor wie das innere. Nun kann man aber die Anziehung des äufseren Ellipsoids als die Summe ansehen der Anziehung des inneren Ellipsoids plus der der ellipsoidischen Schale zwischen beiden Flächen. Demnach sind die Attraktionskomponenten der ellipsoidischen Schale auf einen aufserhalb derselben im inneren Raume liegenden Punkt sämtlich gleich Null. Also ist auch ihre Totalanziehung gleich Null.

Fig. 40.



Man hat mithin den Satz, der sich auch ziemlich leicht geometrisch beweisen läfst: Eine homogene ellipsoidische Schale, die von zwei konzentrischen, ähnlichen und ähnlich liegenden ellipsoidischen Flächen begrenzt wird, übt keinen anziehenden Einflufs aus auf einen im Innern befindlichen Punkt (Fig. 40).

Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung des analogen Newtonschen Satzes von der Kugelschale, den er als speciellen Fall ($\alpha = \beta = \gamma$, $\alpha' = \beta' = \gamma'$) in sich begreift.

III. Jetzt wollen wir nicht das Ellipsoid α, β, γ, sondern den in seinem Innern befindlichen angezogenen Punkt (a, b, c) sich ändern lassen, und zwar nehme er verschiedene Stellen auf ein und demselben Durchmesser, d. i. einer durch den Mittelpunkt des Ellipsoids gezogenen Geraden ein.

Die Richtung dieses Durchmessers ist natürlich gegeben. Sie sei bestimmt durch die drei Winkel

$$\lambda, \mu, \nu,$$

die er mit den drei Achsen α, β, γ macht. Es ist also

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1.$$

Der angezogene Punkt auf diesem Durchmesser befinde sich in der absolut zu nehmenden Entfernung

$$s$$

vom Mittelpunkt, so dafs seine drei auf die rechtwinkligen Achsen bezogenen Koordinaten sind:

$$a = s\cos\lambda, \quad b = s\cos\mu, \quad c = s\cos\nu.$$

Danach hat man aus den (I_0) für die drei Komponenten der Attraktion, welche das Ellipsoid auf ihn ausübt:

$$(2) \quad A = -Ls\cos\lambda, \quad B = -Ms\cos\mu, \quad C = -Ns\cos\nu,$$

wo L, M, N dieselben Werte repräsentieren wie in den Formeln (1) und, da das Ellipsoid nicht variiert, konstant sind.

Aus den Werten (2) läfst sich nun nach den bekannten Regeln die stets absolut zu nehmende Resultante

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

der Gröfse und Richtung nach ermitteln.

Für ihre Gröfse erhält man, wenn noch zur Abkürzung

$$\left|\sqrt{L^2\cos^2\lambda + M^2\cos^2\mu + N^2\cos^2\nu}\right| = R_0$$

gesetzt wird:

$$(3) \qquad R = s\,R_0.$$

Ihre Richtung aber wird durch die drei Winkel bestimmt, die sie mit den drei Achsen in ihren als positiv angenommenen Richtungen macht. Nennen wir diese Winkel

$$\lambda', \mu', \nu',$$

so sind die Komponenten von R

$$A = sR_0\cos\lambda', \quad B = sR_0\cos\mu', \quad C = sR_0\cos\nu'.$$

Aus der Vergleichung dieser Ausdrücke mit den Ausdrücken (2) finden sich für die cosinus von λ', μ', ν' die Werte

$$(3') \quad \cos\lambda' = -\frac{L\cos\lambda}{R_0}, \quad \cos\mu' = -\frac{M\cos\mu}{R_0}, \quad \cos\nu' = -\frac{N\cos\nu}{R_0},$$

durch welche die Gröfse der Winkel und mithin auch die Richtung der Resultante eindeutig bestimmt ist.

Aus diesen Resultaten ergibt sich zweierlei:

1) Da die Wurzelgröſse R_0 konstant ist, so zeigt die (3), daſs für auf demselben Durchmesser liegende angezogene Punkte die Resultante ihrer Entfernung vom Mittelpunkte des Ellipsoids proportional ist.

Dies ist bei der Kugel (für einen Punkt im Innern) auch der Fall. Zugleich ist daselbst, wie schon aus der allseitigen Symmetrie folgt, aber gleich noch besonders bewiesen werden wird, die Attraktion immer nach dem Mittelpunkt hin gerichtet.

2) Für das dreiachsige Ellipsoid hingegen ist diese Resultante im allgemeinen nicht nach dem Mittelpunkt gerichtet, denn dazu müſsten offenbar die Winkel λ' und λ, μ' und μ, ν' und ν einzeln supplementär, ihre cosinus mithin gleich und entgegengesetzt, also

$$\cos\lambda' = -\cos\lambda, \quad \cos\mu' = -\cos\mu, \quad \cos\nu' = -\cos\nu$$

sein, und daraus würde wegen der (3′) weiter folgen, daſs dann

$$R_0 = L = M = N$$

wäre, was, wie schon S. 319 f. hervorgehoben, keineswegs zutrifft und auch an sich evidenterweise im allgemeinen unmöglich ist.

In dem Falle einer Kugel aber, d. h. wenn man hat:

$$\alpha = \beta = \gamma = r,$$

wo r den Kugelradius bedeutet, werden thatsächlich die drei Gröſsen L, M, N einander gleich, und ist daher, wie eben gezeigt, die Totalanziehung nach dem Mittelpunkt gerichtet. Denn die Ausdrücke (1) enthalten alsdann augenscheinlich gar nicht r, die Nenner der drei Integralfunktionen reducieren sich sämtlich auf 1 und alle drei Ausdrücke gehen in denselben Wert über:

$$L = M = N = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta \, d\varphi.$$

Zugleich können wir nun hieraus, da sich die Integrationen dieses Doppelintegrals unmittelbar ausführen lassen, das für die Kugel gültige Resultat selbst herleiten. Durch die Integration nach φ verwandelt sich das Doppelintegral in

$$\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta,$$

worauf die zweite Integration vermittelst der Substitution $\cos\theta = x$

$$-\frac{\pi}{2}\int_1^0 x^2\,dx = \frac{\pi}{6}$$

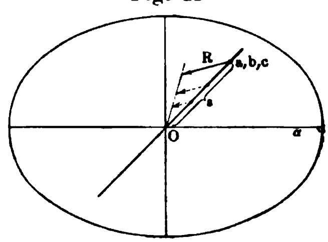
als seinen Wert ergibt.

Somit gewinnen wir, wegen der (I), für die Attraktionskomponenten der Kugel auf einen inneren Punkt (a, b, c) die einfachen Ausdrücke:

$$A = -\frac{4\pi}{3}a, \quad B = -\frac{4\pi}{3}b, \quad C = -\frac{4\pi}{3}c.$$

Sind also auch in dem dreiachsigen Ellipsoid die Resultanten im allgemeinen nicht nach dem Mittelpunkt gerichtet, so bilden sie doch, wie die Formeln (3′) zeigen, für alle Punkte auf ein und demselben Durchmesser dieselben konstanten Winkel λ', μ', ν' mit den drei Achsen, weil alle in jenen Formeln enthaltenen Gröfsen λ, μ, ν, L, M, N und R_0 selbst konstant sind. Hieraus folgt, dafs diese sämtlichen Resultanten untereinander parallel sind.

Fig. 41.



Wir haben mithin den Satz: Die Resultanten der Attraktion eines homogenen Ellipsoids auf innere Punkte, die auf demselben Durchmesser liegen, sind mit sich selbst parallel und der Entfernung des angezogenen Punktes vom Mittelpunkt des Ellipsoids proportional (Fig. 41).

IV. Wie aus den (1) hervorgeht, sind die Integrale L, M, N sämtlich wesentlich positiv, weil sie aus lauter positiven Elementen bestehen, indem aufser additiv quadratischen Gliedern und dem quadratischen Faktor $\cos^2\theta$ nur noch $\sin\theta$, der im ganzen ersten Quadranten ebenfalls positiv ist, in ihnen vorkommt. Daher sind die Komponenten (I_0) wirklich gleich den negativen entsprechenden Koordinaten des angezogenen Punktes, multipliciert mit positiven Faktoren. Und das ist auch ganz in der Ordnung. Denn solange z. B. a positiv ist, ist A negativ, ist aber auch offenbar die Anziehung nach dem auf α senkrechten Hauptschnitt des Ellipsoids gerichtet. Ebendahin ist sie aber offenbar immer gerichtet, auch wenn a negativ ist; es mufs also dann die Komponente A wirklich positiv sein, und das wird auch durch ihren Wert $-aL$ bestätigt.

Dies also sind die Haupteigenschaften der Attraktion eines homogenen Ellipsoids auf einen angezogenen Punkt in seinem Innern.

129. Beendigung der Aufgabe des § 127. — In dem am Schlufs des § 127 für A erhaltenen Doppelintegral (A_0) läfst sich noch, weil es rein rational ist, eine beliebige der beiden Integrationen vollziehen, und durch jede derselben wird es schliefslich elliptisch. Es ist ein merkwürdiges Versehen — denn etwas anderes kann es nicht sein —, wenn Lagrange in seiner Abhandlung über diesen Gegenstand in den Berliner Memoiren von 1773 sagt[79]), dafs nur die Integration nach θ möglich sei, nicht aber die nach φ, während doch gerade diese die allereinfachste von der Welt ist und daher auch im Folgenden durchgeführt werden soll.

Wir haben uns also mit dem Integral zu befassen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\frac{\cos^2\theta}{\alpha^2} + \frac{\sin^2\theta}{\beta^2}\cos^2\varphi + \frac{\sin^2\theta}{\gamma^2}\sin^2\varphi},$$

wo während der Integration θ als konstant anzusehen ist.

Man könnte nun hier bekanntlich beliebig entweder $\sin\varphi$ oder $\cos\varphi$ eliminieren und dann durch die Substitution $\cos\varphi = x$ z. B. die Funktion in eine algebraische umgestalten. Weit einfacher ist es aber, $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ beide bestehen zu lassen und aufserdem den Nenner so zu schreiben, dafs alle seine Glieder einen Faktor $\sin^2\varphi$ oder $\cos^2\varphi$ enthalten, also kein konstantes Glied vorkommt. Das erreicht man offenbar durch Multiplikation von $\frac{\cos^2\theta}{\alpha^2}$ mit $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$. Dadurch verwandelt sich unser Integral in

$$(1) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\left(\frac{\cos^2\theta}{\alpha^2} + \frac{\sin^2\theta}{\beta^2}\right)\cos^2\varphi + \left(\frac{\cos^2\theta}{\alpha^2} + \frac{\sin^2\theta}{\gamma^2}\right)\sin^2\varphi}$$

(wo beide Koeffizienten wesentlich positiv sind) und ist mithin jetzt von der Form:

$$\int \frac{d\varphi}{p\cos^2\varphi + q\sin^2\varphi} \quad \text{oder} \quad \int \frac{\dfrac{d\varphi}{p\cos^2\varphi}}{1+\left(\sqrt{\dfrac{q}{p}}\,\mathrm{tg}\,\varphi\right)^2} \quad (p, q > 0).$$

Wir setzen fest, dafs die Quadratwurzel $\sqrt{\frac{q}{p}}$ (die wir blofs einführen, weil sie uns nützlich ist) ebenso wie die übrigen Quadratwurzeln, die in der Entwicklung noch auftreten werden, absolut genommen werden sollen, obwohl man sie auch negativ voraussetzen könnte, da auch dann das Resultat dasselbe bliebe.

Nun ist $\frac{d\,\mathrm{tg}\,\varphi}{d\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi}$. Stände also im letzten Integral im Zähler noch der Faktor $\sqrt{qp}$, so wäre der ganze Zähler die Derivierte von $\sqrt{\frac{q}{p}}\,\mathrm{tg}\,\varphi$ im Nenner, und man käme durch die Substitution $\sqrt{\frac{q}{p}}\,\mathrm{tg}\,\varphi = x$ auf das bekannte Integral

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arc\,tg}\,x + C.$$

Verfahren wir dementsprechend, so ergibt sich auf der Stelle

$$(2) \qquad \int \frac{d\varphi}{p\cos^2\varphi + q\sin^2\varphi} = \frac{1}{\sqrt{pq}}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\cdot\mathrm{tg}\,\varphi\right) + C$$
$$(p, q > 0),$$

was auch algebraisch, aber durch langwierige Rechnungen hätte hergeleitet werden können.

Für $p, q < 0$ hätte man statt des arc tg einen Logarithmus erhalten.

Mithin ist

$$(2_0) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{p\cos^2\varphi + q\sin^2\varphi} = \frac{\pi}{2|\sqrt{pq}|} \qquad (p, q > 0),$$

wo aber jetzt $\sqrt{pq}$ nicht mehr ein beliebiges Vorzeichen hat, sondern absolut genommen werden mufs, denn das Resultat ist etwas ganz Bestimmtes und repräsentiert, wie auch aus der Beschaffenheit des Integrals sofort ersichtlich ist, einen wesentlich positiven Wert, den man aber auch erhalten hätte, wenn man während der Rechnung alle Wurzeln negativ angenommen hätte.

Wegen ihres häufigen Vorkommens thut man gut, die beiden Integrale (2) und (2_0) zu merken.

So gewinnt man denn nun unmittelbar durch Vergleichung der (2_0) mit der (1) und der (1) mit der (A_0) des § 127 (S. 316) für die Komponente A sowie vermöge ihrer vollkommenen Symmetrie auch für die beiden anderen Komponenten die Ausdrücke:

$$
(\mathrm{I}) \left\{
\begin{aligned}
A &= -\frac{4\pi}{\alpha^2}\cdot a \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta \sin\theta\, d\theta}{\left|\sqrt{\left(\frac{\cos^2\theta}{\alpha^2}+\frac{\sin^2\theta}{\beta^2}\right)\left(\frac{\cos^2\theta}{\alpha^2}+\frac{\sin^2\theta}{\gamma^2}\right)}\right|},\\
B &= -\frac{4\pi}{\beta^2}\cdot b \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta \sin\theta\, d\theta}{\left|\sqrt{\left(\frac{\cos^2\theta}{\beta^2}+\frac{\sin^2\theta}{\alpha^2}\right)\left(\frac{\cos^2\theta}{\beta^2}+\frac{\sin^2\theta}{\gamma^2}\right)}\right|},\\
C &= -\frac{4\pi}{\gamma^2}\cdot c \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta \sin\theta\, d\theta}{\left|\sqrt{\left(\frac{\cos^2\theta}{\gamma^2}+\frac{\sin^2\theta}{\alpha^2}\right)\left(\frac{\cos^2\theta}{\gamma^2}+\frac{\sin^2\theta}{\beta^2}\right)}\right|}.
\end{aligned}
\right.
$$

Diese Integrale entbehren zwar noch der elliptischen Form, können aber sogleich auf dieselbe gebracht werden, wenn man $\cos\theta = x$ setzt. Denn dann werden die Zähler $x^2 dx$, während in den Nennern jeder der beiden binomischen Faktoren nur die 0^{te} und 2^{te} Potenz von x enthält, so daſs man entweder sofort die kanonischen Formen erhält oder doch leicht vermittelst ähnlicher Substitutionen, wie sie oben in § 116 in Anwendung gekommen und bei den Verwandlungen elliptischer Integrale gewöhnlich sind, zu ihnen gelangt. Zur kanonischen Form gehört aber auch, was nicht auſser acht gelassen werden darf, daſs in beiden binomischen Faktoren unter der Wurzel der Subtrahend auch wirklich subtraktiv sei.

Wir führen diese Reduktionen nicht durch, werden aber unsere Integrale weiter unten (§ 134, S. 346) den Normalformen noch einen Schritt näher bringen.

Somit wäre für einen inneren Punkt das Problem gelöst.

130. Schlufsbemerkung. — 1. In dem Resultat des vorigen Paragraphen sind natürlich auch die speciellen Fälle der Umdrehungsellipsoide ($\beta = \alpha$ oder $\gamma = \beta$) und der Kugel ($\alpha = \beta = \gamma$) enthalten.

In allen diesen Fällen vereinfachen sich die elliptischen Integrale zu endlichen, d. i. integrablen Ausdrücken.

Den Fall der Kugel haben wir bereits in § 128, III. behandelt.

Für die Umdrehungsellipsoide beschränken wir uns auf die folgenden Andeutungen.

Ist

$$\beta = \alpha,$$

so erhält man für die Komponente A:

$$A = -\frac{4\pi}{\alpha} \cdot a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta \sin\theta \, d\theta}{\left|\sqrt{\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right)\cos^2\theta + \frac{1}{\gamma^2}}\right|}.$$

Ist

$$\gamma = \beta,$$

so ergibt sich sofort

$$A = -\frac{4\pi}{\alpha^2} \cdot a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta \sin\theta \, d\theta}{\frac{\cos^2\theta}{\alpha^2} + \frac{\sin^2\theta}{\beta^2}}.$$

Diese Ausdrücke können nun, nachdem man wieder $\cos\theta = x$ gesetzt, durch die bekannten Manipulationen weiter ausgewertet werden, und es sind gute Übungen, die Rechnungen ganz durchzuführen.

2. Die Ausdrücke (I) des vorigen Paragraphen zeigen, dafs für den inneren Punkt die drei Komponenten die einfachsten von der Welt sind, indem ihre transcendenten Teile als Integrale zwischen ein für allemal festen Grenzen konstant, d. h. von der Lage des angezogenen Punktes unabhängig sind.

Für den äufseren Punkt, an dessen Betrachtung wir jetzt herangehen, und für den Schwierigkeiten ganz anderer Art erstehen, sind diese Komponenten keineswegs so einfach. Es sind hier die Integrale abhängig von der Lage des angezogenen Punktes, welche in diese elliptischen Transcendenten mit verwebt wird, indem sie in die Grenzen der Integrale eingeht.

Drittes Kapitel.

Attraktion der homogenen Ellipsoide auf einen äufseren Punkt.

131. Vorbemerkung. — Nach Lagranges Arbeit über einen inneren Punkt, die wir jetzt im wesentlichen kennen gelernt haben, war die Behandlung eines äufseren Punktes noch mit ungeheueren Schwierigkeiten verbunden, und die Lösung sollte, wie es lange Zeit schien, unerschlossen bleiben. Erst zu Anfang dieses Jahrhunderts wurde das Problem in hohem Grade durch Ivory simplificiert, indem er es zurückführte auf das Problem für den inneren Punkt, und da, wie wir gesehen haben, dieses gelöst werden kann, so war nunmehr auch der Lösung jenes der Weg gewiesen.

Als diese Reduktion erst einmal geschehen war, da sah man, wie einfach und natürlich dieselbe ist, was aber nicht etwa sagen soll, dafs es leicht gewesen wäre, sie zu finden. Noch erhöht wird das Interesse des Ivoryschen Satzes dadurch, dafs die Reduktion ganz allgemein für jedes Attraktionsgesetz $\varphi(r)$ stattfindet. Da aber in dieser Allgemeinheit für einen inneren Punkt das Problem nicht ausführbar ist, sondern nur für das Newtonsche Gravitationsgesetz und in einigen anderen Fällen, so versteht es sich, dafs dies *a fortiori* auch vom äufseren Punkte gilt.

Wir haben zunächst folgenden Satz vorauszuschicken.

132. Lehrsatz. — Wenn anders die Funktion $\varphi(r)$, welche das Gesetz der Anziehung ausdrückt, unbestimmt integrabel ist, oder wenn man wenigstens setzt, ihr Integral sei bekannt, so ist von den drei Integrationen, durch welche ganz im allgemeinen die Komponenten der Anziehung eines beliebigen homogenen Körpers auf einen beliebig gelegenen materiellen Punkt gefunden werden, eine stets ausführbar.

Beweis. — Nach § 125, (I) hat man für die fraglichen Komponenten die Ausdrücke:

$$A = \int \varphi(r) \cdot \cos\lambda \cdot dv,$$
$$B = \int \varphi(r) \cdot \cos\mu \cdot dv,$$
$$C = \int \varphi(r) \cdot \cos\nu \cdot dv.$$

Wir führen rechtwinklige Koordinaten ein mit beliebigem und festbleibendem Anfangspunkte und betrachten die Anziehung des bei (x, y, z) gelegenen Massenelementes des anziehenden Körpers auf einen irgendwo in der Entfernung r befindlichen materiellen Punkt (a, b, c). Dann hat man

(1) $$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2,$$

und für die Winkel λ, μ, ν, welche die Elementaranziehung, also r, mit den positiven Achsenrichtungen macht,

$$\cos\lambda = \frac{x-a}{r}, \quad \cos\mu = \frac{y-b}{r}, \quad \cos\nu = \frac{z-c}{r}.$$

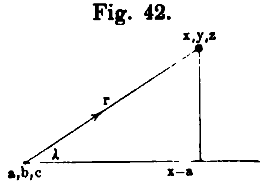
Was $\varphi(r)$ betrifft, das der (1) zufolge mittelbar eine Funktion von x, y, z ist, so kennt man nach der Voraussetzung ihr unbestimmtes Integral in Bezug auf die dabei als eine Gröfse, als Argument anzusehende Variable r, kann also z. B.

$$\int \varphi(r) \cdot dr = f(r) + C$$

setzen, wobei die willkürliche Konstante C, weil man doch gleich zu dem bestimmten Integral übergehen mufs, gleichgültig ist. Mithin ist

$$\varphi(r) = \frac{df(r)}{dr}.$$

Fig. 42.



Diese Werte, sowie noch

$$dv = dx\,dy\,dz,$$

sind in die obigen Ausdrücke für die Komponenten einzusetzen; doch beschränken wir uns wegen ihrer vollkommenen Symmetrie wiederum auf die Betrachtung von A allein. Man erhält demnach

$$A = \iiint \frac{df(r)}{dr} \cdot \frac{x-a}{r} \cdot dx\,dy\,dz.$$

Hier (also für die Komponente A, Fig. 42) läfst sich nun von den drei Integrationen die nach x ausführen. Denn da währenddes die beiden anderen Variablen y, z als konstant anzusehen sind und aus der (1) sich ergibt, dafs alsdann

$$\frac{x-a}{r} = \frac{\partial r}{\partial x},$$

d. h. die partielle Derivierte von r nach x ist, so folgt:

$$\frac{df(r)}{dr} \cdot \frac{x-a}{r} = \frac{df(r)}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial f(r)}{\partial x};$$

mit anderen Worten: die nach x zu integrierende Funktion ist die partielle Derivierte von $f(r)$ nach x. Danach hat man

$$(2) \qquad A = \iint dy\, dz \cdot \int \frac{\partial f(r)}{\partial x}\, dx = \iint dy\, dz\, (f(r) + C),$$

wo selbstverständlich das Integral von $\varphi(r)$ nach r, d. i. eben $f(r) + C$, noch nicht zwischen bestimmten Grenzen genommen ist.

Diese mufs man nun noch, je nach dem Umfange des anziehenden Körpers, einsetzen, und dazu wird es jetzt nötig, den Körper zu partikularisieren.

Unser Satz ist also allgemein bewiesen.

133. Aufgabe. — Die Attraktion eines (homogenen) Ellipsoids auf einen äufseren Punkt zurückzuführen auf die Attraktion eines Ellipsoids auf einen inneren Punkt. **(Ivorysches Theorem.)**

Auflösung. — Jetzt tritt also das Ellipsoid wieder in seine Rechte ein.

Seine sämtlichen Moleküle werden, auf rechtwinklige Koordinaten bezogen, durch die Ungleichheit bestimmt

$$(1) \qquad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} < 1.$$

Der Anfangspunkt der Koordinaten, im Mittelpunkte des Ellipsoids, wird hier nicht verlegt.

Zuvörderst kommt es darauf an, die im vorigen Paragraphen allgemein behandelte Aufgabe auf das Ellipsoid (1) anzuwenden, d. h. das dreifache Integral, durch welches seine Attraktionskomponente A angegeben wird, durch Ausführung der Integration nach x auf ein Doppelintegral zu reducieren. Dazu hat man nur, da ja die Funktion $f(r)$ von r als bekannt vorausgesetzt wird, die Grenzen des Integrals

$$(1_0) \qquad \int \frac{\partial f(r)}{\partial x}\, dx = f(r) + C$$

zu ermitteln. Dieselben werden durch die aus der (1) hergeleitete Ungleichheit

$$(1') \qquad x^2 < \alpha^2\left(1 - \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2}\right)$$

bestimmt, welche aber zugleich auch eine Bedingung involviert für die spätere Integration nach y und z in der (2) des § 132.

Denn da als Quadrat x^2 immer positiv ist, und α^2 natürlich auch, so muſs auch der andere Faktor $1 - \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2}$ in der (1') stets positiv, also

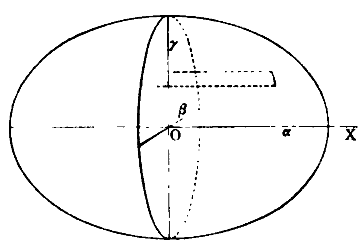
$$(1'') \qquad \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} < 1$$

sein. Dies ist auch geometrisch klar. Denn die in (1'') natürlich mit einbegriffene Gleichheit

$$\frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

ist die Gleichung des auf α senkrechten Hauptquerschnitts des Ellipsoids. Nun gibt aber offenbar das Integral $dy\,dz\int\frac{\partial f(r)}{\partial x}dx$ die Attraktion eines der Achse der x parallelen prismatischen Streifens von dem Querschnitt $dy\,dz$ (Fig. 43), woraus folgt, daſs, wenn die bei dieser Integration konstanten Werte von y und z so beschaffen sind, daſs sie die (1'') nicht erfüllen, vielmehr $\frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} > 1$ wäre, es dann gar keinen solchen zum Ellipsoid gehörigen Streifen gibt.

Fig. 43.



Setzen wir also zur Abkürzung

$$(2') \qquad \alpha\left|\sqrt{1 - \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2}}\right| = \varDelta,$$

so daſs dann die Grenzbedingung der Integration (1_0)

$$-\varDelta < x < \varDelta$$

ist, und bezeichnen wir ferner die Grenzen selbst durch

$$x_1 \quad \text{und} \quad x_2$$

und die ihnen zugehörigen Werte des Argumentes r der Funktion $f(r)$, die man erhält, wenn man x_1 bezw. x_2 in das stets positive

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

einsetzt, entsprechend durch

$$r_1 \quad \text{und} \quad r_2,$$

so hat man demnach

$$x_1 = -\Delta, \quad x_2 = \Delta,$$

und für das zwischen diesen Grenzen genommene bestimmte Integral von (1_0)

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{\partial f(r)}{\partial x}\, dx = f(r_2) - f(r_1),$$

und folglich gemäfs der (2) des § 132 für die Komponente A das Doppelintegral

$$(2) \qquad A = \iint \big(f(r_2) - f(r_1)\big)\, dy\, dz \qquad \left(\frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} < 1\right).$$

Somit wäre die im vorigen Paragraphen allgemein behandelte Aufgabe auf das Ellipsoid partikularisiert, d. h. eine Integration ist ausgeführt.

Dafs man nun noch weiter integrieren könnte, daran ist, selbst wenn f bekannt ist, gar nicht zu denken. Trotzdem haben wir durch diese einmalige Integration sehr viel gewonnen. Denn wie man sieht, hängt das Doppelintegral A von sechs Elementen ab:

$$\alpha, \beta, \gamma; \quad a, b, c;$$

durch seine jetzige Form wird es uns aber möglich sein, zu erkennen, dafs sich diese sechs Elemente sämtlich ändern lassen, ohne dafs das Integral selbst ein anderes wird. Dadurch erhält man dann notwendigerweise eine Relation zwischen den Komponenten zweier Ellipsoide für zwei angezogene Punkte — denn es wird sich hier alles ändern müssen —, und zwar wird sich herausstellen, dafs der eine angezogene Punkt innerhalb des ihn anziehenden Ellipsoids, der andere aufserhalb seines Ellipsoids liegt.

Dies ist der Grundgedanke des Ivoryschen Theorems.

Ehe wir aber denselben auszuführen suchen, müssen wir noch das Integral (2) von einem Übelstande befreien, der darin besteht, dafs es von zweien seiner Elemente, den Halbachsen β und γ, auf doppelte Weise abhängig ist, indem nicht nur der zu integrierende Ausdruck selbst eine Funktion von ihnen ist, sondern diese Elemente auch in die Grenzbedingung $(1'')$ der Integration eingehen. Von dieser letzteren Abhängigkeit wollen wir das

Integral losmachen, was man ganz einfach dadurch erreicht, dafs man statt y und z neue Variable einführt. Ivory benutzt dazu eben seine bekannte Transformation (S. 245; 249), die aber keineswegs einen integrierenden Teil seines Satzes bildet, vielmehr ganz willkürlich gewählt ist. Auch werden wir von ihr keinen Gebrauch machen, sondern bei den rechtwinkligen Koordinaten stehen bleiben.

Dazu wird es aber jetzt nötig sein, die Formeln *in extenso* hinzuschreiben, um sie besser übersehen und beherrschen zu können, und das ist eigentlich das einzige, was man in unserem Problem zu thun hat, um zu sehen, wie naturgemäfs weiter zu verfahren ist.

Dann hat man also:

$$(2_0)\quad \left\{\begin{aligned} A = \iint\Bigg(& f\left(\sqrt{(y-b)^2+(z-c)^2+\left(\alpha\sqrt{1-\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}}-a\right)^2}\right) \\ & -f\left(\sqrt{(y-b)^2+(z-c)^2+\left(\alpha\sqrt{1-\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}}+a\right)^2}\right)\Bigg)\,dy\,dz \\ & \left(\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}<1\right). \end{aligned}\right.$$

Nun ist offenbar, dafs aus der Grenzbedingung β und γ ganz herausfällt, wenn man, während z als konstant angesehen wird, ehe man nach y integriert,

$$(2_0') \qquad y = \beta t, \quad dy = \beta\, dt$$

substituiert und überall diese Werte einsetzt, und wenn man, nachdem dies geschehen, nunmehr y oder t als konstant ansieht und vor der Integration nach z

$$(2_0'') \qquad z = \gamma u, \quad dz = \gamma\, du$$

substituiert und diese Werte überall einsetzt. Wiewohl diese beiden Substitutionen eigentlich hintereinander vorzunehmen sind, so können wir doch gleich, da sie so leicht übersehbar sind, das Schlufsresultat hinschreiben:

$$(3)\quad A = \beta\gamma\iint\left\{\begin{aligned} & f\left(\sqrt{(\beta t-b)^2+(\gamma u-c)^2+\left(\alpha\sqrt{1-t^2-u^2}-a\right)^2}\right) \\ -& f\left(\sqrt{(\beta t-b)^2+(\gamma u-c)^2+\left(\alpha\sqrt{1-t^2-u^2}+a\right)^2}\right)\end{aligned}\right\}dt\,du$$

mit der Grenzbedingung

$$t^2 + u^2 < 1,$$

so dafs sich also jetzt das Doppelintegral über alle Punkte einer Kreisfläche vom Radius 1 erstreckt und β und γ in den Grenzen nicht mehr enthalten sind. Sind also auch diese Grenzen nicht konstant, sondern gegenseitig voneinander abhängig, so werden sie doch durch eine Ungleichheitsbedingung determiniert, die absoluter Art ist, d. h. in der zu t und u nicht noch andere Elemente der Aufgabe hinzukommen.

Eine einfache Betrachtung zeigt nun, dafs, wenn man in der (3) die Radikanden der beiden Quadratwurzeln, welche die Argumente von f bilden, in ihre einzelnen Glieder auflöst, man als Koeffizienten der verschiedenen algebraischen Gestalten, in denen die Variablen t und u dann einzeln oder gemeinsam erscheinen, sechs verschiedene Verbindungen der sechs Elemente

(3′) $$\alpha, \beta, \gamma; \quad a, b, c$$

erhält. Wäre es nun möglich, diese sechs Elemente sämtlich so zu ändern, dafs jene sechs Koeffizienten dennoch dieselben konstanten Werte behalten, so hätte man nach dieser Veränderung und trotz derselben noch dieselbe Funktion unter den Integralzeichen und, was die Hauptsache ist, sie noch zwischen denselben Grenzen zu integrieren. Man erhielte folglich genau dasselbe Integral, und die vorerwähnte Relation wäre analytisch gegeben.

Aber man scheint dazu allerdings nicht viel Hoffnung zu haben. Denn es sollen durch sechs Gröfsen sechs Bedingungsgleichungen erfüllt werden, und man sagt immer, n Gleichungen bestimmen n Gröfsen, welchem Satze zufolge es in unserem Falle nur ein System von sechs Werten gäbe, die jenen Bedingungen genügten, und das wären eben α, β, γ, a, b, c selbst, denn für diese sind sie augenscheinlich erfüllt; ein zweites System, nach dem wir doch gerade trachten, gäbe es aber nicht. Dem ist jedoch nicht so: jener Satz will nur besagen, dafs n Gleichungen nicht eine unendliche Anzahl von Wertsystemen von n Gröfsen zulassen, durch welche sie befriedigt werden könnten; wohl aber ist eine endliche Anzahl solcher Wertsysteme möglich, wie ja schon eine quadratische Gleichung zwei Werte für die Unbekannte ergibt. Und so auch in unserem Falle.

Wir lösen also jene Wurzeln r_2 und r_1 [d. s. die Argumente der beiden f in der (3)] nach den variablen Gröfsen t und u auf. Das gibt, mit Zugehörigkeit der Vorzeichen im vierten Gliede:

$$(4)\quad \begin{matrix} r_2 \\ r_1 \end{matrix}\Big\} = \sqrt{\left\{\begin{matrix}(a^2+b^2+c^2-\alpha^2)-2b\beta t-2c\gamma u\mp 2a\alpha\sqrt{1-t^2-u^2} \\ +\,(\beta^2-\alpha^2)t^2+(\gamma^2-\alpha^2)u^2\end{matrix}\right\}};$$

beide Radikanden unterscheiden sich also, wie man sieht, nur durch das Vorzeichen eines Gliedes voneinander. Nehmen wir nun an, wir hätten ein zweites Ellipsoid, ein von dem Ellipsoid α, β, γ verschiedenes (natürlich aber mit ihm konzentrisch und ähnlich liegend), in Bezug auf welches wir alles — denn auch der angezogene Punkt ist ein anderer — mit accentuierten Buchstaben bezeichnen wollen:

$$(4')\qquad \alpha', \beta', \gamma';\quad a', b', c';\quad A', B', C',$$

und nehmen wir ferner an, dafs die aus diesen neuen Bestimmungsstücken gebildeten sechs Koeffizienten identisch würden den korrespondierenden Koeffizienten in der (4), deren Zusammensetzung wir jetzt vor Augen haben, so würde, wie schon bemerkt, für beide Systeme (3′) und (4′) das Doppelintegral in der (3) offenbar völlig ungeändert bleiben. Und daraus ergäbe sich unmittelbar, dafs alsdann die entsprechenden Attraktionskomponenten A, A' einfach einander proportional wären. Denn wird zur Abkürzung jenes Integral durch U bezeichnet, so hätte man nicht nur $A = \beta\gamma U$, sondern ebenso auch $A' = \beta'\gamma' U$, und mithin die Proportion

$$(4_0)\qquad \frac{A}{\beta\gamma} = \frac{A'}{\beta'\gamma'},$$

wobei aber die Lage der Ellipsoide und der angezogenen Punkte noch ganz allgemein gehalten, d. h. keinen Beschränkungen unterworfen ist.

Um also dies Ergebnis zu erzielen, wären folgende sechs Gleichungen zu erfüllen:

$$(r)\left\{\begin{array}{lrcl}
(r_1) & a'^2+b'^2+c'^2+\alpha'^2 &=& a^2+b^2+c^2+\alpha^2,\\
(r_2) & a'\alpha' &=& a\alpha,\\
(r_3) & b'\beta' &=& b\beta,\\
(r_4) & c'\gamma' &=& c\gamma,\\
(r_5) & \beta'^2-\alpha'^2 &=& \beta^2-\alpha^2,\\
(r_6) & \gamma'^2-\alpha'^2 &=& \gamma^2-\alpha^2,
\end{array}\right.$$

in denen die sechs accentuierten Buchstaben als die Unbekannten, die sechs anderen als bekannt angesehen werden. Natürlich müssen die Unbekannten, zum Teil wenigstens, von den entsprechenden gegebenen Gröfsen verschiedene Werte aufweisen, weil es sonst reine Tautologie wäre. Hingegen leuchtet ein, dafs, wenn dieses System auch nur eine Auflösung zuläfst, dieselbe gleich für beide Wurzeln r_1 und r_2 ausreicht, weil ja deren Verschiedenheit nicht in den Werten der Koeffizienten selbst liegt, sondern nur in dem Vorzeichen des vierten Gliedes, dessen Koeffizient $2a\alpha$ ist; ist aber $a'\alpha' = a\alpha$, so ist auch $-a'\alpha' = -a\alpha$. Ferner müssen natürlich alle sechs Unbekannte durchaus reell, ihre Quadrate also durchaus positiv, und aufserdem auch noch α', β', γ' selbst wesentlich positiv sein. — Dafs auch α, β, γ diese selbstverständliche Forderung erfüllen, ist leicht einzusehen. Denn α mufste wegen der (2′) schon von vornherein in der (2_0) positiv sein; und was β und γ (nicht β^2 und γ^2) anbetrifft, so sind sie erst durch die beiden Substitutionen $(2_0')$, $(2_0'')$ in den Ausdruck (3) hineingebracht, und da die Differentiale eines Doppelintegrals, $dx\,dy$, also auch $dt\,du$, nicht nur als Produkt, sondern auch jeder Faktor einzeln immer absolut zu nehmen sind, so müssen wegen $dx = \beta\, dt$ und $dz = \gamma\, du$ auch die Faktoren β und γ positiv sein.

Zunächst untersuchen wir, ob die Gleichungen des Systems (r) symmetrisch sind nach den drei Richtungen, d. h. ob in ihnen a, b, c und zugehörig α, β, γ (und gleichzeitig die entsprechenden accentuierten Elemente) miteinander permutiert werden können oder nicht.

Bei den Gleichungen (r_2), (r_3), (r_4) ist dies offenbar der Fall. Denn wenn man hier z. B. a mit b, α mit β und ebenso die zugehörigen accentuierten Buchstaben vertauscht, so erhält man:

$$(r') \qquad b'\beta' = b\beta, \quad a'\alpha' = a\alpha, \quad c'\gamma' = c\gamma,$$

also wieder genau dieselben Gleichungen.

Die übrigen drei Gleichungen hingegen, (r_1), (r_5), (r_6), entbehren scheinbar dieser Symmetrie. Denn führen wir in ihnen dieselbe Vertauschung wieder aus, so kommt:

$$(r_1') \qquad b'^2 + a'^2 + c'^2 + \beta'^2 = b^2 + a^2 + c^2 + \beta^2,$$
$$(r_5') \qquad \alpha'^2 - \beta'^2 = \alpha^2 - \beta^2,$$
$$(r_6') \qquad \gamma'^2 - \beta'^2 = \gamma^2 - \beta^2,$$

und diese Gleichungen sind mit Ausnahme der mittleren, welche offenbar mit der (r_5) übereinstimmt, wesentlich verschieden von den entsprechenden Gleichungen des Systems (r). Also individuell sind diese drei Gleichungen in der That nicht symmetrisch nach den drei Richtungen, wohl aber sind sie es als ein System. Denn man erhält (r_1'), (r_5'), (r_6') als notwendige Folge aus den korrespondierenden Gleichungen (r): (r_1') durch Addition von (r_1) und (r_5), (r_5') durch Multiplikation von (r_5) mit -1, (r_6') durch Subtraktion der (r_5) von (r_6).

Somit gelangt man durch diese Permutationen teils wieder zu genau denselben Gleichungen, teils zu solchen, die aus jenen direkt abgeleitet werden können.

Gleiches gilt natürlich auch für die Vertauschung von a mit c, α mit γ, a' mit c', α' mit γ'. Gibt[80]) es also überhaupt Werte für α', β', γ', a', b', c' (was aber noch nicht bewiesen ist), durch welche das System (r) befriedigt werden kann, so werden durch dieselben Werte auch die beiden anderen Systeme erfüllt, welche aus jenen Vertauschungen hervorgehen, und deren eines das System (r') ist.

Nun wissen wir aber (s. S. 308), dafs man durch genau dieselben Vertauschungen von a und α mit b und β, bezw. mit c und γ aus der Attraktionskomponente A des Ellipsoids α, β, γ unmittelbar seine Komponenten nach den beiden anderen Richtungen erhält. Für die Komponente A ergibt sich aber, wie wir gesehen haben, aus den sechs Gleichungen (r) unter Voraussetzung ihrer Erfüllbarkeit die Relation $\frac{A}{\beta\gamma} = \frac{A'}{\beta'\gamma'}$. Und da wegen der dem System (r) innewohnenden gleichgearteten Symmetrie die Integrale, welche für die Komponenten B und C an die Stelle von (3) treten, für beide Ellipsoide identisch bleiben würden, weil dies mit jenen sechs Koeffizienten in der (4) der Fall wäre, so mufs es auch für diese beiden Komponenten entsprechende Relationen geben, indem folgt, dafs die eine bereits erwiesene Relation nach den drei Richtungen permutabel ist, also gleichzeitig die drei Proportionen statthaben:

$$\text{(I)} \qquad \frac{A}{\beta\gamma} = \frac{A'}{\beta'\gamma'}, \quad \frac{B}{\alpha\gamma} = \frac{B'}{\alpha'\gamma'}, \quad \frac{C}{\alpha\beta} = \frac{C'}{\alpha'\beta'}.$$

Wie wir nämlich — um dies noch deutlicher zu machen — oben $\frac{A}{\beta\gamma} = U$ hatten, wo durch U das Integral in (3) bezeichnet wurde, so wird man wegen der Symmetrie der Komponenten z. B. auch $\frac{B}{\alpha\gamma} = V$ haben, wo V das Doppelintegral ist, welches man aus U durch die Vertauschung von a mit b und α mit β

erhält. Nun folgt aber aus unseren Betrachtungen über die sechs Bedingungsgleichungen (r) und ihre Permutabilität, dafs man, falls sie erfüllt werden, was eigentlich nur die Relation $\frac{A}{\beta\gamma} = \frac{A'}{\beta'\gamma'}$ zur Folge hat, bei obiger Vertauschung auch $\frac{B'}{\alpha'\gamma'} = V$ erhält, weil ja die Gleichungen (r'), welche durch jene Vertauschung aus den Gleichungen (r) hervorgehen, auch ohne dieselbe notwendige Folgerungen des Systems (r) selbst sind.

Dafs man so also gleich die Resultate der Reduktion für alle drei Komponenten erhält, ist der Hauptvorteil von der den sechs Bedingungsgleichungen innewohnenden Symmetrie. An sich ist dieses aber nichts Wesentliches, denn ebensogut könnte man auch für die beiden anderen Komponenten dieselben Rechnungen wie für A direkt ausführen.

Vermöge der Gleichungen (I) ist natürlich auch gleichzeitig die Totalanziehung des einen Ellipsoids auf den Punkt (a, b, c) zurückgeführt auf die des anderen Ellipsoids auf den Punkt (a', b', c').

Da es nun dieselben Systeme von sechs Bedingungsgleichungen (r_1) bis (r_6) für alle drei Richtungen gibt, so können wir (was sonst nicht statthaft wäre) der gröfseren Deutlichkeit halber voraussetzen, dafs eine gewisse Rangordnung zwischen den drei Achsen (nunmehr in beiden Ellipsoiden) stattfinde, dafs also z. B.

$$\alpha < \beta < \gamma, \quad \alpha' < \beta' < \gamma'$$

sei, wobei natürlich für specielle Fälle die Gleichheit nicht ausgeschlossen ist.

Dann sind also die in den Gleichungen (r_5) und (r_6) auftretenden Differenzen sämtlich positiv. Zur Abkürzung bezeichnen wir sie durch k^2 bezw. l^2, so dafs man hat:

$$(5') \qquad \begin{cases} \beta'^2 - \alpha'^2 = \beta^2 - \alpha^2 = k^2, \\ \gamma'^2 - \alpha'^2 = \gamma^2 - \alpha^2 = l^2 \end{cases}$$

und ersichtlicherweise

$$k^2 < l^2$$

ist.

Nun haben wir noch zu sehen, ob man den Gleichungen (r_1) bis (r_6) wirklich genügen kann durch gehörige Werte. Das erweist einfache algebraische Betrachtung. Man kann nämlich leicht eine Unbekannte, z. B. α'^2 (eine Achse ist es immer), in einer Gleichung allein erhalten, und um die Diskussion dieser Gleichung handelt es sich eigentlich allein. Denn hat man erst einen geeigneten Wert für α' gefunden, so liefern die anderen Gleichungen des Systems, wie man leicht sieht, die anderen Unbekannten hinzu: zunächst die (r_5) und (r_6) [oder die (5′)] die beiden anderen Achsen β' und γ', und darauf die (r_2) bis (r_4) die drei Koordinaten a', b', c'.

Die Gleichung, die nur die Unbekannte α' enthält, ergibt sich wie folgt:

Aus (r_2), (r_3), (r_4) hat man

$$a'^2 = \frac{a^2\alpha^2}{\alpha'^2}, \quad b'^2 = \frac{b^2\beta^2}{\beta'^2}, \quad c'^2 = \frac{c^2\gamma^2}{\gamma'^2},$$

und setzt man diese Werte in (r_1) ein, so findet sich

$$\frac{a^2}{\alpha'^2}(\alpha^2 - \alpha'^2) + \frac{b^2}{\beta'^2}(\beta^2 - \beta'^2) + \frac{c^2}{\gamma'^2}(\gamma^2 - \gamma'^2) - (\alpha^2 - \alpha'^2) = 0$$

oder vielmehr, weil wegen (r_5) und (r_6)

$$\alpha^2 - \alpha'^2 = \beta^2 - \beta'^2 = \gamma^2 - \gamma'^2,$$

$$\left(\frac{a^2}{\alpha'^2} + \frac{b^2}{\beta'^2} + \frac{c^2}{\gamma'^2} - 1\right)(\alpha^2 - \alpha'^2) = 0. \tag{5}$$

Dieser Gleichung, welche noch alle drei Achsen als Unbekannte enthält, wird genügt, wenn der eine oder der andere der beiden Faktoren auf ihrer linken Seite zu Null wird. Aus $\alpha^2 - \alpha'^2 = 0$ erhält man aber

$$\alpha = \alpha',$$

und obschon einige unserer sechs Elemente auch gleich sein könnten, wofern nur die übrigen differierten, so zeigt doch ein Blick auf das System (r), dafs $\alpha' = \alpha$ die reinen Identitäten nach sich zieht:

$$\beta' = \beta,\ \gamma' = \gamma,\ a' = a,\ b' = b,\ c' = c.$$

Mithin ist diese Auflösung als eine sich von selbst verstehende zu verwerfen.

Der (5) wird aber zweitens genügt, wenn man ihren anderen Faktor, welcher wegen der (5′) gleich so geschrieben werden kann, dafs er nur noch die Unbekannte α' enthält, gleich Null setzt. Das gibt

$$\frac{a^2}{\alpha'^2} + \frac{b^2}{\alpha'^2 + k^2} + \frac{c^2}{\alpha'^2 + l^2} - 1 = 0. \tag{6}$$

Diese Gleichung, welche in Bezug auf α'^2 vom dritten Grade ist, ist also jetzt aufzulösen oder zu diskutieren, wozu wir sie aber in der vorstehenden zur Diskussion gerade sehr geeigneten Gestalt belassen.

Zur Abkürzung und der gröfseren Deutlichkeit halber setzen wir noch

$$\alpha'^2 = t$$

und darauf

$$\frac{a^2}{t} + \frac{b^2}{t+k^2} + \frac{c^2}{t+l^2} - 1 = T.$$

T ist also eine Funktion von t.

Wir behaupten nun, dafs unsere Gleichung, die jetzt einfach

$$T = 0$$

zu schreiben ist, immer drei reelle Wurzeln hat, und zwar eine positive und zwei negative. Sie gehört nämlich in die Klasse derjenigen Gleichungen, bei denen sofort zu erkennen ist, dafs sie lauter reelle Wurzeln haben, indem sich so viele Übergänge der Funktion (da wo sie stetig ist) vom Positiven ins Negative nachweisen lassen, als die Gleichung überhaupt vermöge ihres Grades Wurzeln besitzen kann, in unserem Falle also drei.

Zu diesem Nachweise fassen wir den Lauf der Funktion T für ein von $-\infty$ bis ∞ stetig wachsendes t näher ins Auge.

Zunächst ist klar, dafs T als algebraische Funktion nur unstetig sein kann, wenn sie unendlich grofs wird, also nur an den drei Stellen, wo je einer ihrer drei Nenner verschwindet, d. i. für

$$t = 0, \quad t = -k^2, \quad t = -l^2.$$

Innerhalb eines noch so grofsen Intervalles aber, in dem T keine Unterbrechung der Stetigkeit (durch den Übergang ins Unendliche) erleidet, nimmt sie mit wachsendem t offenbar beständig ab. Dies folgt schon daraus, dafs alle ihre Nenner (welche allein t enthalten) lineare Funktionen der Variablen sind, wird aber auch ganz handgreiflich durch die Derivierte von T

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{a^2}{t^2} - \frac{b^2}{(t+k^2)^2} - \frac{c^2}{(t+l^2)^2},$$

die stets negativ ist, dargethan. An den Unstetigkeitsstellen selbst hingegen springt T plötzlich vom negativ Unendlichen ins positiv Unendliche über [81]).

Die folgende kleine Tafel, in der die in Betracht zu ziehenden

Werte der Veränderlichen t und die zugehörigen Werte von T und aufserdem an den drei Unstetigkeitsstellen immer noch ein durch das unendlich kleine positive ε angedeuteter, unmittelbar vorhergehender und unmittelbar nachfolgender Wert verzeichnet sind, dient dazu, den Lauf unserer Funktion besser übersehen zu können.

Werte		Wege	
t	T	t	T
$-\infty$	-1		
		von $-\infty$ bis $-l^2$	von -1 bis $-\infty$
$-l^2$ $(\mp\varepsilon)$	$\mp\infty$		
		„ $-l^2$ „ $-k^2$	„ $+\infty$ „ $-\infty$
$-k^2$ $(\mp\varepsilon)$	$\mp\infty$		
		„ $-k^2$ „ 0	„ $+\infty$ „ $-\infty$
0 $(\mp\varepsilon)$	$\mp\infty$		
		„ 0 „ ∞	„ $+\infty$ „ -1 .
∞	-1		

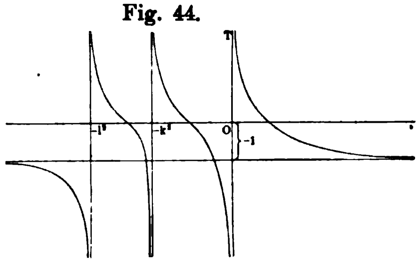
Durch Fig. 44 wird ihr ganzer Verlauf noch unmittelbarer veranschaulicht.

Mithin geht die Funktion T durch Null:

zwischen $t = -l^2$ und $t = -k^2$ einmal und nur einmal,
„ $t = -k^2$ „ $t = 0$ „ „ „ „
„ $t = 0$ „ $t = \infty$ „ „ „ „

weil sie zwischen diesen Grenzen immer durchaus stetig und durchaus abnehmend ist. Ihre sämtlichen drei Wurzeln sind also reell, und zwar zwei negativ, eine positiv.

Fig. 44.



Uns interessiert nur die positive Wurzel: die negativen Wurzeln haben in unserem Problem keinen Sinn.

Die Aufgabe aber, die Wurzeln der Gleichung $T = 0$ zu finden, ist an und für sich eine allgemeinere. Denn wenn t irgend eine der drei Wurzeln dieser Gleichung ist, so ist (a, b, c) ein Punkt, der in der Fläche zweiten Grades liegt:

$$\frac{x^2}{t} + \frac{y^2}{t + k^2} + \frac{z^2}{t + l^2} = 1,$$

welche ein **Ellipsoid** ausdrückt, wenn t positiv ist, ein **Hyperboloid der ersten Gattung** oder **einteiliges Hyperboloid**, wenn t zwischen 0 und $-k^2$ liegt, also nur das erste Glied links negativ ist, hingegen ein **zweiteiliges Hyperboloid** (oder der **zweiten Gattung**), wenn t zwischen $-k^2$ und $-l^2$ liegt, also die beiden ersten Glieder links negativ sind. Außerdem ist diese Fläche zweiten Grades der gegebenen, mit ihr konzentrischen und ähnlich liegenden Fläche zweiten Grades, hier also dem Ellipsoid

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1 \quad \text{oder} \quad \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\alpha^2+k^2}+\frac{z^2}{\alpha^2+l^2}=1,$$

konfokal, worunter man versteht, daß in beiden die Differenz zwischen den Quadraten der entsprechenden Halbachsen dieselbe ist (nämlich $=k^2$ zwischen der zweiten und ersten, $=l^2$ zwischen der dritten und ersten Halbachse), was, wie man sich leicht überzeugt, der Fall ist, **wenn die drei Hauptschnitte der beiden (konzentrischen und ähnlich liegenden) Körper dieselben Brennpunkte haben (Konfokalismus).**

Die allgemeine Diskussion der Gleichung $T=0$ fällt also mit der geometrischen Aufgabe zusammen: **durch einen gegebenen Punkt (a, b, c) im Raume Flächen zweiter Ordnung zu legen, die mit einer gegebenen Fläche dieser Ordnung konfokal (und konzentrisch und ähnlich liegend) sind.**

Nach dem Obigen lassen sich immer drei solcher Flächen finden: ein Ellipsoid und zwei Hyperboloide der verschiedenen Gattungen. Und in der That gibt es nur diese drei konfokalen Flächen durch **einen** Punkt.

Uns kommt es hingegen nur darauf an, **durch den Punkt (a, b, c) das einzige mögliche konfokale Ellipsoid zu legen**, und wir sind es im stande, wenn wir aus unserer Gleichung das t, welches positiv ist, entnehmen, es gleich α'^2 setzen und das positive α' oder $|\sqrt{t}|$ zur kleinsten Halbachse des Ellipsoids wählen. Seine beiden anderen Halbachsen sind dann

$$(6') \qquad \begin{cases} \beta' = \sqrt{\alpha'^2+k^2} = \sqrt{\alpha'^2+\beta^2-\alpha^2}, \\ \gamma' = \sqrt{\alpha'^2+l^2} = \sqrt{\alpha'^2+\gamma^2-\alpha^2}, \end{cases}$$

und hat man dies gefunden, so liefern (r_2) bis (r_4) für die Koordinaten des von ihm angezogenen Punktes die Werte hinzu:

$$(6'') \qquad a' = \frac{a\alpha}{\alpha'}, \quad b' = \frac{b\beta}{\beta'}, \quad c' = \frac{c\gamma}{\gamma'}.$$

Nun ist leicht zu sehen, daſs, wenn in Bezug auf das ursprüngliche Ellipsoid α, β, γ der angezogene Punkt (a, b, c) ein **äuſserer** war, für das eben gefundene zugehörige konfokale Ellipsoid α', β', γ' der angezogene Punkt (a', b', c') ein **innerer** ist.

Denn da in den Gleichungen (r) in Bezug auf die gestrichenen und die nicht gestrichenen Buchstaben alles symmetrisch ist, so enthalten sie offenbar wie die Relation

$$\frac{a^2}{\alpha'^2} + \frac{b^2}{\beta'^2} + \frac{c^2}{\gamma'^2} = 1,$$

so auch als Folge dieser Symmetrie die **reciproke** Relation

$$\frac{a'^2}{\alpha^2} + \frac{b'^2}{\beta^2} + \frac{c'^2}{\gamma^2} = 1$$

in sich, und diese besagt, daſs **der von dem neuen konfokalen Ellipsoid** α', β', γ' **angezogene bestimmte Punkt** (a', b', c') ebenfalls reciprok — so macht es sich von selbst — **auf der Oberfläche des gegebenen Ellipsoids** α, β, γ **liegt.** Nun soll, wie vorausgesetzt ist, der von diesem angezogene Punkt (a, b, c) auſserhalb desselben liegen oder

$$(7) \qquad \frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} + \frac{c^2}{\gamma^2} > 1$$

sein; durch diesen Punkt geht aber das neue Ellipsoid α', β', γ', dessen Achsen sämtlich, wie aus der Vergleichung der (7) mit unserer kubischen Gleichung (6) oder auch

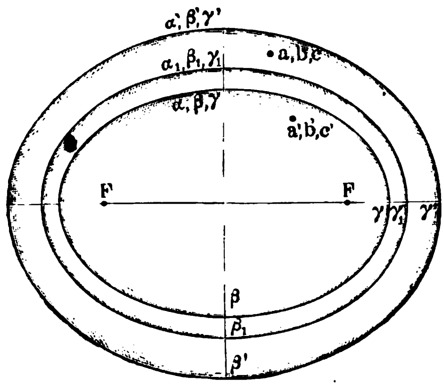
$$(6_0) \qquad \frac{a^2}{\alpha'^2} + \frac{b^2}{\alpha'^2 + \beta^2 - \alpha^2} + \frac{c^2}{\alpha'^2 + \gamma^2 - \alpha^2} = 1$$

unmittelbar folgt, gröſser sind als die entsprechenden Achsen des Ellipsoids α, β, γ, und das daher natürlich dieses mit ihm konzentrische und ähnlich liegende Ellipsoid gänzlich umschlieſsen muſs. Also liegt jeder Punkt der Oberfläche des gegebenen Ellipsoids, mithin auch der auf ihr befindliche Punkt (a', b', c') im Innern des neuen Ellipsoids α', β', γ'. Fig. 45 [82]) (a. f. S.) bringt diese Beziehungen zwischen den beiden Ellipsoiden und den von ihnen angezogenen Punkten zur unmittelbaren Anschauung.

Somit sind also vermöge der Gleichungen (I) die gesuchten Attraktionskomponenten A, B, C **des gegebenen**

Ellipsoids α, β, γ auf den äufseren Punkt (a, b, c) zurückgeführt auf die Attraktionskomponenten A', B', C' des neuen bestimmten Ellipsoids α', β', γ' auf den in seinem Innern gelegenen Punkt (a', b', c'). Und das war unsere Absicht.

Fig. 45.



Natürlich könnte man auch, was uns aber hier nichts angeht, wegen der Reciprocität in unseren Resultaten die Attraktion auf einen inneren Punkt reducieren auf die Attraktion auf einen äufseren Punkt. Es wäre dazu nur nötig, alles umzukehren und vorauszusetzen, dafs (a, b, c) im Innern des gegebenen Ellipsoids liege.

134. Aufgabe. — Die Attraktion eines homogenen Ellipsoids auf einen äufseren Punkt unter Voraussetzung des Newtonschen Gravitationsgesetzes zu bestimmen.

Auflösung. — Wollen wir nun wirkliche für die Rechnung brauchbare Resultate dem vorstehenden Paragraphen entnehmen, so müssen wir ein solches Attraktionsgesetz $\varphi(r)$ supponieren, für welches wir die Auflösung des Attraktionsproblems auf einen inneren Punkt leisten können. Das ist nach unseren früheren Untersuchungen der Fall, wenn wir die Anziehung nach dem Newtonschen Gesetz wirken lassen, welches uns ja auch als das Naturgesetz vor allem interessiert, während jede andere Voraussetzung nur von analytischem Interesse sein kann.

Für jedes Attraktionsgesetz $\varphi(r)$ gelten die Formeln (I) des § 133:

$$A = \frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'} A', \quad B = \frac{\alpha\gamma}{\alpha'\gamma'} B', \quad C = \frac{\alpha\beta}{\alpha'\beta'} C'.$$

Wegen ihrer vollkommenen Symmetrie betrachten wir wiederum nur die Komponente A.

Nun entspricht, wenn in Gemäfsheit des Newtonschen Gesetzes

$$\varphi(r) = \frac{1}{r^2}$$

ist, die Komponente A' dem Problem für den inneren Punkt, das wir in den §§ 127 und 129 bereits gelöst haben und das wir jetzt mit der im vorigen Paragraphen behandelten Aufgabe verknüpfen, indem wir (unter Beibehaltung der Bedeutung der daselbst in Anwendung gekommenen Buchstaben) die beiden Ungleichheiten aufstellen:

$$\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} + \frac{c^2}{\gamma^2} > 1$$

und

$$\frac{a'^2}{\alpha'^2} + \frac{b'^2}{\beta'^2} + \frac{c'^2}{\gamma'^2} < 1,$$

d. h. voraussetzen, dafs der gegebene Punkt (a, b, c) aufserhalb des gleichfalls gegebenen Ellipsoids α, β, γ, Punkt (a', b', c') aber — der übrigens auf der Oberfläche von α, β, γ liegt — innerhalb des Ellipsoids α', β', γ' sich befinde. Die auf dieses letztere bezüglichen sechs Gröfsen sind dadurch bestimmt, dafs α'^2 die einzige positive Wurzel der kubischen Gleichung (6_0) des § 133 (S. 343)

$$\frac{a^2}{\alpha'^2} + \frac{b^2}{\alpha'^2 + \beta^2 - \alpha^2} + \frac{c^2}{\alpha'^2 + \gamma^2 - \alpha^2} = 1$$

und α' selbst die positive Quadratwurzel aus α'^2 ist, während man den übrigen fünf Bestimmungsstücken $\beta', \gamma', a', b', c'$ die ebenda in (6′) und (6″) angegebenen Werte beizulegen hat.

Die Attraktionskomponenten eines Ellipsoids auf einen inneren Punkt liefern die Formeln (I) des § 129 (S. 326), in denen natürlich jetzt alles mit gestrichenen Buchstaben zu bezeichnen ist, mit Ausnahme von θ, das als Integrationsvariable im Resultat nicht enthalten ist, so dafs man für die Komponente A' hat:

$$A' = -\frac{4\pi}{\alpha'^2} \cdot a' \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta \sin\theta \, d\theta}{\sqrt{\left(\frac{\cos^2\theta}{\alpha'^2} + \frac{\sin^2\theta}{\beta'^2}\right)\left(\frac{\cos^2\theta}{\alpha'^2} + \frac{\sin^2\theta}{\gamma'^2}\right)}}.$$

Zunächst bringen wir hier noch den Radikanden im Nenner auf die Form

$$\left(\left(\frac{1}{\alpha'^2} - \frac{1}{\beta'^2}\right)\cos^2\theta + \frac{1}{\beta'^2}\right)\left(\left(\frac{1}{\alpha'^2} - \frac{1}{\gamma'^2}\right)\cos^2\theta + \frac{1}{\gamma'^2}\right)$$

und führen nun vermittelst der Substitution

$$\cos\theta = t, \quad -\sin\theta\, d\theta = dt$$

statt der trigonometrischen Funktionen algebraische ein. Das gibt

$$A' = -\frac{4\pi}{\alpha'^2}\cdot a' \int_0^1 \frac{t^2\, dt}{\sqrt{\left(\frac{1}{\beta'^2} + \left(\frac{1}{\alpha'^2} - \frac{1}{\beta'^2}\right)t^2\right)\cdot\left(\frac{1}{\gamma'^2} + \left(\frac{1}{\alpha'^2} - \frac{1}{\gamma'^2}\right)t^2\right)}}$$

oder, wenn man noch die Nenner aus dem Radikanden wegschafft,

$$A' = -4\pi a'\beta'\gamma' \int_0^1 \frac{t^2\, dt}{\sqrt{\left(\alpha'^2 + (\beta'^2 - \alpha'^2)t^2\right)\cdot\left(\alpha'^2 + (\gamma'^2 - \alpha'^2)t^2\right)}},$$

und hieraus lassen sich der Symmetrie nach auch die beiden anderen Komponenten B', C' genau in analoge Formen gießen, die schon einen Schritt näher liegen den kanonischen Formen der elliptischen Integrale.

Substituieren wir nun diesen Wert für A' in $A = \frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'}A'$, nachdem wir noch aus (6″) und (5′) des § 133 a' durch $\frac{a\alpha}{\alpha'}$, und $\beta'^2 - \alpha'^2$, $\gamma'^2 - \alpha'^2$ durch $\beta^2 - \alpha^2$ bezw. $\gamma^2 - \alpha^2$ ersetzt haben, so gewinnen wir für die gesuchte Komponente A der Attraktion auf den äußeren Punkt (a, b, c) den Ausdruck

$$(A)\begin{cases} A = -4\pi \dfrac{a}{\alpha'}\alpha\beta\gamma \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2\, dt}{\sqrt{\left(\alpha'^2 + (\beta^2 - \alpha^2)t^2\right)\cdot\left(\alpha'^2 + (\gamma^2 - \alpha^2)t^2\right)}} \\ (\alpha' < \beta' < \gamma', \quad \alpha < \beta < \gamma) \end{cases}$$

und entsprechende Ausdrücke für die Komponenten B und C.

Und damit hat man die Formeln als Mittel zur Berechnung so eingerichtet, wie es notwendig ist.

135. Maclaurinscher Satz. — In dem vorstehenden Resultat liegt eine einfache geometrische Wahrheit, die um so mehr hervorgehoben zu werden verdient, als man sich so lange mit ihrem Beweise gequält hat, da sie nun doch sich so schnell und ohne Schwierigkeit aus dem Ivoryschen Theorem, von dem die Aufgabe des vorigen Paragraphen einen Specialfall bildet, ergibt

Die Attraktionskomponente A enthält nämlich blofs die eine Hülfsgröfse α', welche durch unsere kubische Gleichung

$$(1) \qquad \frac{a^2}{\alpha'^2} + \frac{b^2}{\alpha'^2 + \beta^2 - \alpha^2} + \frac{c^2}{\alpha'^2 + \gamma^2 - \alpha^2} = 1$$

bestimmt wird, und dasselbe gilt natürlich auch von den anderen beiden Komponenten, weil β' und γ' ohne weiteres in α' ausdrückbar sind. Wir legen uns nun die Frage vor, ob diese Hülfsgröfse α' und damit auch die kubische Gleichung (1) eine Veränderung erleidet, wenn man das gegebene Ellipsoid α, β, γ sich ändern läfst, aber so, dafs es mit sich selbst konfokal (und konzentrisch und ähnlich liegend) bleibt und der angezogene Punkt (a, b, c) noch im Äufseren liegt.

Man sieht auf der Stelle, dafs dadurch in der Gleichung (1) gar nichts geändert wird. Denn wie wir wissen, läfst sich durch den Punkt (a, b, c) nur ein einziges mit dem gegebenen Ellipsoid α, β, γ konfokales Ellipsoid legen, das also auch dasselbe bleibt, wenn es sich darum handelt, durch (a, b, c) ein mit dem neuen Ellipsoid konfokales zu legen. Mithin ist α' immer die eine Halbachse ein und desselben Ellipsoids. Daraus folgt, dafs in der Gleichung (1) der Nenner α'^2 des ersten Gliedes sich nicht ändert. Ebenso verhält es sich aber auch mit den Nennern ihres zweiten und dritten Gliedes, welche die Quadrate der beiden anderen Halbachsen β', γ' des Ellipsoids darstellen. Denn sind (Fig. 45, S. 344)

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$$

die drei Halbachsen des neuen Ellipsoids, so hat man

$$\beta_1^2 - \alpha_1^2 = \beta^2 - \alpha^2, \quad \gamma_1^2 - \alpha_1^2 = \gamma^2 - \alpha^2,$$

und folglich

$$\beta'^2 = \alpha'^2 + \beta_1^2 - \alpha_1^2 = \alpha'^2 + \beta^2 - \alpha^2,$$
$$\gamma'^2 = \alpha'^2 + \gamma_1^2 - \alpha_1^2 = \alpha'^2 + \gamma^2 - \alpha^2.$$

Es bleiben also für beide Ellipsoide α, β, γ und $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die Gröfsen α', $\beta^2 - \alpha^2$, $\gamma^2 - \alpha^2$ und damit auch in ihren Attraktionskomponenten A, A_1 das allein von diesen Gröfsen abhängige Integral unverändert. Demzufolge ergibt sich aus der (A) des § 134 unmittelbar die Relation

$$\frac{A}{A_1} = \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha_1\beta_1\gamma_1},$$

welche besagt, dafs diese Komponenten dem Produkte der drei Achsen der beiden Ellipsoide proportional sind, und das gilt also für alle konzentrischen und ähnlich liegenden konfokalen Ellipsoide, die ein und denselben äufseren Punkt anziehen. Da nun aber bekanntlich das Volumen eines Ellipsoids α, β, γ

$$\frac{4}{3}\pi\alpha\beta\gamma$$

ist, so sind diese Komponenten auch den Volumen der Ellipsoide proportional, und da die Ellipsoide homogen und hier natürlich sämtlich von derselben Dichtigkeit sind, sich also die Volumina wie die Massen verhalten, so sind endlich auch die Komponenten den Massen der Ellipsoide proportional.

Dies gilt ihrer Symmetrie wegen natürlich von allen drei Komponenten, und deshalb gilt es auch von der Resultante.

Denn versteht man unter

$$L, M, N$$

gewisse Konstanten, die sich in den Ausdrücken für die Komponenten A, B, C nicht ändern, wenn das Ellipsoid α, β, γ in ein konfokales $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ übergeht, so hat man

$$A = -\alpha\beta\gamma\cdot L, \quad B = -\alpha\beta\gamma\cdot M, \quad C = -\alpha\beta\gamma\cdot N$$

und für die Resultante $R = |\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}|$:

$$R = \alpha\beta\gamma|\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}|.$$

Dieselbe ist mithin ebenfalls dem Produkt der drei Achsen oder den Volumen oder den Massen der konfokalen Ellipsoide proportional.

Zugleich ergibt sich hieraus für die drei Winkel

$$\lambda, \mu, \nu,$$

welche die Resultante mit den positiven Achsen macht:

$$\cos\lambda = -\frac{L}{|\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}|}, \quad \cos\mu = -\frac{M}{|\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}|},$$

$$\cos\nu = -\frac{N}{|\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}|},$$

woraus folgt, dafs diese Winkel konstant sind, und mithin die Resultanten der Anziehung der konfokalen Ellipsoide auf den Punkt (a, b, c) ineinander fallen.

Demnach hat man folgenden, aber wegen seiner Herleitung aus § 134 nur für das Newtonsche Naturgesetz gültigen Satz: Unter sich konfokale konzentrische und ähnlich liegende homogene Ellipsoide ziehen ein und denselben äufseren

Punkt nach derselben Richtung an mit einer Kraft, die ihren Massen proportional ist.

Kennt man also die Anziehung auch nur eines dieser konfokalen Ellipsoide auf einen äufseren Punkt, so kennt man die eines jeden.

Dies ist der berühmte Maclaurinsche Satz, der aber wohl erst von Legendre distinkt ausgesprochen ist. Auf seinen Beweis richteten sich alle Anstrengungen, denn man sieht, wie auch er seinerseits, ähnlich wie der Ivorysche Satz, darauf abzielt, mit Hülfe des inneren Punktes, für den man schon längst im reinen war, das Problem für den äufseren Punkt zu lösen.

Denn nahm man das extremste unter allen jenen konfokalen Ellipsoiden, nämlich das durch den angezogenen Punkt (a, b, c) selbst hindurchgelegte, bis zu welchem hin man sie also anwachsen liefs, so hatte man den Grenzfall, wo der angezogene Punkt auf der Oberfläche liegt, und der an beiden allgemeinen Fällen des äufseren und des inneren Punktes participiert, also in der Behandlung des inneren Punktes mit einbegriffen ist, wobei sich sogar alles noch einfacher gestaltet. Und dann brauchte man nur noch die Proportion anzusetzen, um aus derselben für jedes beliebige kleinere konfokale Ellipsoid die Attraktion auf den äufseren Punkt (a, b, c) zu erhalten.

So führen also das Ivorysche und das Maclaurinsche Theorem beide das Problem für den äufseren Punkt auf das für den inneren Punkt zurück. Aber keineswegs sind beide Sätze identisch, wie manche Lehrbücher vermeinen. Beide Wege sind vielmehr durchaus voneinander verschieden, und das Ivorysche Theorem ist bei weitem allgemeiner. Dieses leistet vollkommen die Reduktion des äufseren auf einen inneren (den korrespondierenden) Punkt, jenes führt die Lösung mittels des Grenzfalles herbei.

136. Schlufsbemerkung. — Die in den beiden vorangehenden Paragraphen gewonnenen Resultate zeigen, worauf wir auch schon in § 130, 2. aufmerksam gemacht haben, dafs die Komponenten der Anziehung auf einen äufseren Punkt und daher auch die Gesamtanziehung nicht so einfach sind wie für einen inneren Punkt, wo nur die Faktoren der Integrale die Koordinaten des angezogenen Punktes enthalten, so dafs die Komponenten einfach diesen Koordinaten proportional sind (vergl. § 128, I., S. 319). In den Attraktionskomponenten für einen äufseren Punkt hingegen kommt auch in den Integralen selbst noch α' vor, welches eine Funktion der Koordinaten des angezogenen Punktes ist, so dafs auch das Integral abhängig ist von der Lage dieses Punktes, und jeder angezogene Punkt konstituiert demzufolge, auch wenn das Ellipsoid sich nicht ändert, eine eigene elliptische Transcendente.

137. Geschichtliche Skizze. — Das Problem der Attraktion (s. a. §§ 122, 126, 131, 135) nimmt seinen Ursprung von Newton her. Newton beschäftigte sich mit der Gestalt der Himmelskörper, die er als hervorgebracht ansah durch die Rotation der früher flüssigen (homogenen) Massen um eine Achse, und dazu war es notwendig, die Anziehung des gesamten Körpers auf jeden inneren Punkt zu kennen. Andere Fragen erforderten aber auch die Kenntnis der Anziehung auf äufsere Punkte. Doch wurde das Problem auf Umdrehungskörper beschränkt, und das blieb es auch lange Zeit hindurch. — Newton kam nun erst so weit, dafs er den Satz fand[83]), dafs für innere auf demselben Durchmesser gelegene Punkte eines Umdrehungsellipsoids die Anziehungen ihren Entfernungen vom Mittelpunkte des Körpers proportional sind. Er brauchte also nur noch für einen Punkt auf jedem Durchmesser die Attraktion zu kennen, um sie für alle inneren Punkte zu haben. Das leistete er aber nur für die Endpunkte der Umdrehungsachse und des Äquatorialdurchmessers.

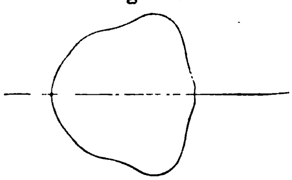
Darauf löste Maclaurin die Aufgabe für den inneren Punkt des Umdrehungsellipsoids vollständig, und desgleichen für einen äufseren Punkt in den besonderen Fällen, wo derselbe in der Verlängerung der Umdrehungsachse oder in der erweiterten Ebene des Äquators liegt.

Nächst ihm beschäftigte sich d'Alembert mit der Attraktionstheorie, fügte aber nichts Wesentliches hinzu. Er dehnte nur die schon bekannten Sätze auf das dreiachsige Ellipsoid aus und that dar, dafs, wie man schon vermutet hatte, sich hier alles ähnlich verhält.

Nun unterwarf Lagrange die ganze Sache der Analysis und löste durch Polarkoordinaten im wesentlichen nach der oben befolgten Methode das Problem für den inneren Punkt vollständig. In einer späteren Abhandlung erwies er ebenso die Sätze für die äufseren Punkte, soweit sie von Maclaurin bereits aufgestellt waren.

Maclaurin hatte schon bemerkt, daſs in diesen besonderen Fällen die Attraktion auf einen äuſseren Punkt den Massen der anziehenden Körper proportional ist, und man vermutete nun — was Legendre wahrscheinlich zuerst aussprach —, daſs dies allgemein wahr sei. Dann konnte man aber (durch Zurückführung auf den Punkt der Oberfläche, s. S. 349) das Problem für den äuſseren Punkt allgemein behandeln. Das hat Legendre zuerst gemacht und so die Attraktion für ein beliebiges Umdrehungsellipsoid bestimmt, indem er sich dabei der Reihenentwicklung bediente. Er fand nämlich den schönen Satz: „Hat man einen ganz beliebigen homogenen Umdrehungskörper, und man kennt die Attraktion, die er auf einen beliebigen Punkt in der Umdrehungsachse, auch wenn derselbe auſserhalb des Körpers liegt (Fig. 46), ausübt, so kann man unmittelbar eine Reihe aufstellen, die ganz allgemein die Attraktion (d. h. natürlich ihre Komponenten, deren bei einem Umdrehungskörper immer nur zwei in Betracht kommen, weil die dritte einer der beiden anderen gleich ist) auf einen irgendwo im Raume gelegenen Punkt ergibt.“ Wurde nun dieser Satz aufs Ellipsoid angewandt, so fand sich nun eben, daſs die Attraktion auf einen äuſseren Punkt den Massen der Ellipsoide proportional ist, vorausgesetzt, daſs sich dieselben konfokal sind.

Fig. 46.



So vermutete man denn mit Grund, daſs dies eine allgemeine und nicht bloſs auf die Umdrehungsellipsoide passende Wahrheit sei. Bewiesen hat es zuerst Laplace, und zwar ebenfalls durch unendliche Reihen, die sehr kompliziert sind, aber doch in ihren Gliedern nur immer die Differenz der Quadrate der Halbachsen enthalten. Das Miſsliche dabei ist, daſs beide Reihenentwicklungen des Legendre und Laplace nicht immer konvergieren, sondern nur für weit entfernte Punkte, so daſs für nahe Punkte der Satz eigentlich noch der Bestätigung bedurfte. Und das geschah nun, als Legendre, der nach Verlauf mehrerer Jahre zum zweitenmal die Sache vornahm, durch bloſse Integration den Fall des äuſseren Punktes behandelte, d. h. den Maclaurinschen Satz bewies. Seine Rechnungen sind aber so verwickelt und schwierig, daſs sich wirklich die Arbeit kaum lesen läſst. Trotzdem bleibt sie historisch immer vom gröſsten Interesse. Das war i. J. 1788.

Da machte, erst zu Ende des ersten Jahrzehnts dieses Jahrhunderts, Ivory die schöne merkwürdige Entdeckung, die nach ihm den Namen trägt, dafs es eine sehr rapide Art gibt, um von der Anziehung des inneren Punktes auf die des äufseren zu kommen. Fast um dieselbe Zeit, aber ohne Kenntnis des Ivoryschen Satzes, fand auch Gaufs die Zurückführung des äufseren auf den inneren Punkt. Beide Reduktionen sind keineswegs miteinander zu verwechseln; sie unterscheiden sich wesentlich. Gaufs' Methode löst zugleich selbständig das Problem für den inneren Punkt, setzt also nichts Fremdes voraus; Ivory hingegen beruft sich auf den inneren Punkt, für den die Attraktion schon bekannt sein mufs: er findet sie nicht selbst. — Gaufs' Arbeit erschien 1813, und wenn Ivorys Abhandlung schon 1809 publiciert war, so kann es nicht Wunder nehmen, dafs sie nach mehreren Jahren noch in Deutschland unbekannt geblieben war, denn es fand ja damals gerade die Kontinentalsperre statt, wo erst alles nach Jahren seinen Weg zu uns herübernahm. Und obwohl 1809 Lagrange das Problem für den inneren Punkt schon längst durch blofse Integration in die beste Form gebracht und gewissermafsen absolviert hatte, behandelt es Ivory doch noch durch Reihen, was ganz unzweckmäfsig, im übrigen aber Nebensache ist..

Nach dieser Zeit wurde noch viel über die Attraktion gearbeitet, was wir aber nicht aufzählen, zumal es auch kein Interesse gewährt, wenn man die Methoden selbst nicht kennt.

Wir werden jetzt das Problem noch einmal, auf eine ganz andere Manier, behandeln.

Achter Abschnitt.

Die vielfachen Integrale,

nach der Methode des diskontinuierlichen Faktors behandelt.

Erstes Kapitel.

Das Problem der Attraktion der Ellipsoide.

138. Die Methode der Integration mittels eines diskontinuierlichen Faktors. — Die vorbezeichnete Methode erweist sich in sehr vielen Problemen als äufserst nützlich, indem sie insbesondere den Vorzug besitzt, dafs sie mit grofser Leichtigkeit die sonst schwierigsten Integrationen auszuführen gestattet. Wie wir nämlich oft im früheren zu beobachten Gelegenheit hatten, wurden Integrationen in vielen Fällen deshalb so schwierig, weil ihre Grenzen nicht einfach genug waren. Diese sollen nun eben durch den diskontinuierlichen Faktor vereinfacht und dadurch die Schwierigkeit der Integrationen umgangen werden, wenn es auch nicht vermieden werden kann, dafs sich alsdann die Schwierigkeit auf einen anderen Punkt der Aufgabe wirft, die aber sehr häufig doch geringer sein wird als jene erstere. Denn da der diskontinuierliche Faktor sich ebenfalls in Form eines bestimmten, aber zwischen konstanten Grenzen erstreckten Integrals darstellt, so wird zwar die Anzahl der Integrationen vermehrt, die Komplikation der Grenzen hingegen verringert.

Ganz im allgemeinen verfährt diese Methode auf folgende Weise: Es liege die Aufgabe vor, eine ganz beliebige Funktion von beliebig vielen Variablen nach allen diesen Variablen zwischen veränderlichen, gegenseitig voneinander abhängigen Grenzen zu integrieren, indem der Umfang der einzelnen Integrationen durch irgend welche Ungleichheitsbedingungen reguliert sei. Denn anders als bei einfachen Integralen, läfst sich mit unbestimmten mehrfachen Integralen, die alles sein können, gar nichts anfangen. Man richtet sich dann so ein, dafs man das gegebene Integral, also z. B., um präciser zu sein, das dreifache Integral

$$\int f(x, y, z) \cdot dx\, dy\, dz \tag{1}$$

mit einem Faktor zu multiplicieren hat, der ebenfalls eine Funktion von x, y, z, aber so beschaffen ist, dafs er innerhalb des ganzen Raumes, der durch die vorerwähnten Grenzbedingungen determiniert wird, für ein jedes hineinfallende Wertsystem x, y, z gleich 1 ist, aufserhalb hingegen überall im ganzen unendlichen Raume gleich 0. Hat man diesen Faktor, der, wie man sieht, diskontinuierlich ist, erst dem Integral (1) hinzugefügt, so gehen einen nun die Grenzen der gesamten Integrationen gar nichts mehr an: man kann in Bezug auf alle vier Variablen — denn auch der neue Faktor mufs in Form eines bis ins Unendliche ausgedehnten Integrals einer neuen Hülfsveränderlichen erscheinen — zwischen unendlichen Grenzen, und zwar nach x, y, z von $-\infty$ bis ∞ integrieren, da ja alsdann alle hinzukommenden aufserhalb der gegebenen Grenzen des Integrals (1) liegenden Teile verschwinden, die in jenem Raume sich einstellenden neuen Faktoren aber $= 1$ sind. So hat man denn nun lauter konstante Grenzen, und das ist es, was viele Probleme unendlich vereinfacht.

Einen solchen Ausdruck, der alle Forderungen der eben dargelegten Methode erfüllt, besitzen wir bereits in dem uns von früher her bekannten Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi} \cos g\varphi \cdot d\varphi.$$

Denn wie wir in § *92 gesehen haben [84]), nimmt dieses Integral drei von der Gröfse der Konstanten g abhängige verschiedene Werte an, von denen die beiden ersteren, uns hier allein interessierenden, wenn wir sie in der Form schreiben:

$$
\text{(I)} \quad \begin{cases}
\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\sin\varphi}{\varphi}\cdot\cos g\varphi\cdot d\varphi = 1 & \text{für } -1 < g < 1, \\[2ex]
\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\sin\varphi}{\varphi}\cdot\cos g\varphi\cdot d\varphi = 0 & \text{für } g < -1 \text{ und } g > 1, \\[2ex]
\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\sin\varphi}{\varphi}\cdot\cos\varphi\cdot d\varphi = \dfrac{1}{2} & (\text{für } g = \pm 1),
\end{cases}
$$

zusammengefaſst eine diskontinuierliche Funktion bilden, die ersichtlicherweise genau so beschaffen ist, daſs wir sie zu unserem Zwecke verwenden können.

So läſst sich z. B. mit Hülfe derselben leicht ein Faktor fabricieren, der überall innerhalb eines gegebenen Ellipsoids

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

gleich 1, auſserhalb desselben aber, d. h. für jeden Punkt (x, y, z), der der Bedingung genügt:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} > 1,$$

im ganzen Raume gleich 0 ist. Man braucht dazu offenbar nur für g den auf der linken Seite der Gleichung des Ellipsoids befindlichen Ausdruck zu setzen, da ja das diesem Werte von g entsprechende Integral

$$(\mathrm{I}_0) \qquad \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi}\cdot\cos\left(\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2}\right)\varphi\cdot d\varphi\,.$$

eine Funktion von x, y, z repräsentiert, welche den Formeln (I) zufolge die Einheit zum Werte hat oder verschwindet, je nachdem der dreigliedrige Faktor von φ (der immer positiv ist) unter oder über 1 liegt. Und daſs diese Funktion nach der letzten Formel (I) auf der Oberfläche des Ellipsoids selbst $= \frac{1}{2}$ (das arithmetische Mittel jener beiden anderen Werte) ist, thut, wenn man dieses Integral als diskontinuierlichen Faktor bei einem gegebenen mehrfachen sich über das ganze Ellipsoid erstreckenden Integral benutzen will, nichts zur Sache, weil sich ja der darauf bezügliche Teil nur über eine Fläche, über zwei Dimensionen, oder, genauer, über eine unendlich dünne Schale ausbreitet, deren

Grundfläche die Oberfläche des Ellipsoids und deren Höhe etwa dz oder $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ ist, und der mithin bei einem Integral von höherer Ordnung als der zweiten als ein nur unendlich kleiner Teil desselben nicht in Betracht kommt.

Hat man also nun irgend eine Funktion f von x, y, z und dieselbe über das ganze Ellipsoid zu integrieren, so braucht man dieses dreifache Integral $\int f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$, dessen Grenzen sehr verwickelt sind, nur mit dem Faktor (I_0) zu multiplicieren, um es dadurch in ein (vierfaches) Integral umzuwandeln, dessen sämtliche Grenzen konstant, nämlich $-\infty$, bezw. 0, und ∞ sind, und das mithin in den meisten Fällen viel leichter zu behandeln sein wird.

Zu den auf das Ellipsoid bezüglichen Aufgaben, welche durch Anwendung des diskontinuierlichen Faktors (I_0) gelöst werden können, gehört nun auch das Attraktionsproblem, das jetzt auf diese Art in den folgenden Paragraphen behandelt werden soll, und zwar unter Zugrundelegung eines allgemeineren als des Newtonschen Naturgesetzes, indem wir die Intensität der Anziehung irgend einer negativen Potenz der Entfernung proportional annehmen, deren Exponent sich jedoch durch diese specifische Behandlung des Problems von selbst innerhalb gewisser Grenzen einschliefsen wird. Auch zeichnet sich dieses Verfahren, bei dem übrigens ausschliefslich von der reinen Analysis Gebrauch gemacht wird, dadurch vor der früheren Methode aus, dafs es keine gesonderte Behandlung des inneren und des äufseren Punktes erfordert, vielmehr während der ganzen Untersuchung eine Unterscheidung der beiden Fälle gar nicht stattfindet und erst im Schlufsresultat dieselben voneinander zu trennen sind.

139. Zurückführung der Attraktionskomponenten eines Körpers auf sein Potential. — Bei der ersten Behandlung des Attraktionsproblems hatten wir immer nur eine Komponente der Gesamtanziehung zu betrachten nötig gehabt, weil der anziehende Körper, das Ellipsoid, nach allen drei Richtungen hin symmetrisch war, wie schon seine Gleichung zeigt, die sich nicht ändert, wenn man beziehungsweise x und α mit y und β oder z und γ, oder y und β mit z und γ vertauscht. Für einen Körper hingegen, der dieser Symmetrie entbehrt, hätte man alle drei Komponenten einzeln berechnen müssen. Nun wollen wir aber jetzt darthun, dafs es, auch wenn der Körper noch so unregelmäfsig ist, immer ein Mittel gibt, alle drei Komponenten von einem Integral abhängig zu machen, so dafs man nur dieses eine Integral auszuwerten braucht, um damit auch zugleich die drei Komponenten zu haben. Und zwar gilt das für jedes Attraktionsgesetz $\varphi(r)$ und für jede beliebige Dichtigkeit $\varrho = x^l + y^m + z^n$, die eine rationale ganze Funktion des Ortes ist. Jedoch soll der Einfachheit halber wieder wie früher ϱ konstant und $= 1$ vorausgesetzt werden.

Nach § 132 (S. 329) hat man, wenn alle Buchstaben ihre frühere Bedeutung beibehalten, also

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$$

ist, für die vom angezogenen Punkte (a, b, c) aus in der Richtung der positiven Koordinatenachse OX genommene Komponente A der Attraktion eines beliebig gestalteten homogenen Körpers den Ausdruck

$$A = \int \varphi(r) \cdot \frac{x-a}{r} \cdot dv,$$

und damit völlig symmetrische Ausdrücke für die beiden anderen Komponenten B und C, wo also die Integration über das ganze Volumen des gegebenen Körpers auszudehnen ist. Während wir aber dort $\frac{x-a}{r}, \ldots$ als die partiellen Derivierten von r nach x, y, z betrachtet haben, wollen wir jetzt diese Quotienten durch die partiellen Derivierten von r nach a, b, c ausdrücken, was

$$\frac{x-a}{r} = -\frac{\partial r}{\partial a}, \ldots$$

gibt. Es sind also $\frac{\partial r}{\partial x}$ und $\frac{\partial r}{\partial a}, \ldots$ gleich und entgegengesetzt, wie es auch sein mufs, weil r^2 in Bezug auf x und a, y und b, z und c eine alternierende Funktion ist, d. h. eine Funktion, in der diese Gröfsen nur als Differenzen auftreten.

Wir können mithin auch schreiben

$$A = \int \varphi(r) \cdot \left(-\frac{\partial r}{\partial a}\right) \cdot dv,$$

und ist nun wieder, da man ja das unbestimmte Integral von $\varphi(r)$ nach r als bekannt voraussetzt,

$$(1) \qquad \int \varphi(r) \cdot dr = f(r), \quad \text{also} \quad \frac{df(r)}{dr} = \varphi(r)$$

(wo wir der willkürlichen Konstanten, weil man doch gleich zu bestimmten Integralen übergeht, von vornherein den bequemsten Wert 0 beigelegt haben), so hat man auch

$$A = -\int \frac{df(r)}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial a} \cdot dv = -\int \frac{\partial f(r)}{\partial a} \cdot dv.$$

Da nun aber a ein Parameter der Funktion $f(r)$ ist und die Grenzen der Integration gegeben sind, also nicht afficiert werden von der Variation von a, d. i. der veränderten Lage des Punktes (a, b, c), mithin konstant sind nach a, b, c, so kann man auf Grund der bekannten Elementareigenschaft der bestimmten Integrale (18), welche offenbar auch auf vielfache Integrale ausdehnbar ist, statt unter dem Integralzeichen vor demselben differentiieren. Danach ist

$$A = -\frac{\partial}{\partial a}\int f(r) \cdot dv$$

und ebenso auch

$$B = -\frac{\partial}{\partial b}\int f(r) \cdot dv, \quad C = -\frac{\partial}{\partial c}\int f(r) \cdot dv.$$

So sieht man, hängt alles nur von dem einen dreifachen Integral

(I) $$\int f(r) \cdot dv$$

ab, indem zugleich mit ihm auch, als durch einfache Differentiationen zu finden, die drei Attraktionskomponenten bekannt sind.

Die Funktion (I) wird das Potentialintegral oder einfach das Potential der Attraktion des anziehenden Körpers genannt.

Speciell für das Newtonsche Naturgesetz ist

$$\varphi(r) = \frac{1}{r^2}, \quad f(r) = -\frac{1}{r}, \quad \int f(r) \cdot dv = -\int \frac{dv}{r},$$

$$A = \frac{\partial}{\partial a}\int \frac{dv}{r}, \quad B = \frac{\partial}{\partial b}\int \frac{dv}{r}, \quad C = \frac{\partial}{\partial c}\int \frac{dv}{r}.$$

Diesen Vorteil, den das Potential darbietet, wollen wir uns jetzt bei der folgenden Behandlung des Attraktionsproblems der homogenen Ellipsoide zu nutze machen, indem wir zunächst nur das Potential ins Auge fassen, an geeigneter Stelle aber, bevor seine Reduktion ganz durchgeführt sein wird, zu seinen Derivierten übergehen, um aus diesen alsdann die endgültigen Resultate für die Attraktionskomponenten selbst herzuleiten.

140. Das Potential der Attraktion eines homogenen Ellipsoids unter der Annahme, dafs die Anziehung einer negativen beliebigen Potenz von r gleich sei. — Nach der Voraussetzung ist

$$\varphi(r) = r^{-p} \qquad (p > 0).$$

Für diesen Wert wird die (1) des vorigen Paragraphen

$$\int \varphi(r) \cdot dr = f(r) = \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{r^{p-1}},$$

woraus sich für das Potential

$$\int f(r) \cdot dv = -\frac{1}{p-1} \int \frac{dv}{r^{p-1}}$$

und weiter für die Attraktionskomponenten

$$A = \frac{1}{p-1} \cdot \frac{\partial}{\partial a} \int \frac{dv}{r^{p-1}}, \ldots$$

ergibt. Wir führen für das Potential die abkürzende Bezeichnung T ein; jedoch ist es, da sich in den vorstehenden Ausdrücken das doppelte Minuszeichen zerstört hat, bequemer, darunter vielmehr seinen entgegengesetzten Wert zu verstehen. Dann hat man also

$$(T) \qquad T = \frac{1}{p-1} \int \frac{dv}{r^{p-1}}$$

und

$$A = \frac{\partial T}{\partial a}, \quad B = \frac{\partial T}{\partial b}, \quad C = \frac{\partial T}{\partial c}.$$

Zu der nunmehr vorzunehmenden Reduktion von T werden wir die folgenden beiden uns schon von früher her (s. S. 159 und 161) bekannten Formeln zu benutzen haben, die hier gleich angeführt werden mögen:

$$(\mathrm{I}) \qquad \int_0^\infty e^{\theta \psi i} \psi^{q-1} d\psi = \frac{\Gamma(q)}{(\pm\theta)^q} e^{\pm q \frac{\pi}{2} i} \qquad (0 < q < 1;\ \theta \gtreqless 0)$$

(wo also rechts die oberen oder unteren Zeichen gelten, je nachdem θ positiv oder negativ ist), und

$$(\mathrm{II}) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{(lx^2 + 2mx)i} dx = \left|\sqrt{\frac{\pi}{l}}\right| \cdot e^{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{m^2}{l}\right) i} \qquad (l > 0).$$

Multiplicieren wir also jetzt mit dem auf unser Ellipsoid

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

passenden diskontinuierlichen Faktor (I_0) des § 138:

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi}\cdot\cos\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}\right)\varphi\cdot d\varphi$$

und ersetzen zugleich dv durch $dx\,dy\,dz$, so hat man, wenn zur Abkürzung noch die drei von $-\infty$ bis ∞ zu erstreckenden Integrationen durch $(3)\int\limits_{-\infty}^{\infty}$ angedeutet werden, für das Potential den Ausdruck

$$T=\frac{2}{(p-1)\pi}\int\limits_0^\infty d\varphi\,\frac{\sin\varphi}{\varphi}\cdot{}^{(3)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}\right)\varphi\cdot\frac{dx\,dy\,dz}{r^{p-1}},$$

denn da die Grenzen konstant und die Variablen unabhängig voneinander sind, so darf und mufs man ineinander multiplicieren.

Nun lassen sich hier die Integrationen nach x, y, z noch nicht bewerkstelligen. Drücken wir aber den Faktor $\frac{1}{r^{p-1}}$, der eine Funktion dieser Variablen ist, vermittelst der Hülfsformel (I) aus, in der rechts eine solche Potenz

$$\frac{1}{(\pm\theta)^q}$$

vorkommt, so erhalten wir zwar ein Integral mehr, erreichen aber dadurch, dafs alsdann vier von den fünf Integrationen ganz leicht hintereinander ausführbar sind. Zugleich schreiben wir die Potenz r^{p-1} in Gemäfsheit ihrer Eindeutigkeit — denn als absolute Entfernung ist ja r, *a fortiori* r^2 (dieses auch als Summe von Quadraten) immer positiv — in der Form $(r^2)^{\frac{p-1}{2}}$, so dafs wir mithin in (I)

$$\theta = r^2 \quad\text{und}\quad q=\frac{p-1}{2} \qquad (0<q<1)$$

einzusetzen haben und $p = 2q+1$ jetzt auf das Intervall

$$1<p<3$$

beschränkt wird. Jedoch liefse sich diese Beschränkung, die nur eine Folge unserer besonderen Behandlungsweise ist, durch einige unbedeutende Modifikationen leicht beseitigen.

Danach findet sich

$$\frac{1}{(r^2)^{\frac{p-1}{2}}} = \frac{1}{r^{p-1}} = \frac{e^{-\frac{p-1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}i}}{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)} \int_0^\infty e^{r^2\psi i}\, \psi^{\frac{p-3}{2}}\, d\psi$$

$$(1 < p < 3),$$

und wenn man diesen Wert in den letzten Ausdruck von T substituiert und gleichzeitig sämtliche konstanten Faktoren allen Integralen voranstellt und noch die bekannte Reduktionsformel [§ 58, (1)] der Gammafunktionen

$$\frac{p-1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)$$

in Anwendung bringt,

$$T = \frac{1}{\pi\,\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}\, e^{-\frac{p-1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}i} \int_0^\infty \int_0^\infty {}^{(3)}\!\int_{-\infty}^{\infty} d\varphi\, d\psi \cdot \frac{\sin\varphi}{\varphi}\cdot \psi^{\frac{p-3}{2}}$$
$$\times \cos\left(\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2}\right)\varphi \cdot e^{r^2\psi i}\cdot dx\, dy\, dz.$$

Dafs dieser Ausdruck trotz der in ihm enthaltenen imaginären Faktoren rein reell ist, versteht sich nicht nur aus der Natur des Problems von selbst, sondern folgt auch aus dem vorhergehenden Werte von $\frac{1}{r^{p-1}}$, der zeigt, dafs alles Imaginäre von dem diese reelle Potenz vertretenden Ausdruck herrührt, mithin wegen der Identität beider Ausdrücke sich gegenseitig zerstören mufs. Daher ist es aber möglich, den unter den Integralzeichen befindlichen cosinus durch $e^{i\cdot\arccos}$ zu ersetzen, denn wenn auch dadurch noch ein sinus in die Formel hineinkommt, so ist doch dieser ganze hinzukommende und nicht hinzugehörige Teil mit i multipliciert, also imaginär. Man braucht sich dann beim schliefslichen Resultat nur daran zu erinnern, dafs blofs der reelle Teil desselben T darstellt, alles Imaginäre aber einfach durchzustreichen ist. Diese Operation, welche den Zweck hat, die Gröfsen unter den Integralzeichen einander mehr konform zu machen, würde aber natürlich nicht gestattet sein, wenn unser erster Ausdruck von T schon Imaginäres enthielte, denn dann wäre nachher die Auffindung und Aussonderung dessen, was nicht zu T gehört, unmöglich.

So haben wir denn jetzt

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{\pi\,\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}\,e^{-\frac{p-1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot i}\int_0^\infty\int_0^\infty{}^{(3)}\int_{-\infty}^{\infty} d\varphi\, d\psi\,\frac{\sin\varphi}{\varphi}\cdot\psi^{\frac{p-3}{2}} \\ &\qquad\times\, e^{\left(\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}\right)\varphi+r^2\psi\right)i}\,dx\,dy\,dz, \end{aligned} \right.$$

und ersetzen wir nun hier r^2 durch seinen Wert

$$\begin{aligned} r^2 &= (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 \\ &= x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2+z^2-2cz+c^2 \end{aligned}$$

und sondern die Glieder des Exponenten der Exponentialgröfse in drei Gruppen, von denen eine jede die zu einer der drei Achsen parallelen Koordinaten in sich begreift, so dafs die Exponentialgröfse selbst in ein Produkt von drei genau symmetrisch geformten Faktoren zerfällt, die zur Abkürzung durch X, Y, Z bezeichnet werden mögen[85]:

$$X = e^{\left(\left(\frac{\varphi}{\alpha^2}+\psi\right)x^2-2a\psi x+a^2\psi\right)i},$$

$$Y = e^{\left(\left(\frac{\varphi}{\beta^2}+\psi\right)y^2-2b\psi y+b^2\psi\right)i},$$

$$Z = e^{\left(\left(\frac{\varphi}{\gamma^2}+\psi\right)z^2-2c\psi z+c^2\psi\right)i}:$$

so lautet nunmehr die (1)

$$\frac{e^{-\frac{p-1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}i}}{\pi\,\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}\int_0^\infty\int_0^\infty\cdot{}^{(3)}\int_{-\infty}^{\infty} d\varphi\, d\psi\,\frac{\sin\varphi}{\varphi}\cdot\psi^{\frac{p-3}{2}}\,X\,Y\,Z\,dx\,dy\,dz$$

und enthält jetzt die drei Variablen x, y, z in einzelnen Faktoren getrennt voneinander. Mithin lassen sich die auf diese Variablen bezüglichen Integrationen successive bewerkstelligen, indem man währenddes immer alle anderen Variablen als konstant betrachtet. Die Werte dieser drei Integrale aber liefert die zweite der oben aufgeführten Hülfsformeln, welche, nachdem man aus jeder der Exponentialgröfsen X, Y, Z noch einen konstanten Faktor abgelöst hat, genau mit unseren Ausdrücken übereinstimmt. Denn auch diese erfüllen, da φ und ψ nachher nur positive Werte annehmen, die Bedingung, dafs der Koeffizient von x^2 bezw. y^2 und z^2 gröfser als Null ist.

Danach ist z. B.

$$\int_{-\infty}^{\infty} X\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(\left(\frac{\varphi}{\alpha^2}+\psi\right)x^2 - 2a\psi x + a^2\psi\right)i}\,dx$$

$$= e^{a^2\psi i}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{\varphi}{\alpha^2}+\psi}}\,e^{\frac{\pi}{4}i}\cdot e^{-\frac{a^2\psi^2}{\frac{\varphi}{\alpha^2}+\psi}i}$$

und nach vollzogener Reduktion

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{\varphi}{\alpha^2}+\psi}}\cdot e^{\frac{\pi}{4}i}\,e^{i\varphi\psi\frac{a^2}{\varphi+\alpha^2\psi}}.$$

So kann man nun gleich das Resultat der drei Integrationen nach x, y, z hinschreiben und erhält, wenn zur Abkürzung noch

$$\left|\sqrt{\left(\frac{\varphi}{\alpha^2}+\psi\right)\left(\frac{\varphi}{\beta^2}+\psi\right)\left(\frac{\varphi}{\gamma^2}+\psi\right)}\right| = \varDelta$$

gesetzt wird, für die Formel, deren reeller Teil T ist,

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}\cdot e^{-\frac{p-1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}i+\frac{3\pi}{4}i}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} d\varphi\,d\psi\,\frac{\sin\varphi}{\varphi}\cdot\psi^{\frac{p-3}{2}}\cdot\frac{1}{\varDelta}$$
$$\times\; e^{i\varphi\psi\left(\frac{a^2}{\varphi+\alpha^2\psi}+\frac{b^2}{\varphi+\beta^2\psi}+\frac{c^2}{\varphi+\gamma^2\psi}\right)}.$$

Es ist also jetzt nur noch ein doppeltes Integral vorhanden, das sich aber, wie bald bemerkbar, ohne Schwierigkeit auf ein einfaches mufs reducieren lassen. Denn $\varDelta$ und der Exponent von e sind homogene Funktionen von φ und ψ, von der Dimension $\frac{3}{2}$, bezw. 1. Und in einem so beschaffenen Integral tritt augenscheinlich eine Vereinfachung ein, wenn man die eine Veränderliche beibehält, statt der zweiten aber ihr Verhältnis zur ersten setzt: es tritt dann eine Potenz der neuen Variablen heraus und der Ausdruck nimmt eine solche Gestalt an, dafs man wiederum die Hülfsformel (I) anwenden kann. So fällt man dieser Formel wieder zu, die folglich doppelte Dienste thut: einmal führt sie eine geeignete Form ein, und ist diese benutzt, entfernt sie dieselbe wieder.

Man setze also aus dem erwähnten Grunde

$$\psi = \frac{\varphi}{s},$$

wo s die neue Variable für ψ ist (denn φ wird ja während der Integration nach ψ als konstant betrachtet); dann hat man

$$d\psi = -\varphi \frac{ds}{s^2}; \quad \psi = 0, \ s = \infty; \quad \psi = \infty, \ s = 0,$$

so dafs unter Berücksichtigung des Minuszeichens in $d\psi$ nach s gleichfalls von 0 bis ∞ zu integrieren ist.

Es hebt sich nun φ in $d\psi$ gegen $\frac{1}{\varphi}$. Ferner findet sich, wenn zur Abkürzung noch

$$\sqrt{\left(1 + \frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1 + \frac{s}{\beta^2}\right)\left(1 + \frac{s}{\gamma^2}\right)} = \varDelta'$$

und

$$\frac{a^2}{\alpha^2 + s} + \frac{b^2}{\beta^2 + s} + \frac{c^2}{\gamma^2 + s} = S$$

gesetzt wird,

$$\varDelta = \left(\frac{\varphi}{s}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \varDelta',$$

also

$$\psi^{\frac{p-3}{2}} \cdot \frac{1}{\varDelta} = \varphi^{\frac{p}{2}-3} \cdot s^{3-\frac{p}{2}} \cdot \frac{1}{\varDelta'}$$

und für den Exponenten der Exponentialgröfse unter dem Integralzeichen

$$i\,\varphi\,S.$$

So kommt hier durch die blofse Macht der Rechnung in unsere Formeln der Ausdruck hinein, welcher bei der ersten Behandlung des Problems durch geometrische Betrachtungen erzeugt wurde und auf die Vergleichung der konfokalen Ellipsoide führt. Denn S ist ja, wenn

$$\alpha^2 + s = \alpha'^2, \quad \text{also} \quad s = \alpha'^2 - \alpha^2$$

gesetzt wird, derselbe Ausdruck

$$\frac{a^2}{\alpha'^2} + \frac{b^2}{\alpha'^2 + \beta^2 - \alpha^2} + \frac{c^2}{\alpha'^2 + \gamma^2 - \alpha^2},$$

den wir früher hatten (S. 339 ff.) und von dem wir fanden, dafs er nur **eine** reelle positive Wurzel in Bezug auf α'^2 (und mithin auch in Bezug auf s) besitzt.

Substituieren wir nun die der neuen Variablen s zugehörigen Werte und berücksichtigen noch, dafs die vor dem Integralzeichen befindliche Exponentialgröfse gleich

$$e^{-\frac{p\pi}{4}i + \pi i} = e^{\pi i} e^{-\frac{p\pi}{4}i} = -e^{-\frac{p\pi}{4}i}$$

ist, so erhält man für den Ausdruck, dessen reeller Teil T ist:

$$-\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} e^{-\frac{p\pi}{4}i} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty d\varphi\, ds \cdot \sin\varphi \cdot \varphi^{\frac{p}{2}-3} \cdot s^{1-\frac{p}{2}} \cdot \frac{1}{\Delta'} e^{S\varphi i}.$$

Hier könnte nun sofort noch eine Integration, die auf φ bezügliche, ausgeführt werden. Es wird aber zweckmäfsiger sein, zuerst die partiellen Derivierten des vorstehenden Ausdruckes nach a, bezw. b und c (die, wie man jetzt sieht, nur in S und zwar vollkommen symmetrisch vorkommen) zu bilden, da uns ja die Werte dieser Differentialquotienten, die zur Kenntnis der Attraktionskomponenten allein erforderlich sind, hauptsächlich interessieren.

141. Die Attraktionskomponenten des homogenen Ellipsoids für $\varphi(r) = r^{-p}$. — Differentiiert man eine aus einem reellen und einem imaginären Teile bestehende Funktion nach einem reellen Elemente, so wird das Reelle natürlich wieder reell, das Imaginäre aber bleibt imaginär. Wenn man mithin von dem ganzen die Derivierte darstellenden Ausdruck nur den reellen Teil nimmt und der reelle Teil der in Rede stehenden Funktion vor der Differentiation war T, so hat man nach der Differentiation nach a z. B. die verlangte Komponente $\frac{\partial T}{\partial a} = A$.

Da einer früher (S. 358) gemachten Bemerkung zufolge diese Differentiationen auch unter dem Integralzeichen geschehen können, und da im Schlufsresultat des vorigen Paragraphen a (und dasselbe gilt von b und c) blofs in S, also im Exponenten der Exponentialgröfse, vorkommt, so hat man nur zu nehmen

$$\frac{\partial}{\partial a} e^{S\varphi i} = i\varphi \cdot \frac{2a}{\alpha^2 + s} e^{S\varphi i}$$

und erhält somit, wenn man zugleich noch

$$i = e^{\frac{\pi}{2}i} \quad \text{und} \quad -\frac{p\pi}{4}i + \frac{\pi}{2}i = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{p}{2} - 1\right)i$$

setzt und die konstanten Faktoren herausstellt, für den Ausdruck, dessen reeller Bestandteil $\frac{\partial T}{\partial a}$ ist:

$$-\frac{2a\sqrt{\pi}}{\alpha^2\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}e^{-\frac{\pi}{2}\left(\frac{p}{2}-1\right)i}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty d\varphi\, ds\cdot\varphi^{\frac{p}{2}-2}s^{1-\frac{p}{2}}\sin\varphi$$
$$\times\frac{e^{S\varphi i}}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)^3\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}}.$$

Derselbe ist, wie das im Nenner des letzten Faktors befindliche Radikal zeigt, nicht mehr symmetrisch nach den drei Richtungen, und das begreift sich auch, weil es sich hier nicht mehr um das Potential, sondern schon um eine Komponente handelt Allerdings braucht man nur die einzelnen Buchstaben miteinander zu vertauschen, um B und C zu erhalten, aber der Ausdruck wird dadurch ein anderer.

Um nun die Integration nach φ wirklich auszuführen zu versuchen, kann man alles nach φ Konstante, also namentlich alles, was blofs s enthält, aus dem Integral nach φ herausnehmen, wobei wir zugleich, damit die Integralfunktion aus mehr gleichartigen Teilen gebildet sei,

$$\sin\varphi=\frac{e^{\varphi i}-e^{-\varphi i}}{2i}=\frac{i}{2}(e^{-\varphi i}-e^{\varphi i}),$$

und zur Abkürzung noch

$$\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)^3\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}=E$$

setzen. Dann hat man

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}&-\frac{a\sqrt{\pi}}{\alpha^2\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}\int\limits_0^\infty ds\cdot\frac{s^{1-\frac{p}{2}}}{E}\cdot ie^{-\frac{\pi}{2}\left(\frac{p}{2}-1\right)i}\cdot\int\limits_0^\infty(e^{-\varphi i}-e^{\varphi i})\\&\qquad\times e^{S\varphi i}\cdot\varphi^{\overline{\frac{p}{2}-1}-1}d\varphi,\end{aligned}\right.$$

wo die einzelnen Faktoren so angeordnet sind, dafs zunächst nur rein reelle Faktoren stehen und darauf das Imaginäre folgt, welches beginnt mit dem auf der Linie stehenden i.

Nun sehen wir sogleich, dafs wir das Resultat der Integration nach φ vermittelst der schon im vorigen Paragraphen benutzten Hülfsformel

$$(\mathrm{I})\qquad\int\limits_0^\infty e^{\theta\psi i}\psi^{q-1}d\psi=\frac{\Gamma(q)}{(\pm\theta)^q}e^{\pm q\frac{\pi}{2}i}\qquad(0<q<1;\ \theta\gtrless0)$$

anzugeben im stande sind. Nur erfordert diese Formel, die wir wegen des binomischen Faktors, der $\sin\varphi$ ersetzt, sogar zweimal in Anwendung zu bringen haben, dafs $\frac{p}{2} - 1$, welches in unserer Potenz von φ den Wert q vertritt, zwischen 0 und 1, also p selbst zwischen 2 und 4 liege, und da sich schon früher die Bedingung herausstellte (S. 360), dafs es zwischen 1 und 3 liegen mufs, bleibt jetzt nur noch das Intervall $2 < p < 3$ übrig. Aber es wäre leicht zu beweisen, dafs, obwohl das Integral auf der linken Seite unserer Hülfsformel für negative Werte von q sinnlos ist, trotzdem auch hier noch p jeden Wert in dem Intervall von 1 bis 3 haben dürfte. Denn wenn man dieses Integral in Bezug auf θ zwischen den gehörigen Grenzen integrierte, so erhielte man genau eine solche Differenz wie in unserem Integral nach φ, zugleich aber ψ in einer um 1 niedrigeren Potenz. Doch dies ist nur nebensächlich.

Gleichzeitig mit der Benutzung dieser Hülfsformel können wir die Reduktion unseres obigen Ausdruckes (1) sehr abkürzen, wenn wir es sofort blofs auf $\frac{\partial T}{\partial a}$ absehen, indem man alsdann, wie S. 361 und am Anfange dieses Paragraphen gezeigt ist, nur den reellen Teil der (1) zu beachten, alles Imaginäre aber, das sich darstellt, ohne weiteres wegzuwerfen hat. Um das Imaginäre aber herauszufinden, brauchen wir immer nur auf das Integral nach φ nebst den imaginären Faktoren, die es multiplicieren, unser Augenmerk zu richten. Denn was hier imaginär ist, das bleibt es auch noch nach der späteren Integration nach s, bei der ja i als konstanter Faktor heraustritt; was aber hier reell wird, das ist es auch noch nach der Integration nach s, weil ja alsdann das ganze Funktionalelement dieses Integrals reell ist.

Da findet sich nun zunächst, dafs der fragliche Teil des zweiten Gliedes der (1), mit dem Faktor $e^{\varphi i}$, also

$$(1') \qquad i\, e^{-\frac{\pi}{2}\left(\frac{p}{2}-1\right) i} \int_0^\infty e^{(S+1)\varphi i} \cdot \varphi^{\overline{\frac{p}{2}-1}-1}\, d\varphi$$

gar nichts Reelles gibt. Es kommt nämlich hier sehr viel darauf an, ob das θ der Hülfsformel positiv oder negativ ist, weil davon das Zeichen des Exponenten der auf ihrer rechten Seite befindlichen Exponentialgröfse abhängt. Nun ist in (1')

$$0 = S + 1,$$

und da S, in dem ja s nur positive Werte (zwischen 0 und ∞) anzunehmen hat, wesentlich positiv ist, so ist es *a fortiori* auch $S+1$ und gilt mithin in jenem Exponenten von e das obere Zeichen $+$. Ferner ist $q = \frac{p}{2} - 1$; folglich liefert die Hülfsformel für das Integral in (1′) den Ausdruck

$$\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)}{(S+1)^{\frac{p}{2}-1}} \cdot e^{\frac{\pi}{2}\left(\frac{p}{2}-1\right)i},$$

wo der Quotient (wie immer in dieser Formel) wesentlich reell ist, hingegen die Exponentialgröfse imaginär; aber diese hebt sich mit der vor dem Integral befindlichen, weil beide gleiche und entgegengesetzte Exponenten haben. So hat man alsdann nur den reellen Ausdruck

$$\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)}{(S+1)^{\frac{p}{2}-1}},$$

welcher jedoch durch den noch übrigen Faktor i rein imaginär wird, und daher geht uns das ganze zweite Glied der (1) gar nichts an.

Es bleibt mithin nur noch entsprechend das erste Glied der (1) mit dem Faktor $e^{-\varphi i}$:

$$(1'') \qquad i\, e^{-\frac{\pi}{2}\left(\frac{p}{2}-1\right)i} \int_0^\infty e^{(S-1)\varphi i} \cdot \varphi^{\overline{\frac{p}{2}-1}-1}\, d\varphi,$$

übrig, und es wird ganz aus denselben Gründen wie eben folgen, dafs dieser Ausdruck für alle diejenigen Werte von s, für welche

$$S - 1 \text{ positiv, also } S > 1$$

ist, rein imaginär und zwar gleich

$$(1_0'') \qquad i\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)}{(S-1)^{\frac{p}{2}-1}}$$

ist und daher gleichfalls ohne weiteres wegzuwerfen ist.

Hingegen ist noch genauer zu untersuchen, was aus der (1″) für diejenigen Werte von s wird, für welche

$$S - 1 \text{ negativ, also } S < 1$$

ist. Es wird sich herausstellen, daſs für diese Werte (1″) einen reellen Bestandteil liefert, den man dann nur noch in (1) einzusetzen braucht, um die gesuchte Attraktionskomponente $A = \frac{\partial T}{\partial a}$ selbst zu erhalten.

Dazu wird es zuvörderst notwendig sein, in ähnlicher Weise, wie wir es in § 133, S. 340 ff. mit der daselbst durch T bezeichneten Funktion gethan haben, für ein von 0 bis ∞ stetig wachsendes s den Lauf der Funktion

$$(2) \qquad S = \frac{a^2}{\alpha^2 + s} + \frac{b^2}{\beta^2 + s} + \frac{c^2}{\gamma^2 + s}$$

etwas näher zu verfolgen, um ausfindig zu machen, innerhalb welches Intervalles der Werte von s sie kleiner als 1 ist.

Da die Variable s nur in den Nennern von S vorkommt, so ist klar (was überdies durch die stets negative Derivierte $\frac{dS}{ds}$ bestätigt wird), daſs S mit wachsendem s beständig abnimmt. Für $s = \infty$ wird $S = 0$, so daſs an dieser Grenze also immer $S < 1$ ist. An der anderen Grenze aber, $s = 0$, geht S in den Ausdruck

$$\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} + \frac{c^2}{\gamma^2}$$

über, der gröſser oder kleiner als 1 ist, je nachdem (a, b, c) einen auſserhalb oder innerhalb des anziehenden Ellipsoids α, β, γ liegenden Punkt bezeichnet. Ob also an dieser Grenze $S > 1$ oder $S < 1$ ist, hängt von der Lage des angezogenen Punktes ab. Daher wird es jetzt, am Schluſs der Auflösung eigentlich, notwendig, zwischen den beiden Fällen des inneren und äuſseren Punktes zu unterscheiden.

Für einen inneren Punkt ist in dem ganzen Intervall von $s = 0$ bis $s = \infty$ $S < 1$, und man hat mithin, um die Komponente A der Anziehung auf den inneren Punkt (a, b, c) zu erhalten, von dem obigen Ausdruck (1″), nachdem man seinen reellen Teil aufgefunden und allein beibehalten und noch mit den übrigen reellen Faktoren der (1) multipliciert hat, das Integral nach s zwischen den Grenzen 0 und ∞ zu nehmen. Für einen äuſseren Punkt hingegen ist S an der unteren Grenze größser als 1, an der oberen Grenze aber gleich 0. Daher mußs es notwendig einen und nur einen ganz bestimmten positiven Wert „σ“ von s geben, für welchen die stetig abnehmende Funktion $S = 1$ ist. Gefunden aber wird dieses σ (genau in der Weise, wie wir in § 133 a. a. O. mit der Gleichung $T = 0$ verfahren sind) durch Auflösung der kubischen Gleichung

$$S = \frac{a^2}{\alpha^2 + s} + \frac{b^2}{\beta^2 + s} + \frac{c^2}{\gamma^2 + s} = 1$$

nach s. Demzufolge resultieren in dem Intervall von $s = 0$ bis $s = \sigma$, wo $S > 1$ ist, wiederum nur die rein imaginären Ausdrücke ($1''_0$), die wir sofort wegwerfen; in dem Intervall von $s = \sigma$ bis $s = \infty$ hingegen, wo $S < 1$ ist, also ($1''$) einen reellen Bestandteil liefert, hat man zur Bestimmung der Komponente A der Anziehung auf den äufseren Punkt (a, b, c) genau ebenso zu verfahren wie in dem Falle des inneren Punktes, mit dem einzigen Unterschiede, dafs derselbe reelle Ausdruck, von dem dort die Rede war, jetzt nicht von 0 bis ∞, sondern nur zwischen den Grenzen σ und ∞ nach s zu integrieren ist.

Zunächst also handelt es sich um die Ermittelung des reellen Teiles der ($1''$), der sich wiederum aus der Vergleichung mit unserer Hülfsformel (I) ergeben wird.

Da jetzt in derselben für θ das negative $S - 1$ zu setzen ist, mithin auf ihrer rechten Seite die unteren Zeichen gelten, so erhält man sofort für das Integral nach φ

$$\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2} - 1\right)}{(1 - S)^{\frac{p}{2} - 1}} \cdot e^{-\frac{\pi}{2}\left(\frac{p}{2} - 1\right) \cdot i},$$

also für den ganzen Ausdruck ($1''$)

$$\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2} - 1\right)}{(1 - S)^{\frac{p}{2} - 1}} \cdot i e^{-\pi\left(\frac{p}{2} - 1\right) i},$$

wo der Quotient durchaus reell ist, die folgenden Faktoren aber imaginär sind. Schreiben wir aber die Exponentialgröfse in ihrer reducierten Form

$$\cos \pi\left(\frac{p}{2} - 1\right) - i \sin \pi\left(\frac{p}{2} - 1\right),$$

so ist nach der Multiplikation mit i von den beiden Gliedern dieses Binoms nur das erste imaginär, das zweite hingegen wird reell, weil i^2 das Imaginäre zerstört. Der einzig reelle Teil von (1″) ist demnach

$$\sin\pi\left(\frac{p}{2}-1\right)\cdot\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)\cdot\frac{1}{(1-S)^{\frac{p}{2}-1}}$$

oder, wenn man noch behufs weiterer Vereinfachung die Formel (2) des § 61

$$\Gamma(a)\cdot\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi} \qquad (0<a<1)$$

anwendet, also

$$\sin\pi\left(\frac{p}{2}-1\right)\cdot\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)=\frac{\pi}{\Gamma\left(2-\frac{p}{2}\right)}$$

setzt, gleich

$$\frac{\pi}{\Gamma\left(2-\frac{p}{2}\right)}\cdot(1-S)^{1-\frac{p}{2}} \qquad \left(1<\frac{p}{2}<2\right).$$

Dies in die (1) substituiert, erhält man nach allem Bemerkten, und wenn unter σ die einzige positive Wurzel der kubischen Gleichung

$$\frac{a^2}{\alpha^2+\sigma}+\frac{b^2}{\beta^2+\sigma}+\frac{c^2}{\gamma^2+\sigma}=1$$

verstanden werden soll, unmittelbar für $\frac{\partial T}{\partial a}$ oder die Komponente A, je nachdem der angezogene Punkt (a, b, c) im Innern oder im Äufseren des Ellipsoids α, β, γ liegt, die sich nur durch die unteren Grenzen 0 und σ der in ihnen vorkommenden elliptischen Integrale voneinander unterscheidenden Ausdrücke:

$$A=-\frac{a\pi^{\frac{3}{2}}}{\alpha^2\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{p}{2}\right)}\int_0^\infty\frac{ds\cdot s^{1-\frac{p}{2}}\cdot(1-S)^{1-\frac{p}{2}}}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)^3\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}},$$

bezw.

$$A=-\frac{a\pi^{\frac{3}{2}}}{\alpha^2\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{p}{2}\right)}\int_\sigma^\infty\frac{ds\cdot s^{1-\frac{p}{2}}\cdot(1-S)^{1-\frac{p}{2}}}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)^3\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}},$$

in denen S die Funktion (2) bedeutet und (obwohl sich auch hier wieder die Ungleichheit $2 < p < 4$ eingestellt hat) aus den S. 367 dargelegten Gründen dem Exponenten p jeder beliebige Wert in dem Intervall $2 < p < 3$ oder vielmehr, wie sich daselbst durch ein leichtes Raisonnement ergab, in dem Intervall

$$1 < p < 3$$

beigelegt werden darf.

Somit ist unsere Aufgabe gelöst.

142. Die Attraktionskomponenten des homogenen Ellipsoids für das Newtonsche Gesetz. — Aus den vorstehenden Resultaten ist auf den ersten Blick ersichtlich, dafs sich für das Naturgesetz

$$\varphi(r) = \frac{1}{r^2}, \quad \text{also} \quad p = 2$$

die Formeln gerade am allereinfachsten gestalten. Denn da alsdann $\frac{p}{2} = 1$ ist, so reducieren sich die Potenzen von s und $1 - S$ auf die Einheit, während sich das Produkt der Gammafunktionen unter Benutzung der Relation (5) des § 61 in

$$\Gamma(1 + \tfrac{1}{2}) \cdot \Gamma(1) = \tfrac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}$$

verwandelt.

Man erhält mithin für die Komponente A der Anziehung des Ellipsoids auf den inneren, bezw. den äufseren Punkt (a, b, c)

$$A = -\frac{2a\pi}{\alpha^2}\int\limits_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)^3\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}},$$

bezw.

$$A = -\frac{2a\pi}{\alpha^2}\int\limits_\sigma^\infty \frac{ds}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)^3\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}},$$

Ausdrücke, mit denen sich, wie jetzt gezeigt werden soll, die früher in § 134 auf einem anderen Wege gefundenen Resultate durch einfache Umformungen leicht identificieren lassen [86].

*Für die Attraktionskomponente A' des Ellipsoids α', β', γ' $(\alpha' < \beta' < \gamma')$ auf einen inneren Punkt (a', b', c') hatte sich S. 346 der Ausdruck ergeben

$$A' = -\frac{4\pi}{\alpha'^2}a'\int\limits_0^1 \frac{t^2\,dt}{\sqrt{\left(\frac{1}{\beta'^2}+\left(\frac{1}{\alpha'^2}-\frac{1}{\beta'^2}\right)t^2\right)\cdot\left(\frac{1}{\gamma'^2}+\left(\frac{1}{\alpha'^2}-\frac{1}{\gamma'^2}\right)t^2\right)}}.$$

Wir wenden nun auf dies Integral die Transformation an

$$t^2 = \frac{1}{1+\frac{s}{\alpha'^2}},$$

werden aber zur Erleichterung der Rechnungen den Koeffizienten der neuen Variablen s einfach mit m bezeichnen und erst in die Resultate seinen Wert $\frac{1}{\alpha'^2}$ einsetzen.

Dann hat man, wenn unter t die positive Wurzel aus t^2 verstanden werden soll,

$$t = \frac{1}{|\sqrt{1+ms}|}, \quad dt = -\frac{m}{2}\cdot\frac{ds}{(1+ms)^{\frac{3}{2}}},$$

$$t = 0, \; s = \infty; \quad t = 1, \; s = 0;$$

$$t^2\,dt = -\frac{m}{2}\cdot\frac{ds}{(1+ms)^{\frac{5}{2}}} = -\frac{1}{2\alpha'^2}\cdot\frac{ds}{\left(1+\frac{s}{\alpha'^2}\right)^{\frac{5}{2}}}$$

und für die beiden binomischen Faktoren des Radikanden

$$\frac{\frac{1}{\alpha'^2}+m\cdot\frac{1}{\beta'^2}s}{1+ms} = \frac{1}{\alpha'^2}\cdot\frac{1+\frac{s}{\beta'^2}}{1+\frac{s}{\alpha'^2}},$$

$$\frac{\frac{1}{\alpha'^2}+m\cdot\frac{1}{\gamma'^2}s}{1+ms} = \frac{1}{\alpha'^2}\cdot\frac{1+\frac{s}{\gamma'^2}}{1+\frac{s}{\alpha'^2}}.$$

Durch Substitution aller dieser Werte erhält man nach vollzogener Reduktion für A' den Ausdruck

$$A' = -2\pi\frac{a'}{\alpha'^2}\int\limits_0^\infty \frac{ds}{\left(1+\frac{s}{\alpha'^2}\right)\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha'^2}\right)\left(1+\frac{s}{\beta'^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma'^2}\right)}},$$

der, wie man sieht, völlig übereinstimmt mit dem aus unserer neuen Methode hergeleiteten Resultat für den inneren Punkt.

Da nun zwischen dieser Komponente A' und der entsprechenden Komponente A der Anziehung des mit dem Ellipsoid α', β', γ' konfokalen Ellipsoids α, β, γ $(\alpha < \beta < \gamma)$ auf den korrespondierenden äußeren Punkt (a, b, c) dem Ivoryschen Theorem zufolge die Relation besteht (s. S. 337)

$$A = \frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'} A',$$

so ergibt sich aus dem vorstehenden Ausdruck für A', wenn man zugleich noch

$$a' = \frac{a\alpha}{\alpha'}$$

einsetzt, für die Attraktionskomponente A auf den korrespondierenden äußeren Punkt (a, b, c) unmittelbar

$$A = -2\pi a \cdot \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha'\beta'\gamma'} \int_0^\infty \frac{ds}{(s+\alpha'^2)\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha'^2}\right)\left(1+\frac{s}{\beta'^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma'^2}\right)}}$$

$$= -2\pi a \cdot \alpha\beta\gamma \int_0^\infty \frac{ds}{(s+\alpha'^2)\sqrt{(s+\alpha'^2)(s+\beta'^2)(s+\gamma'^2)}}.$$

In dieses Integral führen wir nun vermittelst der Substitution

$$s = s' - \sigma,$$

durch welche in dem transformierten Integral die obere Grenze ∞ unverändert bleibt, die untere Grenze aber σ statt 0 wird, die Größe σ aus dem vorigen Paragraphen ein, d. i. (s. S. 371) die einzige positive Wurzel der kubischen Gleichung

$$\frac{a^2}{\alpha^2+\sigma} + \frac{b^2}{\beta^2+\sigma} + \frac{c^2}{\gamma^2+\sigma} = 1,$$

die, wenn man

$$\alpha'^2 - \alpha^2 = \sigma$$

setzt, mit der Gleichung (6_0) auf S. 343 (vergl. S. 364):

$$\frac{a^2}{\alpha'^2} + \frac{b^2}{\alpha'^2+\beta^2-\alpha^2} + \frac{c^2}{\alpha'^2+\gamma^2-\alpha^2} = 1,$$

zusammenfällt. Alsdann folgt aus den Relationen

$$\beta'^2 - \alpha'^2 = \beta^2 - \alpha^2, \quad \gamma'^2 - \alpha'^2 = \gamma^2 - \alpha^2$$

oder

$$\alpha'^2 - \alpha^2 = \beta'^2 - \beta^2 = \gamma'^2 - \gamma^2 = \sigma,$$

die zwischen den Halbachsen der beiden konfokalen Ellipsoide bestehen, unmittelbar

$$s = s' - \alpha'^2 + \alpha^2 = s' - \beta'^2 + \beta^2 = s' - \gamma'^2 + \gamma^2,$$

mithin

$$s + \alpha'^2 = s' + \alpha^2, \quad s + \beta'^2 = s' + \beta^2, \quad s + \gamma'^2 = s' + \gamma^2.$$

Durch Substitution dieser Werte in den obigen Ausdruck für die Komponente A erhält man aber, wenn wieder s statt s' geschrieben wird, auf der Stelle

$$A = -2\pi a \cdot \alpha\beta\gamma \int_\sigma^\infty \frac{ds}{(s+\alpha^2)\sqrt{(s+\alpha^2)(s+\beta^2)(s+\gamma^2)}}$$

$$= -2\pi \frac{a}{\alpha^2} \int_\sigma^\infty \frac{ds}{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}},$$

wodurch die vollständige Übereinstimmung der beiden auf den äufseren Punkt bezüglichen Resultate ebenfalls erwiesen ist.

---

*Zweites Kapitel.

Weitere Verwendbarkeit des diskontinuierlichen Faktors.

Das vielfache Integral $\iiint \cdots x^{a-1}dx\, y^{b-1}dy\, z^{c-1}dz \ldots$.

143. Reduktion des Integrals. — Zum Schlufs behandeln wir noch das in der Überschrift aufgeführte, vermittelst des diskontinuierlichen Faktors auf Gammafunktionen zurückführbare vielfache Integral, welches ganz besonders dazu geeignet ist, die grofse Fruchtbarkeit und die Vorzüge dieser Methode deutlich hervortreten zu lassen, indem es sich auf viele und schwierige Probleme der verschiedensten Art als anwendbar erweist und die Lösung derselben in hohem Grade erleichtert.

Unter der Voraussetzung, dafs sämtliche Variable und Konstanten

$$x, y, z, \ldots, \quad a, b, c, \ldots > 0$$

seien und der Umfang der Integrationen durch die Ungleichheit

$$x + y + z + \ldots < 1$$

bestimmt werde, verwandelt sich durch Einführung des dieser Grenzbedingung entsprechenden diskontinuierlichen Faktors

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi} \cdot \cos(x + y + z + \ldots)\varphi \cdot d\varphi$$

obiges Integral in das andere

$$\frac{2}{\pi}\overline{\underline{\iiiint}}_0^\infty \cdots x^{a-1}dx\, y^{b-1}dy\, z^{c-1}dz \ldots \frac{\sin\varphi}{\varphi}d\varphi \cos(x + y + z + \ldots)\varphi,$$

in dem zwar eine Integration mehr zu verrichten ist, aber (was durch die über und unter die Integralzeichen gesetzten Striche angedeutet werden soll) alle Integrale zwischen den so sehr vereinfachten Grenzen 0 und ∞ zu nehmen sind.

Wir denken uns nun zunächst noch einen anderen Faktor unter den Integralzeichen hinzu:

$$e^{-k(x+y+z+\ldots)} \qquad (k > 0),$$

von dem wir uns aber jeden Augenblick wieder befreien können, wenn wir — falls anders es erlaubt ist — die Konstante $k = 0$ setzen. Dann haben wir also

$$\frac{2}{\pi}\overline{\underline{\iiiint}}_0^\infty \cdots e^{-k(x+y+z+\ldots)} x^{a-1}dx\, y^{b-1}dy\, z^{c-1}dz \ldots \frac{\sin\varphi}{\varphi}d\varphi$$
$$\times \cos(x + y + z + \ldots)\varphi.$$

Dieser Ausdruck ist augenscheinlich rein reell; daher ist es aber auch erlaubt, den $\cos(x + \ldots)\varphi$ durch die imaginäre Exponentialgröfse

$$e^{(x+y+z+\ldots)\varphi\cdot i} = \cos(x + \ldots)\varphi + i \cdot \sin(x + \ldots)\varphi$$

zu ersetzen, indem man alsdann, um den verlangten Ausdruck zu erhalten, vom Resultat nur den reellen Teil zu nehmen hat. So kommt

$$\frac{2}{\pi}\overline{\underline{\iiiint}}_0^\infty \cdots e^{-(k-\varphi i)\cdot(x+y+z+\ldots)} x^{a-1}dx\, y^{b-1}dy\, z^{c-1}dz \ldots \frac{\sin\varphi}{\varphi}d\varphi.$$

Hier ist nun die Exponentialgröfse in einzelne Faktoren zerlegbar, deren jeder nur eine der Variablen $x, y, z, \ldots$ enthält:

$$e^{-(k-\varphi i)x} \cdot e^{-(k-\varphi i)y} \ldots,$$

wodurch überhaupt eine vollständige Trennung dieser Gröfsen in der Integralfunktion sich bewerkstelligen läfst und völlig gleichgestaltete Ausdrücke für dieselben erhalten werden, wie z. B.

$$e^{-(k-\varphi i)x}\, x^{a-1}\, dx.$$

Demzufolge können diese Integrationen sämtlich successive und wegen der konstanten Grenzen in beliebiger Ordnung, jede einzelne nach der Eulerschen Formel des § 71

$$\int_0^\infty e^{-(k-\varphi i)x}\, x^{a-1}\, dx = \frac{\Gamma(a)}{(k-\varphi i)^a} \qquad (k,\ a > 0)$$

ausgeführt werden, indem man währenddes immer alle anderen Variablen als fest betrachtet. Somit ist unser letztes vielfaches Integral, wenn zur Abkürzung noch

$$a + b + c + \ldots = m$$

gesetzt wird, offenbar gleich

$$\Gamma(a) \cdot \Gamma(b) \cdot \Gamma(c) \cdots \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\varphi \cdot \frac{\sin\varphi}{\varphi} \cdot \frac{1}{(k-\varphi i)^m}.$$

Wendet man nun genau dieses Resultat auf eine einzige Variable an [87]) — denn die Anzahl der Variablen in unserem vielfachen Integral ist ja ganz beliebig —, so erhält man:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(k-\varphi i)x}\, x^{m-1}\, dx \cdot \frac{\sin\varphi}{\varphi}\, d\varphi = \Gamma(m) \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{(k-\varphi i)^m},$$

wovon jetzt der reelle Teil, den wir allein gebrauchen, aufzusuchen ist.

Von dem Ausdruck links ist derselbe

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\varphi\, \frac{\sin\varphi}{\varphi} \int_0^\infty \cos\varphi x \cdot e^{-kx}\, x^{m-1}\, dx,$$

reduciert sich aber, [da er wegen des in ihm enthaltenen diskontinuierlichen Faktors in dem ganzen auf x bezüglichen Intervall von 1 bis ∞ verschwindet, für das übrigbleibende Intervall von $x = 0$ bis $x = 1$ (wo jener Faktor $= 1$ ist) auf das einfache Integral

$$\int_0^1 e^{-kx}\, x^{m-1}\, dx.$$

Daraus folgt, dafs der reelle Teil von dem auf der rechten Seite unserer letzten Gleichung befindlichen Ausdruck

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{(k-\varphi i)^m}$$

gleich ist

$$\frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^\infty e^{-kx}\, x^{m-1}\, dx.$$

Mithin hat man, wenn dies Resultat wieder über sämtliche ursprünglich gegebenen Variablen $x, y, z, \ldots$ erstreckt wird, unter allen obigen Bedingungen die exakte Gleichung

$$\iiint\cdots x^{a-1}\,dx\, y^{b-1}\,dy\, z^{c-1}\,dz \ldots e^{-k(x+y+z+\ldots)}$$
$$= \frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)\cdot\Gamma(c)\cdots}{\Gamma(m)}\int_0^1 e^{-kx}\, x^{m-1}\, dx.$$

Hier ist es aber nach einem früheren Prinzipe [§ 41, 1) und § 43] sowohl links als rechts erlaubt, k bis ins Unendliche abnehmen zu lassen oder $= 0$ zu setzen, wodurch beide Exponentialgröfsen sich auf die Einheit reducieren und das Integral auf der rechten Seite einfach

$$\int_0^1 x^{m-1}\, dx = \frac{1}{m}$$

wird. Demnach ergibt sich, wenn man noch die bekannte Relation $m\Gamma(m) = \Gamma(1+m)$ anwendet und für m wieder seinen Wert $a+b+c+\ldots$ einsetzt, die Formel:

$$\iiint\cdots x^{a-1}dx\cdot y^{b-1}dy\cdot z^{c-1}dz\cdots = \frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)\cdot\Gamma(c)\cdots}{\Gamma(1+a+b+c+\ldots)}$$
$$(a, b, c, \ldots, x, y, z, \ldots > 0),$$

mit der Grenzbedingung

$$x+y+z+\ldots < 1.$$

144. Transformation des Integrals. — Vermittelst der Substitutionen

$$x = \left(\frac{x'}{\alpha}\right)^p,\quad y = \left(\frac{y'}{\beta}\right)^q,\quad z = \left(\frac{z'}{\gamma}\right)^r, \ldots \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \ldots > 0),$$

also

$$dx = \frac{p}{\alpha^p} x'^{p-1} dx', \quad x^{a-1} dx = \frac{p\, x'^{ap-1}}{\alpha^{ap}} dx', \ldots,$$

nimmt das Resultat des vorigen Paragraphen die sehr brauchbare Gestalt an

$$\iiint \cdots x^{ap-1} dx \cdot y^{bq-1} dy \cdot z^{cr-1} dz \cdots$$
$$= \frac{\alpha^{ap}}{p} \cdot \frac{\beta^{bq}}{q} \cdot \frac{\gamma^{cr}}{r} \cdots \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b) \cdot \Gamma(c) \cdots}{\Gamma(1 + a + b + c + \ldots)}$$
$$(a, b, c, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots, x, y, z, \ldots > 0),$$

mit der Grenzbedingung

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p + \left(\frac{y}{\beta}\right)^q + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^r + \ldots < 1.$$

Da aber nun $a, b, c, \ldots$ beliebig positiv sind, so kann man für diese Gröfsen auch, wofern nur auch noch $p, q, r, \ldots$ beliebig positiv vorausgesetzt werden, respective $\frac{a}{p}, \frac{b}{q}, \frac{c}{r}, \ldots$ schreiben, wodurch die Gleichung die noch einfachere Form erhält:

$$\iiint \cdots x^{a-1} dx \cdot y^{b-1} dy \cdot z^{c-1} dz \cdots$$
$$= \frac{\alpha^a}{p} \cdot \frac{\beta^b}{q} \cdot \frac{\gamma^c}{r} \cdots \frac{\Gamma\left(\frac{a}{p}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{b}{q}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{c}{r}\right) \cdots}{\Gamma\left(1 + \frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} + \ldots\right)}$$
$$(a, b, c, \ldots, p, q, r, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots, x, y, z, \ldots > 0),$$
$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p + \left(\frac{y}{\beta}\right)^q + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^r + \ldots < 1.$$

Diese Formel, die sich zur Lösung zahlreicher Probleme als anwendbar erweist, enthält eine Fülle von Resultaten in sich, von denen in den folgenden Paragraphen einige hergeleitet werden sollen.

Anwendungen der Formel.

145. Körperberechnungen. — Beschränkt man sich auf ein dreifaches Integral (mit den Variablen x, y, z) und setzt aufserdem

$$a, b, c = 1,$$

so verwandelt sich die eben erhaltene Formel in

$$(V) \qquad \iiint dx\,dy\,dz = \frac{\alpha\beta\gamma}{pqr} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)}$$

und drückt mithin das Volumen des Körpers aus, der durch die auf senkrechte Koordinaten bezogene Grenzbedingung

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p + \left(\frac{y}{\beta}\right)^q + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^r < 1$$

definiert ist.

Beispiele. — 1) Es sei

$$p = q = r = 1,$$

also die den Körper bestimmende Ungleichheit

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} < 1,$$

durch welche, wie sich leicht ergibt, eine Pyramide abgegrenzt wird, die zur Basis ein rechtwinkliges Dreieck von den Katheten α und β, und zur Höhe γ hat, deren Inhalt mithin $= \frac{1}{6}\alpha\beta\gamma$ ist. Und in der That liefert die vorstehende Formel, die für die gegebenen Werte sich auf

$$\iiint dx\,dy\,dz = \alpha\beta\gamma \cdot \frac{1}{\Gamma(4)}$$

reduciert, dasselbe Resultat, da $\Gamma(4) = 3! = 6$ ist.

2) Hat man

$$p = q = r = 2,$$

so drückt unsere Grenzbedingung

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} < 1$$

das Ellipsoid α, β, γ aus, dessen Inhalt bekanntlich $\frac{4}{3}\pi\alpha\beta\gamma$ ist. Und in der That ergibt sich alsdann aus (V) unter Berücksichtigung der Relationen (3) und (5) auf S. 110:

$$\iiint dx\,dy\,dz = \frac{\alpha\beta\gamma}{8} \cdot \frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^3}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{\alpha\beta\gamma\cdot\pi\sqrt{\pi}}{8\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{1}{6}\alpha\beta\gamma\pi,$$

wie es auch sein mufs, da in dieser Formel x, y, z nur positiv zu nehmen sind, also nur der achte Teil des Ellipsoids resultiert.

3) Für

$$p = q = r = 4,$$

also

(1) $$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^4 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^4 + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^4 < 1$$

und

(2) $$\iiint dx\,dy\,dz = \frac{\alpha\beta\gamma}{4^3} \cdot \frac{(\Gamma(\frac{1}{4}))^3}{\frac{3}{4} \cdot \Gamma(\frac{3}{4})} = \frac{\alpha\beta\gamma}{48} \cdot (\Gamma(\tfrac{1}{4}))^2 \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})}$$

erhält man aus dieser letzteren Gleichung das Volumen des Körpers, der begrenzt wird von der der Ungleichheit (1) zugehörigen Fläche vierten Grades.

Der auf der rechten Seite der Gleichung befindliche Ausdruck läſst sich auf ein bestimmtes Integral zurückführen, dem eine geometrische Bedeutung zukommt.

Man hat nämlich zunächst auf Grund der Formel $\frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = (a, b)$ des § 60:

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{4}) \cdot \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{4})} = \int_0^1 x^{\frac{1}{4}-1} \cdot (1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx \quad [\text{S. } 104, (\text{I}_0)],$$

mithin wegen $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 x^{\frac{1}{4}-1} (1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx,$$

und wenn man hier in dem Integral

$$x = z^4, \quad \text{also} \quad x^{\frac{1}{4}-1}\,dx = 4\,dz$$

setzt,

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}.$$

Wir wollen nun zeigen, daſs dieses Integral $\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$ die Länge des ganzen Bogens der durch die Polargleichung

(L) $$r^2 = \cos 2\varphi$$

definierten Lemniskate von ihrem Doppelpunkt bis zum Scheitel darstellt.

In der That, das in Polarkoordinaten ausgedrückte Bogenelement einer beliebigen ebenen Kurve wird bekanntlich durch die Formel gegeben

$$ds = \sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2} \cdot dr.$$

Aus (L) gewinnt man aber

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{r}{\sin 2\varphi} = -\frac{r}{\sqrt{1-r^4}},$$

woraus für das Bogenelement der Lemniskate sich

$$ds = \sqrt{1 + \frac{r^4}{1-r^4}}\,dr = \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}$$

ergibt. Weiter folgt aus der Diskussion von (L), daſs r, welches natürlich im Doppelpunkt als dem Pole $= 0$ ist, für den Scheitel der Lemniskate, wo $\varphi = 0$, den Wert 1 besitzt; daſs hingegen φ im Doppelpunkt, wo $\cos 2\varphi = 0$, gleich $\frac{\pi}{4}$ ist. Während also in diesem ganzen Intervall φ beständig abnimmt, wächst in demselben r stetig von 0 bis 1. Der diesem Intervall zugehörige Bogen der Lemniskate wird demnach erhalten, wenn man das für ds gefundene Differentialelement nach r zwischen den Grenzen 0 und 1 integriert.

Zur Abkürzung möge dieser Bogen durch A bezeichnet werden. Dann hat man also, indem wir jetzt die Auswertung der rechten Seite der (2) wieder aufnehmen,

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = A, \quad \text{mithin} \quad \frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}A,$$

und wenn wir diese Relation mit der anderen, aus Formel (2) auf S. 110 hergeleiteten:

$$\Gamma(\tfrac{1}{4}) \cdot \Gamma(\tfrac{3}{4}) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \pi\sqrt{2},$$

multiplicieren,

$$\left(\Gamma(\tfrac{1}{4})\right)^2 = 4\sqrt{2\pi} \cdot A.$$

Werden diese Ausdrücke in (2) eingesetzt, so ergibt sich als Inhalt unseres Körpers

$$\iiint dx\,dy\,dz = \frac{\alpha\beta\gamma}{48} \cdot 4\sqrt{2\pi} \cdot A \cdot \frac{4}{\sqrt{\pi}}A = \frac{\alpha\beta\gamma}{3}\sqrt{2} \cdot A^2,$$

worunter aber wiederum, wie im vorangehenden Beispiel, nur der achte Teil seines Volumens zu verstehen ist.

146. Herleitung der zwischen (a, b) und $\Gamma(a)$ bestehenden Relation des § 60. — Auf zwei Variable reduciert, lautet die allgemeine Formel des § 144:

$$\iint x^{a-1}\,dx\,y^{b-1}\,dy = \frac{\alpha^a}{p}\cdot\frac{\beta^b}{q}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{a}{p}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{b}{q}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{a}{p}+\frac{b}{q}\right)}$$

für

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p + \left(\frac{y}{\beta}\right)^q < 1,$$

und wenn hier noch

$$p, q, \alpha, \beta = 1$$

gesetzt wird:

$$\iint x^{a-1}\,dx\,y^{b-1}\,dy = \frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(1+a+b)} \qquad (a, b, x, y > 0)$$

mit der Grenzbedingung

$$0 < x + y < 1.$$

Bei dieser vereinfachten Grenzbedingung läfst sich aber eine beliebige der beiden Integrationen bewerkstelligen, z. B., während x als konstant angesehen wird, die nach y von 0 bis $1-x$ zu erstreckende. Das gibt für das zwischen diesen Grenzen genommene unbestimmte Integral $\int y^{b-1}\,dy = \frac{1}{b}y^b + C$

$$\int_0^{1-x} y^{b-1}\,dy = \frac{(1-x)^b}{b}.$$

Es bleibt mithin noch der Ausdruck $\frac{x^{a-1}(1-x)^b}{b}$ nach x zwischen den Grenzen 0 und 1 zu integrieren, was

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^b\,dx = (1+b, a) = \frac{b\cdot\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(1+a+b)}$$
$$= \frac{\Gamma(1+b)\cdot\Gamma(a)}{\Gamma(1+b+a)}$$

gibt und nichts anderes ist als die Formel des § 60.

147. Bestimmung von Trägheitsmomenten. — Auch Probleme der Mechanik, z. B. Schwerpunktsberechnungen und die Bestimmung von Trägheitsmomenten, können vermittelst der allgemeinen Formel des § 144 ohne alle Schwierigkeit gelöst werden. Das wollen wir noch durch Herleitung der für das Trägheitsmoment, das bei allen Bewegungsproblemen eine so grofse Rolle spielt, gültigen Formel des näheren darthun.

Unter Trägheitsmoment eines Körpers versteht man die Summe aller seiner Massenelemente, ein jedes multipliciert mit dem Quadrate seiner Entfernung von der (dritten senkrechten) Koordinatenachse der z. Setzen wir also den Körper homogen und seine Dichtigkeit gleich 1 voraus, so dafs sein Massenelement $dx\,dy\,dz$ ist, so hat man für das Trägheitsmoment, das durch T bezeichnet werden möge,

$$T = \iiint (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz = \iiint x^2\,dx\,dy\,dz + \iiint y^2\,dx\,dy\,dz.$$

Jedes der beiden Integrale rechts macht einen speciellen Fall der auf drei Variable beschränkten Formel des § 144 aus. Auf das erste Integral reduciert sich diese Formel für $a = 3$, $b = c = 1$, auf das zweite für $b = 3$, $a = c = 1$. So erhält man für das Trägheitsmoment des durch die Grenzbedingung

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p + \left(\frac{y}{\beta}\right)^q + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^r < 1$$

gegebenen Körpers den Ausdruck

$$T = \frac{\alpha^3}{p} \cdot \frac{\beta}{q} \cdot \frac{\gamma}{r} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{p}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{q}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{r}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{3}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right)}$$

$$+ \frac{\alpha}{p} \cdot \frac{\beta^3}{q} \cdot \frac{\gamma}{r} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{q}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{r}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{p} + \frac{3}{q} + \frac{1}{r}\right)}.$$

Als Beispiele wählen wir dieselben drei Körper, deren Volumina wir in § 145 berechnet haben.

1) Für die daselbst betrachtete dreiseitige Pyramide

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} < 1$$

hat man

$$p = q = r = 1$$

und folglich

$$T = \alpha^3\beta\gamma \cdot \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(6)} + \alpha\beta^3\gamma \cdot \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(6)} = \alpha\beta\gamma \cdot \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5}(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$= \frac{\alpha\beta\gamma}{60}(\alpha^2 + \beta^2).$$

2) Für das Ellipsoid

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} < 1$$

hat man

$$p = q = r = 2,$$

also

$$T = \frac{\alpha\beta\gamma}{8} \cdot \frac{\Gamma(\frac{3}{2}) \cdot (\Gamma(\frac{1}{2}))^2}{\Gamma(3 + \frac{1}{2})} \cdot (\alpha^2 + \beta^2)$$
$$= \frac{\alpha\beta\gamma}{8} \cdot \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \cdot \pi}{\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi}} \cdot (\alpha^2 + \beta^2)$$
$$= \frac{\alpha\beta\gamma}{30} \pi (\alpha^2 + \beta^2).$$

3) Für den Körper

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^4 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^4 + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^4 < 1$$

ist

$$p = q = r = 4,$$

also unter Berücksichtigung der Relation $\Gamma(\frac{3}{4}) \cdot \Gamma(\frac{1}{4}) = \pi\sqrt{2}$ (s. S. 382) und der Reduktionsformel (I), S. 106:

$$T = \frac{\alpha\beta\gamma}{4^3} \cdot \frac{\Gamma(\frac{3}{4}) \cdot (\Gamma(\frac{1}{4}))^2}{\Gamma(2 + \frac{1}{4})} \cdot (\alpha^2 + \beta^2)$$
$$= \frac{\alpha\beta\gamma}{4^3} \cdot \frac{\pi\sqrt{2} \cdot \Gamma(\frac{1}{4})}{\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})} \cdot (\alpha^2 + \beta^2)$$
$$= \frac{1}{20}\pi\sqrt{2} \cdot \alpha\beta\gamma (\alpha^2 + \beta^2).$$

In Bezug auf die letzten beiden Resultate ist wie in § 145 zu bemerken, daſs sie nur den achten Teil des Trägheitsmomentes des betreffenden Körpers darstellen, nämlich bloſs das Trägheitsmoment für denjenigen Teil des Körpers, in dem x, y, z positiv sind.

Anmerkungen.

Die Hinweise auf das „Heft" beziehen sich auf des Herausgebers ursprüngliche, dem Buche zu Grunde liegende Ausarbeitung der Dirichletschen Vorlesung.

Anmerkungen zum ersten Teil.

[1]) § 3, S. 11. Statt dessen heifst es im Heft: „wo stets hinzuzufügen ist, auf welchen Wert der Veränderlichen sich der limes bezieht"; s. die Vorrede, S. VII.

[2]) § 6, S. 16. Im Heft steht: in einer „endlichen" Reihe.

[3]) Ebenda, S. 17. Im Heft wird noch besonders hervorgehoben, dafs der Wert der Reihe S, solange die Anzahl ihrer Glieder endlich ist, nicht feststeht, sondern sich gleichzeitig mit den $n - 1$ Zwischenwerten ändert.

[4]) § 14, S. 26. Diese Sätze wurden erst gelegentlich der in § 75 behandelten Aufgabe entwickelt, wobei aber Dirichlet selbst bemerkte, dafs sie wohl schon im früheren öfters angewandt worden wären.

[5]) Ebenda. Eigener Zusatz.

[6]) § 15, S. 27. Der Angabe Kroneckers („Vorlesungen über die Theorie der einfachen und vielfachen Integrale", herausgegeben von E. Netto, Leipzig 1894, S. 55), dafs zuerst P. du Bois-Reymond die Bezeichnung „Mittelwertsätze" angewandt habe, ist entgegenzuhalten, dafs auch schon Dirichlet in seiner Vorlesung diesen Satz immer den „Satz vom Mittelwert" des bestimmten Integrals nannte. Übrigens hat du Bois (s. seine Doktordissertation „De aequilibrio fluidorum", Berolini 1859, S. 21) bei Dirichlet nur die Vorlesung über die partiellen Differentialgleichungen gehört.

[7]) § 15, S. 28. Dies wurde in der Vorlesung noch des näheren erläutert.

[8]) § 18, S. 31. Hier wurde noch auf die Bedeutung hingewiesen, welche man früher und schon im Altertum mit diesem Worte verband.

[9]) § 27, S. 47. Die Entwicklungen dieses Paragraphen sind im Heft etwas kürzer gefafst.

[10]) § 29, S. 50. Die Notwendigkeit dieser Forderung wurde in der Vorlesung nur an einzelnen Beispielen:

$$\frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}, \quad \frac{ax^2 + bx + c}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}, \quad \frac{ax^{n-1} + \ldots}{\alpha x^n + \ldots}, \quad c \cdot \frac{1}{x^2}$$

näher erwiesen. Statt dessen ist der Versuch gemacht worden, den Beweis allgemein zu führen.

[11]) § 30, S. 51. Diese zweite Verifikationsmethode stammt aus der Vorlesung d. J. 1852, wo sie zur Herleitung der Formel (3) des § *91 in Anwendung gebracht wurde.

[12]) § 31, S. 55. Zur weiteren Begründung dieser Behauptung wird im Heft noch hinzugefügt, dafs $\frac{\theta}{n}$, *a fortiori* $\frac{2\pi-\theta}{n}$ in keinem Falle den Wert π erreichen kann, da ja θ nur bis zu 2π gehen darf und n wenigstens $= 2$ sein mufs, also $\frac{2\pi}{n}$ höchstens $= \pi$ ist.

[13]) § 36, S. 63. Im Heft heifst es nur: „weil dann die gebrochene Potenz entweder (wenn p gerade) lauter imaginäre Werte oder doch keinen so ausgezeichneten reellen Wert hätte wie die Wurzel aus jeder positiven Zahl, den man dann fast immer allein im Auge hat."

[14]) Ebenda, S. 64. Die Worte „und ihr Quotient, also auch der sinus" sind eigener Zusatz.

[15]) § 41, S. 73. Im Heft steht fälschlich: $\frac{1}{k\cdot 0} = \infty$.

[16]) S. 76, Überschrift vor § 43. Aus den Angaben des Heftes geht nicht deutlich hervor, dafs sich die Ausführungen der folgenden beiden Paragraphen speciell auf diesen Fall beziehen sollen.

[17]) § 45, S. 81. „aufser für $x = 0$" (Z. 6 v. o.) und „da man es für $x = 0$ mit speciellen Fällen der Formel (4) des § 41 zu thun hat" sind eigene Zusätze.

[18]) § 46, S. 86. Dieser Wert ist $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (s. § 75).

[19]) § 47, S. 91. Im Heft steht nur: man hat in diesem Falle in den Grenzwerten von M $-\frac{2}{\alpha}$ statt $\frac{2}{\alpha}$ zu schreiben.

[20]) § 54, S. 101. „oder auch nur $= 0$" und „bezw. x^{-1}" sind eigene Zusätze.

[21]) Ebenda, S. 102. Statt dieses Alinea heifst es im Heft nur: Aus denselben Gründen darf in dem Integral (I) a nicht negativ sein.

[22]) Ebenda, S. 103. Im Heft: „so grofs auch immer a sei".

[23]) § 56, S. 104. Dieser Satz war in § 6 der „Anwendungen" bereits bewiesen worden, ehe er hier zur Sprache kam. s. S. 472, Anm. 1.

[24]) § 59, S. 107. Ohne dieses hinzugefügte Alinea würde die Darstellung eine Lücke aufweisen, deren Ergänzung unerläfslich erschien, da doch auf die Existenz eines Minimalwertes der Gammafunktion wenigstens hingedeutet werden mufste. Auffällig ist es, dafs auch bei Meyer der § 46: „Minimum der Funktion $\Gamma(a)$" nicht auf Dirichlet zurückgeführt wird.

[25]) § 59, ebenda. Von „da seine" an eigener Zusatz.

[26]) § 60, S. 109. Eigener Zusatz.

[27]) § 61, ebenda. Dieser Paragraph beginnt im Heft mit der Bemerkung: Die Formel des vorigen Paragraphen: $(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ lehrt uns auch in den speciellen Fällen, wo (a, b) bekannt ist, besondere Eigenschaften der Gammafunktion kennen.

[28]) § 62, S. 111. Diese Begriffserweiterung der Gammafunktion wurde in der Vorlesung erst bei Gelegenheit der Aufgabe des § 87 behandelt.

29) § 64, S. 121. Von „deren Wert man“ an eigener Zusatz.

30) Ebenda, S. 122. Statt dieses Alinea im Heft nur: $k = \log p$, $l = \log q$.

31) Ebenda, S. 123. Die auf n bezügliche Bemerkung ist eigener Zusatz.

32) § 65, S. 126. Dieses Vorhaben ist aus Zeitmangel unausgeführt geblieben. Vergl. § 104.

33) Ebenda, S. 127. Dafür im Heft: „Ob aber die Summe noch denselben Sinn hat, oder ob es noch dasselbe Integral ist“, wissen wir nicht.

34) Ebenda, S. 128. Statt dieses Satzes im Heft: In sehr vielen Fällen ist die Substitution erlaubt, also das bestimmte Integral ebenso für imaginäre wie für reelle Werte des Parameters gültig. In anderen Fällen ist sie nicht gestattet.

35) Ebenda, S. 129. Die Worte: „Die Berechtigung zu dieser Substitution geht schon daraus hervor, dafs“ sind eigener Zusatz.

36) Ebenda, S. 130. Dafür Dirichlet: „es wäre gar nichts“.

37) § 66, S. 132. Hier war eine Richtigstellung verworrener und offenbar falscher Angaben des Originals geboten.

38) Ebenda, S. 135. In der folgenden Betrachtung setzte Dirichlet x, y positiv und den Anfangswert von φ_0 im ersten oder fünften oder allgemein im $(2k+1)^{\text{ten}}$ Quadranten voraus, so dafs der Winkel bei der Bewegung nach der OY hin $= \frac{\pi}{2}$ wird. Die Verallgemeinerung dieses Falles bot aber keine Schwierigkeit und dürfte die Klarheit der Darstellung nicht beeinträchtigt haben.

39) Ebenda, S. 137. Hier folgt im Heft noch eine nur unvollständig wiedergegebene Bemerkung Dirichlets: „Noch genauer wäre es wohl, zu berücksichtigen, wie lange sich der Punkt in demselben Sinne fortbewegt hat ...“

40) Ebenda. Von „oder aus dem Negativen“ an eigener Zusatz zur Ergänzung einer im Heft angedeuteten Lücke.

41) Ebenda. Statt dieses Alinea heifst es im Heft: „Gleichzeitig mit φ_0 ist auch die Exponentialgröfse $e^{\frac{m}{n}\varphi_0 i}$ und weiter (über $\varrho^{\frac{m}{n}}$ s. o.) der ganze Faktor $\varrho^{\frac{m}{n}} e^{\frac{m}{n}\varphi_0 i}$ einwertig und stetig.“ Dann geht es aber, nicht völlig im Einklang mit dem bisher eingehaltenen Gedankengange, so weiter: „So also kompromittiert uns hier die stetige Veränderung von φ_0 nicht, da wir immer noch das beliebige s in dem letzten Faktor $e^{2s\frac{m\pi}{n}i}$ haben. Soll mithin der ganze Ausdruck (3), in dem s nur die n daselbst angegebenen, sich unstetig folgenden ganzen Zahlenwerte annehmen kann, stetig sein, so erfordert das notwendig Konstanz von s, wie auch schon oben bemerkt wurde, denn bei einer möglichen Änderung von s kommt ein Faktor hinzu, der nicht $= 1$ ist, also den Ausdruck um etwas Endliches ändert. Setzt man nämlich $s + \nu$ für s, wo $\nu = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ sein kann, so tritt in der (3) der Faktor $e^{\frac{\nu}{n}\cdot 2m\pi i}$ hinzu.“ Hierauf folgt, was S. 138, Z. 14 bis 23, steht, woraus alsdann wie im Text, S. 137, Z. 9ff. v. u., gefolgert

wird: „Somit ist jede bestimmte der n Wurzeln (3) stetig veränderlich in dem ganzen Umfange der Werte von x und y. Und die Möglichkeit hiervon haben wir auch nicht bestritten."

[42]) Ebenda, S. 138. „falls m ungerade, $\frac{\nu}{n} = \frac{1}{2}$" und weiter oben „oder $s - \nu$" und „$\nu = n$" sind eigene Zusätze.

[43]) Ebenda, S. 139. In $e^{\frac{\nu}{n} \cdot 2m\pi i}$ und in $2\nu\pi$ steht im Heft vor ν immer nur das Zeichen $+$. Dafür wird aber besonders bemerkt, dafs für Umläufe in entgegengesetzter Richtung ν negativ zu nehmen wäre.

[44]) Ebenda. Eigener Zusatz.

[45]) § 67, S. 139. Im Heft ist noch hinzugesetzt: „konform der obigen Annahme, dafs der Anfangspunkt A positive Koordinaten und B wenigstens positive x habe." Vergl. Anm. 38.

[46]) Ebenda. Dirichlet: „Dieser Hokuspokus hindert nun nicht", dafs . . .

[47]) § 68, S. 145. Die Sätze der §§ 69 und 70 fanden in der Vorlesung ihre Stelle erst innerhalb des § 87.

[48]) § 71, S. 148. Eigene Ergänzung einer im Heft durch „etc. . . ." angedeuteten Lücke.

[49]) § 74, S. 159, Z. 2 v. o. Statt $|\theta|^a$ wandte Dirichlet die Bezeichnung an: $(\pm\,\theta)^a$ $(\theta \gtreqless 0)$, mit dem erklärenden Zusatz, dafs dadurch nur angedeutet werden soll, dafs immer der absolute Wert von θ zu nehmen ist. — Bei der Benutzung der Formel (2) (in der übrigens links in $e^{-\theta x i}$ das Minuszeichen zu streichen ist — s. das „Druckfehlerverzeichnis") in den §§ 140, 141 erschien es jedoch zweckmäfsiger, die Bezeichnungsweise Dirichlets beizubehalten.

[50]) § 75, S. 160. Eigener Zusatz.

[51]) § 80, S. 169. Das ganze Alinea eigener Zusatz.

[52]) § 81, S. 176. Dafür im Heft: Und dasselbe gilt für das zweite Teilintegral, wenn man es ebenso behandelt.

[53]) § 84, S. 182. „und in den Integralen ... umgekehrt wird" eigener Zusatz. Im Heft wird übrigens auch ein negatives k in diese Bemerkung einbezogen: „die Integrale ändern sich nicht, wenn man c oder k oder beide zugleich negativ nimmt".

[54]) § 85, S. 183. Im Heft steht nur: Für $n = 1$ sind die Formeln des § 84 anzuwenden.

[55]) § *92, S. 193. In der Vorlesung des Jahres 1854 wurden diese beiden Integrale erst im achten Abschnitt abgeleitet. s. Anm. 84.

[56]) § 95, S. 200. Hier steht im Heft noch: „dann ist es aber vorteilhafter, gleich die früheren betreffenden Formeln anzuwenden". Welche Formeln gemeint sind, habe ich nicht herausgefunden.

[57]) Ebenda. Die Bedingung $\gamma > 0$ ist im Heft wohl nur versehentlich wieder gestrichen.

[58]) § 97, S. 205. Der numerische Wert des negativen $p|\sqrt{k}| - \frac{a}{|\sqrt{k}|}$ wurde von Dirichlet in ähnlicher Weise durch $\left(p\sqrt{k} - \frac{a}{\sqrt{k}}\right)$ bezeichnet.

[59]) § 99, S. 209. In der Vorlesung d. J. 1854 wurden diese Formeln erst hier entwickelt.

[60]) § 101, S. 212. Da Dirichlet im Vortrage sich anfänglich dahin geäufsert hatte, dafs für das ursprüngliche Integral $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-kx}\,dx}{1+x^2}$ diese Verwandlung in eine Reihe nicht ausführbar sei, so liegt die Vermutung nahe, dafs er auf die in Nr. 2 gegebene Entwicklung erst in der Zwischenzeit von einer zur anderen Vorlesungsstunde verfallen ist. Auch sonst ist aus den Kollegienheften leicht zu konstatieren, dafs ebenso manche andere Dirichletsche Entwicklungen erst durch die Vorlesungen selbst angeregt worden sind. Vergl. „Anwendungen", S. 473, Anm. 8.

[61]) § 102, *1, S. 216. § 52, *3 und § *93, in denen solche Differentiationen vorkommen, stammen aus der Vorlesung d. J. 1852.

[62]) Ebenda. In der Vorlesung d. J. 1854 hiefs es: „Die zahlreichen Beispiele zu dieser Methode übergehen wir hier gänzlich, behalten uns aber vor, sie später nachzutragen", wozu es jedoch nicht mehr gekommen ist.

[63]) § *103, S. 219. Daneben findet sich im Heft noch folgende Beweisführung: Die Integrale der Gleichungen (1_0), (2_0) enthalten nur je eine willkürliche Konstante, so dafs man etwa setzen kann:

$$u = F(m, \theta) + C, \quad v = F(m, \theta) + C',$$

also

$$u - v = C - C',$$

wo $C - C'$ konstant bleibt, wie auch θ sich ändere. Für $\theta = 0$ hat man aber $u - v = C - C' = 0$, also ist überhaupt $u - v = 0$.

Anmerkungen zum zweiten Teil.

[64]) § 105, S. 223. Eigener Zusatz.

[65]) Ebenda, S. 226. Von „Unter diese Auffassung" an eigener Zusatz.

[66]) § 108, S. 234. In der Vorlesung wurde die Formel abgeleitet, und zwar in der aus Fig. 20 ersichtlichen Weise (also ohne Zuhülfenahme des Trapezes $AA'BB'$). Da aber im übrigen die Entwicklung natürlich nichts Eigentümliches darbietet und heutzutage jeder angehende Student — was übrigens auch schon damals sehr vielfach der Fall war — diese elementaren Vorkenntnisse aus dem Gymnasialkursus mitbringt, so erschien die Ausführung der Rechnung überflüssig. — Dafs der numerische Wert der Differenz $xy_1 - x_1y$ statt durch $|xy_1 - x_1y|$ durch $\pm(xy_1 - x_1y)$ bezeichnet wurde, bedarf kaum der Erwähnung. Vergl. Anm. 49.

[67]) Ebenda, S. 235. Dies ist im Heft noch durch Auflösung des Systems $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$ erläutert.

[68]) § 109, S. 239. Im Heft steht hier noch die mir nicht recht verständliche Bemerkung: „wie es ja auch der Fall sein mufs, da schon immer die einfachen Integrale als Flächenräume ausdrückend anzusehen sind".

[69]) Ebenda, S. 243. Durch Hinzufügung der zweiten Fig. 24 wurde eine erhebliche Abkürzung der im Heft hier noch weit ausführlicheren Darstellung ermöglicht.

[70]) § 111, S. 247. Im Heft heifst es hier: „Zunächst beschäftigen wir uns mit dem Problem der Komplanation." Diese und andere Stellen (vergl. z. B. Anm. 32, 62 und 71) zeigen, dafs Dirichlet ursprünglich gehofft

hatte, noch eine Reihe anderer Fragen in der Vorlesung zur Sprache bringen zu können.

[71]) § 114, S. 257. Auch hier heifst es wieder (s. Anm. 70) im Heft: Indem wir nun daran gehen, die vorstehende Theorie auf „verschiedene" Beispiele anzuwenden, wollen wir uns „zunächst" etwas länger beim Ellipsoid aufhalten.

[72]) Ebenda, S. 261. Zur Begründung dieser Schlufsfolgerung wird im Heft noch ausgeführt: „Ist z. B. $\sin^2\mu = 1$, $\cos^2\mu = 0$, so kommt $\alpha^2\beta^2 < \beta^2\gamma^2$; oder ist $\sin^2\mu = \cos^2\mu = \frac{1}{2}$, so hat man gleichfalls $\frac{1}{2}(\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2) < \beta^2\gamma^2$, und das sind so die extremsten Werte." Der erst nachträglich in der Vorlesung hinzugefügte Satz über den Verlauf der Funktion $b^2\cos^2\mu + c^2\sin^2\mu$ macht aber die obigen Beispiele überflüssig.

[73]) Ebenda. Bei einer verspätet vorgenommenen nochmaligen Prüfung des Heftes hat sich herausgestellt, dafs die Werte dieses und des nachfolgenden (bestimmten) Integrals in der Vorlesung selbst gar nicht angegeben, sondern vom Herausgeber damals hinzugefügt worden sind, und dafs, wenn sie trotzdem stehen bleiben sollen, aufser den schon im Druckfehlerverzeichnis aufgeführten Verbesserungen auch noch Z. 5 bis Z. 3 v. u. der Text von „Dabei" an wie folgt umzuändern ist: „So erhält man denn ein Integral, in welchem solche Quadratwurzeln wie in den elliptischen Integralen der zweiten Gattung (s. S. 259) vorkommen, und zwar unter" . . .

Noch sei erwähnt, dafs man das unbestimmte Integral $\int du\sqrt{u^2 + \frac{l^2}{m}}$ auch in der Form

$$\frac{1}{2}u\sqrt{u^2 + \frac{l^2}{m}} - \frac{1}{4}\frac{l^2}{m}\log\frac{\sqrt{u^2 + \frac{l^2}{m}} - u}{\sqrt{u^2 + \frac{l^2}{m}} + u} + C$$

und daraus direkt für das bestimmte Integral

$$\int_{-1}^{1} du\sqrt{u^2 + \frac{l^2}{m}} = \sqrt{1 + \frac{l^2}{m}} + \frac{1}{2}\frac{l^2}{m}\log\frac{\sqrt{1 + \frac{l^2}{m}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{l^2}{m}} - 1}$$

erhalten könnte.

[74]) § 117, S. 276. Die im Heft ebenfalls enthaltenen Rechnungen zur Herleitung des Resultats aus den Formeln (I) und (II) waren, als vom Herausgeber herrührend, nicht mit aufzunehmen.

[75]) § 118, S. 277. Weitere auf diese Eigenschaft bezügliche Ausführungen finden sich im Vorlesungsheft nicht vor.

[76]) Ebenda, S. 282. Das Heft enthält die vollständigen Rechnungen für die acht Differentialquotienten und die drei Determinanten A, B, C.

[77]) § 119, S. 289. Gaufs, „Disquisitiones generales circa superficies curvas", Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingenses recentiores. Vol. VI, Gottingae 1828. (Werke, Bd. 4, S. 217 bis 258. — Ostwalds Klassiker, Nr. 5, deutsch herausgegeben von Wangerin, 1889, unter dem Titel: Gaufs, „Flächentheorie".)

A. Cournot, „Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal", Paris 1841, 2 vol. (in 2. Auflage erschienen Paris 1857). Deutsch bearbeitet von Schnuse: „Elementarbuch der Theorie der Funktionen oder der Infinitesimalanalysis", Darmstadt 1845, woselbst sich S. 292 (§ 281) die Formel abgeleitet findet und in § 293 (S. 300 bis 302) die Gaufssche Flächentheorie dargestellt ist. Dieses um die Mitte des vorigen Jahrhunderts sehr geschätzte Lehrbuch wurde wegen der zu jener Zeit unzulänglichen Vertretung der einschlägigen Disziplinen an der Berliner Universität von den Kandidaten des höheren Lehramts fast allgemein zum Selbststudium und zur Vorbereitung auf das Examen pro facultate docendi benutzt.

[78]) § 121, S. 294. In Liouville, Journ. de Math., t. IV (année 1839), p. 323—344: „Mémoire sur la réduction d'une classe d'intégrales multiples", par M. Catalan.

Die anderen in diesem Paragraphen angeführten Werke und Abhandlungen sind:

Lagrange, „Théorie des Fonctions analytiques", 2e éd., Paris 1813 (die 1. Ausgabe erschien 1797).

Legendre, „Traité des Fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes", 3 vol., Paris 1825—1828.

Jacobi, „De transformatione et determinatione integralium duplicium commentatio tertia", Crelles Journal, Bd. 10, 1833, S. 101 bis 128 (Werke, Bd. 3, S. 159 bis 189), § 9: „Exemplum III. Determinatio areae ellipsoidae". Der Ausdruck für die Oberfläche des dreiachsigen Ellipsoids α, β, γ ($\alpha > \beta > \gamma$) erscheint daselbst unter der Form

$$\frac{8\,C}{m\,n\,p},$$

wo

$$m = \frac{1}{\gamma}, \quad n = \frac{1}{\beta}, \quad p = \frac{1}{\alpha}$$

und C das Doppelintegral

$$\int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=\pi}\int\limits_{\psi=0}^{\psi=2\pi} \sqrt{m^2\cos^2\varphi + n^2\sin^2\varphi\cos^2\psi + p^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}\cdot\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi$$

bedeutet (dessen Funktion aber noch nicht wie in dem Dirichletschen Integral (7) auf S. 284 rational ist). Für das Schlufsresultat, zu dem Jacobi gelangt, ergibt nähere Prüfung völlige Übereinstimmung mit der (I_0) auf S. 274. — Man vergleiche auch Schellbach, „Die Lehre von den Elliptischen Integralen und den Theta-Funktionen", Berlin 1864, § 161 und 162 (S. 297 ff.), „Die Oberfläche des Ellipsoids".

Gaufs' Abhandlung ist Anm. 77, Ivorys Abhandlung Anm. 83 aufgeführt.

[79]) § 129, S. 324. Nouveaux Mémoires de l'Acad. Roy. des Sciences et Belles-Lettres, Année 1773, p. 121—148: „Sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques (sur un point quelconque placé à la surface ou dans l'intérieur du sphéroïde)". Par M. de La Grange. Lagrange drückt sich daselbst (p. 139) bezüglich der Integrationen des Doppelintegrals (A_0) S. 316, Z. 5 v. u., dessen Winkel θ und φ bei ihm durch p bezw. q bezeichnet sind, so aus: on ne pourra „guère" exécuter qu'une seule intégration, savoir celle qui se rapporte à l'angle p. Hingegen sagt er (ebenda) in Bezug auf das aus dieser Integration resultierende Integral: il est facile de se convaincre que l'intégration qui reste à exécuter échappe à toutes les méthodes connues jusqu'à présent.

80) § 133, S. 337. Eigener Zusatz.

81) Ebenda, S. 340. Man vergleiche die ähnliche Untersuchung über den Verlauf der Funktion $\frac{x}{x-1}$ in § 26 der „Anwendungen" (S. 456).

82) § 134, S. 343 f. Diese im Heft unvollständigere und nur oberflächlich angedeutete Figur diente in der Vorlesung erst zur Erläuterung des Maclaurinschen Satzes (S. 347), auf den sich auch das mittlere konzentrische und ähnlich liegende konfokale Ellipsoid α_1, β_1, γ_1 bezieht.

83) § 137, S. 350. „Philosophiae naturalis Principia mathematica", Lib. I, Sect. XIII, Propos. 91, Cor. 2 und Lib. III, Propos. XIX. Nach Grube („Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte von Dirichlet", 2. Aufl., Leipzig 1887, S. 160, Anm. 3) ist aber die Angabe Dirichlets, dafs Newton auch die Anziehung für die Endpunkte des Äquatorialdurchmessers bestimmt habe, nicht ganz genau, „weil er an der zweiten oben angeführten Stelle seiner „Principia" nur ein angenähertes Verhältnis der Anziehung am Pol der Erde, also eines von der Kugel nur wenig abweichenden Ellipsoids, zur Anziehung am Äquator gefunden habe".

Wir lassen nun eine Quellenangabe für die übrigen in diesem Paragraphen erwähnten Arbeiten folgen.

Maclaurin hat seine Untersuchungen zuerst mitgeteilt in seiner von der Pariser Akademie gekrönten Preisschrift „De causa fluxus et refluxus maris", 1740, abgedruckt im Recueil des pièces qui ont remporté les prix de l'acad. roy. des sciences, Tome IV und in der von Le Seur und Jacquier besorgten Ausgabe von Newtons „Principia", 3 vol., Genevae 1739—1742, unter dem Titel: „Mémoire sur le flux et le reflux de la mer", 1740. — Das darin über das Attraktionsproblem Enthaltene findet sich auch in seiner „Treatise of fluxions", Tome I, chap. 14, woselbst auch der äufsere Punkt besprochen ist. In Bezug auf denselben bemerkt Grube (l. c. S. 161, Anm. 9) in Übereinstimmung mit der Dirichletschen Darstellung auf S. 351, „dass Maclaurin a. a. O. Art. 653 den Satz aufgestellt und bewiesen hat, dafs die Kräfte, mit denen zwei konfokale ungleichachsige Ellipsoide denselben auf einer ihrer Achsen liegenden äufseren Punkt anziehen, ihren Massen proportional sind. Dafs der Satz aber allgemein gültig sei für jede Lage des angezogenen Punktes, ahnte Maclaurin noch nicht, wie aus Art. 654 deutlich hervorgeht."

d'Alembert, „Sur la figure de la Terre", Opuscules mathématiques, Tome VI, 1773, art. 73—77.

Lagrange in den Nouv. Mémoires de Berlin. Über seine erste Abhandlung aus dem Jahre 1773 s. Anm. 79. — Die zweite Abhandlung befindet sich ebenda, Année 1775, p. 121—148 und ist gleichfalls betitelt „Sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques".

Legendres erste Arbeit: „Recherches sur l'attraction des sphéroïdes homogènes" findet sich in den Mémoires de Mathém. et de Physique, présentés à l'acad. roy. des sc. par divers savans, Tome X, Paris 1785. — Seine zweite Arbeit: „Sur les intégrales doubles" ist veröffentlicht in der Histoire de l'Acad. roy. des Sciences de Paris, 1788.

Laplace: „Théorie des attractions des sphéroïdes et de la figure des planètes", Mémoires de Mathém. et de Phys., tirés des registres de l'acad. roy. de Paris, 1782, p. 113—196. — Der die Anziehung der Ellipsoide betreffende Teil ist mit geringfügigen Änderungen und Zusätzen später auch unter dem Titel „Des attractions des sphéroïdes homogènes terminés par des surfaces de second ordre“ in der 1. Ausgabe der „Mécanique céleste“ v. J. 1799, Tome II, Livr. III, Chap. 1, p. 3—22, erschienen.

Ivory: „On the attraction of homogeneous ellipsoids“, Philos. Trans. of the Royal Society of London, 1809, Part II, p. 345—372.

Gaufs: „Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum methodo nova tractata“, Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. II, Gottingae 1813 (Werke, Vol. V, S. 1 bis 22, Göttingen 1867). Eine kurze Skizze des von ihm befolgten Gedankenganges hat Gaufs auch in den Göttinger Gelehrten Anzeigen vom 5. April 1813 gegeben (Werke, V, S. 279).

Dirichlets Behandlungsweise des Problems ist unter dem Titel: „Über eine neue Methode zur Bestimmung vielfacher Integrale“ zuerst veröffentlicht in den Berichten über die Verhandlungen der Kgl. Preufsischen Akademie der Wissenschaften, Berlin 1839, S. 18 bis 25; darauf ausführlicher mit anderen Anwendungen des diskontinuierlichen Faktors (vergl. Abschnitt 8, Kap. 2) in den Abhandlungen der Berliner Akademie aus dem Jahre 1839, Berlin 1841, S. 61 bis 79 der mathematischen Abhandlungen. Die erstere Arbeit ist auch unter dem Titel „Sur une nouvelle méthode pour la détermination des intégrales multiples“ in den Comptes rendus VIII, 1839, p. 156—160 erschienen und von da abgedruckt in Liouville, Journ. de Math., Tome IV, 1839, p. 164—168; alle drei Arbeiten ferner in Dirichlets Werken, Bd. I, Berlin 1889, S. 375 bis 410.

Die vier Abhandlungen von Laplace, Ivory, Gaufs, Dirichlet, nebst der auf denselben Gegenstand bezüglichen Abhandlung von Chasles aus dem Jahre 1838 (Comptes rendus VI, p. 902—915; Liouville, Journ. de Math. V, 1840, p. 465—488) bilden aufserdem den Inhalt von Ostwalds Klassiker, Nr. 19, herausgegeben von A. Wangerin, Leipzig 1890, unter dem Titel: „Über die Anziehung homogener Ellipsoide“.

[84]) § 138, S. 354. Die Formeln des § *92 wurden in der Vorlesung d. J. 1854 erst hier entwickelt. Vergl. Anm. 55 und 59.

[85]) § 140, S. 362. Diese Abkürzungen sind der von Dirichlet in seiner Abhandlung gebrauchten Bezeichnung des Integrals X durch U nachgebildet. In der Ausarbeitung des Herausgebers sind hier gar keine Abkürzungen verwendet.

[86]) § 142, S. 372. Hier gelangte die Vorlesung d. J. 1854 mit folgenden Worten Dirichlets zum Abschlufs: „Es liefse sich noch manches über dieses Attraktionsproblem und über verwandte nach demselben Prinzip des diskontinuierlichen Faktors zu behandelnde Aufgaben beibringen, was aber die schon bis ans Ziel vorgerückte Zeit nicht mehr verstattet.“ Die noch folgenden Entwicklungen sind, gleich den mit einem Sternchen bezeichneten Paragraphen des 5. Abschnitts, einem dem Ausarbeitungsheft des Herausgebers hinzugefügten, „Ergänzungen aus der Vorlesung d. J. 1852“ enthaltenden „Anhange“ entnommen.

[87]) § 144, S. 377. Im Heft lautet diese Stelle ohne weitere Ausführungen so: Wendet man nun das eben erzielte Resultat auf eine einzige Variable an, so findet sich, dafs das bestimmte Integral

$$\int_0^1 e^{-kx} x^{m-1}\, dx$$

gleich ist dem reellen Teil von

$$\Gamma(m) \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \varphi}{\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{(k - \varphi i)^m},$$

also der reelle Teil von

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \varphi}{\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{(k - \varphi i)^m}$$

(den wir auch allein hier gebrauchen) gleich

$$\frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^1 e^{-kx} x^{m-1}\, dx$$

ist.

EINIGE ANWENDUNGEN

DER

BESTIMMTEN INTEGRALE.

I.

Summation der harmonischen Reihe.

Das Integral $\int_0^1 \frac{x^{b-1} - x^{a-1}}{x^a - 1} dx$.

1. Die harmonische Reihe. — Man macht von der Integralrechnung unter anderem einen speciellen Gebrauch auf die Summation und die Umformung der Reihen, in welchen beiden Geschäften sie die wesentlichsten Dienste leistet. Dazu gehört das im Folgenden behandelte Problem der Summation der harmonischen Reihe.

Eine aus den reciproken Werten der Glieder einer arithmetischen Progression bestehende unendliche Reihe wird eine **harmonische Reihe** genannt.

Bezeichnet man also die konstante Differenz der arithmetischen Reihe durch a, ihr erstes Glied durch b, so ist das allgemeine Glied der harmonischen Reihe:

$$\frac{1}{as + b} \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$$

und die Reihe selbst:

$$(1) \qquad \frac{1}{b}, \frac{1}{a+b}, \frac{1}{2a+b}, \ldots, \frac{1}{sa+b}, \text{ etc.}$$

Die Zähler der Brüche könnten auch eine andere Konstante als 1 sein. Die Differenz a soll immer positiv vorausgesetzt werden, und was das erste Glied b betrifft, so darf man es stets kleiner als a und desgleichen positiv annehmen. Denn falls $b > a$, so brauchte man von der Reihe (1) nur die entsprechende

Anzahl von Gliedern abgeschnitten und isoliert zu denken, und falls $b < 0$, ihr nur die betreffende Anzahl von Gliedern voranzusetzen, um die Reihe jedesmal gehörigen Orts beginnen zu lassen.

Die harmonische Differenzenreihe.

2. Erklärung. — In den Elementen wird nachgewiesen, dafs die harmonische Reihe divergiert. Nun ereignet es sich aber häufig, und so auch bei den harmonischen Reihen, dafs, wenn man die homologen Glieder von zwei ähnlichen divergierenden Reihen voneinander subtrahiert, die aus diesen Differenzen bestehende Reihe konvergent ist. Bilden wir demnach neben der Reihe (1) des vorigen Paragraphen noch eine zweite harmonische Reihe mit derselben Differenz a, aber einem anderen b, das man am einfachsten mit a zusammenfallen läfst, also die Reihe:

$$\frac{1}{a},\ \frac{1}{2a},\ \frac{1}{3a},\ \ldots,\ \frac{1}{(s+1)a},\ \text{etc.},$$

so geht aus der Subtraktion ihrer entsprechenden Glieder eine Reihe hervor, deren allgemeines Glied:

$$\frac{1}{(s+1)a} - \frac{1}{sa+b} = \frac{b-a}{s^2a^2 + sa(a+b) + ab},$$

bei konstantem Zähler einen Nenner aufweist, welcher in Bezug auf den Stellenzeiger vom zweiten Grade ist; und eine solche Reihe, weit entfernt zu divergieren, konvergiert im Gegenteil, wie sich streng beweisen liefse, sehr stark. Doch bedürfen wir dieses Nachweises nicht, da sich im folgenden die Konvergenz von selbst ergeben wird. Bezeichnet man also den festen Grenzwert dieser Reihe mit u, so hat man die Gleichung:

$$(1)\quad \begin{cases} u = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{a+b}\right) + \cdots \\ \qquad\qquad \cdots + \left(\frac{1}{(s+1)a} - \frac{1}{sa+b}\right) + \text{etc.} \end{cases}$$

Wegen der Wichtigkeit dieser harmonischen Differenzenreihe bei vielen Untersuchungen hat man Tafeln für ihre Summe konstruiert, zu deren bequemeren Berechnung man noch $\frac{1}{a}$ aus allen Gliedern als Faktor herausnimmt. Die Reihe erhält dann die Form:

$$u = \frac{1}{a}\left[\left(1 - \frac{1}{\frac{b}{a}}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+\frac{b}{a}}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2+\frac{b}{a}}\right) + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+\frac{b}{a}}\right) + \text{etc.}\right]$$

und hängt nur von dem Werte des Quotienten $\frac{b}{a}$ ab. Die Tafel erstreckt sich in Intervallen von 0,001 über alle Werte dieses Quotienten von 0 bis 1.

3. Darstellung der Reihe durch ein bestimmtes Integral. — Wenn sich das allgemeine Glied einer konvergenten Reihe durch ein zwischen festen Grenzen genommenes Integral ausdrücken und alsdann die unter das gemeinsame Integralzeichen gebrachte, in eine andere Gestalt verwandelte Reihe summieren läſst, so wird dadurch offenbar eine Darstellung der fraglichen Reihe durch ein bestimmtes Integral gewonnen.

Dies geschieht bei der im vorigen Paragraphen abgeleiteten Reihe:

$$(1)\quad \begin{cases} u = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{a+b}\right) + \cdots \\ \qquad\qquad \cdots + \left(\frac{1}{(s+1)a} - \frac{1}{sa+b}\right) + \text{etc.} \end{cases}$$

in sehr einfacher Weise. Vermöge der Formel [„Integrale“ 41, (4_0)]:

$$\int_0^1 x^{k-1}\,dx = \frac{1}{k} \qquad (k > 0)$$

kann in der (1) und in jeder ähnlich gestalteten Reihe jeder Bruch durch das vorstehende, zwischen den festen Grenzen 0, 1 genommene bestimmte Integral ausgedrückt werden, denn da alle Nenner wesentlich positiv sind, so ist die einzige zur Gültigkeit dieses Integrals notwendige Bedingung erfüllt. Danach hat man für das allgemeine Glied der (1):

$$\frac{1}{(s+1)a} - \frac{1}{sa+b} = \int_0^1 \left(x^{(s+1)a-1} - x^{sa+b-1}\right) \cdot dx$$
$$= \int_0^1 x^{as}\left(x^{a-1} - x^{b-1}\right) dx,$$

und mit Rücksicht auf die s beizulegenden Werte für die (1) selbst:

$$u = \int_0^1 (x^{a-1} - x^{b-1}) \cdot (1 + x^a + x^{2a} + \text{etc.})\, dx.$$

Da hier x nur die Werte von 0 bis 1 zu durchlaufen hat, also *a fortiori* x^a stets kleiner als 1 ist — denn der Wert $x = 1$ selbst kommt gemäſs der Definitionsgleichung des bestimmten Integrals in unserem Integral gar nicht in Betracht —, so ist die im zweiten Faktor unter dem Integral befindliche geometrische Progression mit dem Exponenten x^a immer konvergent und hat $\frac{1}{1 - x^a}$ zum Grenzwert ihrer Summe. Die Reihe (1) wird demnach durch das Integral dargestellt:

$$u = \int_0^1 \frac{x^{b-1} - x^{a-1}}{x^a - 1}\, dx \qquad (a > b > 0), \tag{2}$$

und ist es möglich, dieses Integral in endlicher Form zu erhalten, so hat man damit auch die Reihe (1) summiert.

Nun läſst sich allerdings im allgemeinen, nämlich wenn die Parameter a und b inkommensurabel sind, mit diesem Integral nichts anfangen. Sind aber a und b kommensurabel, so ist die Integration ausführbar. Denn da alsdann a und b nur gemeinschaftliche irrationale Faktoren haben können, so müssen, wenn man diese zugleich mit den etwaigen gemeinschaftlichen rationalen Faktoren heraussetzt, die verbleibenden Faktoren notwendig ganze und zueinander relative Primzahlen sein. Ist z. B. $a = \frac{10\sqrt{2}}{3}$, $b = \frac{15\sqrt{2}}{7}$, so kann man $\frac{5}{21}\sqrt{2}$ aus allen Nennern der Reihe (1) herausnehmen und hat dann, indem 14 bezw. 9 an die Stelle von a und b treten, die Reihe:

$$u = \frac{21}{5\sqrt{2}}\left[\left(\frac{1}{14} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 14} - \frac{1}{14 + 9}\right) + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + \left(\frac{1}{(s+1)\,14} - \frac{1}{14s + 9}\right) + \text{etc.}\right],$$

und demnach das Integral:

$$u = \frac{21}{5\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{x^8 - x^{13}}{x^{14} - 1} \cdot dx.$$

Die Kommensurabilität von a und b läuft also auf dasselbe hinaus, als wenn diese Parameter ganze Zahlen wären. Unter dieser Voraussetzung ist aber die Integration von $\frac{x^{b-1} - x^{a-1}}{x^a - 1}$ als von einer rationalen gebrochenen Funktion immer möglich und mithin auch die durch das Integral ausgedrückte Summe der harmonischen Differenzenreihe in endlicher, geschlossener Form darstellbar.

Was dieses Problem, zu dessen Lösung wir jetzt schreiten, besonders interessant macht, ist der bemerkenswerte Umstand, dafs die Anzahl der Glieder des schliefslichen Resultats von der Gröfse der Zahl a abhängig sein wird.

4. Auswertung des bestimmten Integrals

$$(1)\qquad \int_0^1 \frac{x^{b-1} - x^{a-1}}{x^a - 1}\, dx \qquad (a > b > 0)$$

für ganze positive Zahlenwerte von a und b. — Da die rationale Integralfunktion, in der der kleinstmögliche Wert von b gleich 1, mithin von a gleich 2 ist, in jedem Falle echt gebrochen ist, so kann ihr unbestimmtes Integral sofort nach der bekannten Methode („Integrale" 30) ermittelt werden.

Die binomische Gleichung

$$f(x) = x^a - 1 = 0$$

hat die a Wurzeln:

$$x_h = e^{\frac{2h\pi}{a}\cdot i} = \cos\frac{2h\pi}{a} + i\sin\frac{2h\pi}{a} \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots, a-1).$$

Dieselben sind sämtlich einfach, denn für eine jede von ihnen ist die erste Derivierte des Binoms $f(x)$:

$$f'(x) = a x^{a-1} = \frac{a x^a}{x} = \frac{a}{x},$$

von Null verschieden. Bezeichnet man diese a Wurzeln durch $\alpha, \beta, \ldots$, so gibt die Zerlegung in Partialbrüche:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{x^{b-1} - x^{a-1}}{x^a - 1} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \cdots,$$

$$A = \frac{\varphi(\alpha)}{f'(\alpha)},\quad B = \frac{\varphi(\beta)}{f'(\beta)},\quad \ldots.$$

Für jede Wurzel ist aber $x^a = 1$, mithin:

$$\frac{\varphi(x)}{f'(x)} = \frac{x^{b-1} - x^{a-1}}{a x^{a-1}} = \frac{x^{b-1} - x^{-1}}{a x^{-1}} = \frac{x^b - 1}{a}.$$

Es sei A_h die der beliebigen Wurzel x_h zugehörige Konstante. Dann ist also:

$$A_h = \frac{e^{\frac{2hb\pi}{a}\cdot i} - 1}{a} = \frac{\cos\frac{2hb\pi}{a} + i\sin\frac{2hb\pi}{a} - 1}{a}.$$

Speciell ist:

$$A_0 = \frac{1-1}{a} = 0.$$

Der erste Partialbruch ist demnach nur formell vorhanden, was auch seinen guten Grund hat, denn andernfalls könnte wegen des diesem Partialbruch zugehörigen Integrals:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-1} = [\log(x-1)]_0^1 = -\infty - (2\mu + 1)\pi i,$$

dem Integral (1) keine Bedeutung beigemessen werden.

Vom konstanten Faktor A_h abgesehen, haben wir uns also jetzt mit dem Integral von $\dfrac{1}{x - x_h}$ zu befassen. Setzen wir noch zur Abkürzung:

$$\frac{2h\pi}{a} = \lambda,$$

so hat man (s. „Integrale" S. 51):

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{x-x_h} &= \int\frac{dx}{x - \cos\lambda - i\sin\lambda}\\ &= \int\frac{(x-\cos\lambda)\,dx}{(x-\cos\lambda)^2 + \sin^2\lambda} + i\cdot\frac{1}{\sin\lambda}\int\frac{dx}{\left(\frac{x-\cos\lambda}{\sin\lambda}\right)^2 + 1}\\ &= \frac{1}{2}\log(x^2 - 2x\cos\lambda + 1) + i\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x-\cos\lambda}{\sin\lambda} + C,\end{aligned}$$

mithin:

$$\int_0^1\frac{dx}{x-x_h}$$

$$= \frac{1}{2}\log(2 - 2\cos\lambda) + i\left(\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1-\cos\lambda}{\sin\lambda} - \mathrm{arc\,tg}\,\frac{-\cos\lambda}{\sin\lambda}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(2\sin\frac{\lambda}{2}\right)^2 + i\left(\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}\right) + \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\overline{\frac{\pi}{2}-\lambda}\right)\right).$$

Bedenkt man nun, daſs der Bogen λ durchaus kleiner ist als 2π, und daſs, um den Bedingungen der Stetigkeit zu genügen, alle arcus in der vorstehenden Formel zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ genommen werden müssen, so ergeben sich folgende ihnen beizulegenden Werte:

1) für $0 < \lambda < \pi$:

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}\right) = \frac{\lambda}{2}, \qquad \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\overline{\frac{\pi}{2}-\lambda}\right) = \frac{\pi}{2}-\lambda,$$

2) für $\pi < \lambda < 2\pi$:

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}\right) = \frac{\lambda}{2}-\pi, \quad \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\overline{\frac{\pi}{2}-\lambda}\right) = \frac{3\pi}{2}-\lambda.$$

Die Summe der beiden arcus ist also jedesmal $\frac{\pi}{2}-\frac{\lambda}{2}$, nur daſs sie im ersten Falle einen positiven, im zweiten einen negativen Wert repräsentiert. Und da auſserdem $\sin\frac{\lambda}{2}$ stets positiv ist, mithin $\frac{1}{2}\log\left(2\sin\frac{\lambda}{2}\right)^2 = \log\left(2\sin\frac{\lambda}{2}\right)$ gesetzt werden darf, so erhält man:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-x_h} = \log\left(2\sin\frac{\lambda}{2}\right) + i\cdot\frac{\pi-\lambda}{2}.$$

Das Integral eines jeden Partialbruches ist mithin, wenn man statt $\frac{\lambda}{2}$ wieder seinen ursprünglichen Wert $\frac{h\pi}{a}$ einsetzt:

$$\int_0^1 \frac{A_h\,dx}{x-x_h} = \frac{1}{a}\left(e^{\frac{2hb\pi}{a}\cdot i}-1\right)\left(\log\left(2\sin\frac{h\pi}{a}\right) + i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{h\pi}{a}\right)\right),$$

und das Integral (1) selbst, also auch die Summe u der harmonischen Differenzenreihe (1) des § 3 für ganze positive Zahlen a und b ($a > b$) mit Rücksicht auf die h beizulegenden Werte:

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{b-1}-x^{a-1}}{x^a-1}\,dx \\ \displaystyle= \frac{1}{a}\sum_{h=1}^{a-1}\left(e^{\frac{2hb\pi}{a}\cdot i}-1\right)\left(\log\left(2\sin\frac{h\pi}{a}\right) + i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{h\pi}{a}\right)\right). \end{cases}$$

Das Integral ist also durch einen aus $a-1$ Gliedern bestehenden Summenausdruck dargestellt, von denen ein jedes in einen reellen und einen imaginären Teil zerfällt. Da aber unser bestimmtes Integral und die harmonische Differenzenreihe offenbar rein reell sind, so kann das Imaginäre nur formell in dem vorstehenden Ausdruck enthalten sein und mufs sich durch eine geeignete Umformung aus ihm fortheben lassen. Dies wird erreicht, indem man je zwei Glieder der Summe, die gleich weit vom Anfang und Ende entfernt sind, in ein einziges zusammenfafst.

Zu diesem Zwecke sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem a eine ungerade Zahl $2m+1$ oder eine gerade Zahl $2m$ ist.

1. $a=2m+1,\ a-1=2m;\ b<2m+1,\ \frac{b-1}{2}<m;$
$$h=1,2,\ldots,2m.$$

Man lege h nur die Werte von 1 bis m bei; dann erhält man für h und $2m+1-h$ je zwei gleich weit vom Anfang und Ende entfernte Glieder und für ihre Summe zunächst:

$$\left(e^{\frac{2hb\pi}{2m+1}i}-1\right)\left(\log\left(2\sin\frac{h\pi}{2m+1}\right)+i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{h\pi}{2m+1}\right)\right)$$
$$+\left(e^{-\frac{2hb\pi}{2m+1}i}-1\right)\left(\log\left(2\sin\frac{h\pi}{2m+1}\right)-i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{h\pi}{2m+1}\right)\right),$$

und nach Ausführung der verschiedenen Reduktionen, unter Benutzung der bekannten Werte für $e^{zi}\pm e^{-zi}$, schliefslich:

$$-4\sin^2\frac{hb\pi}{2m+1}\log\left(2\sin\frac{h\pi}{2m+1}\right)$$
$$-2\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{h}{2m+1}\right)\sin\frac{2hb\pi}{2m+1}.$$

Dies führt, wenn man wieder a einsetzt, an Stelle der (I) zu dem rein reellen Ausdruck für den Wert unseres Integrals:

$$(\mathrm{I}_0)\left\{\begin{aligned}&\int_0^1\frac{x^{b-1}-x^{a-1}}{x^a-1}\,dx=-\frac{2}{a}\sum_h\left(2\sin^2\frac{hb\pi}{a}\log\left(2\sin\frac{h\pi}{a}\right)\right.\\&\qquad\qquad\qquad\qquad\left.+\pi\frac{a-2h}{2a}\cdot\sin\frac{2hb\pi}{a}\right)\\&\left(a=2\mu+1,\ \mu=1,2,3,\ldots;\ b<a;\ h=1,2,\ldots,\frac{a-1}{2}\right),\end{aligned}\right.$$

der also auch in dieser Gestalt aus $a-1$ Gliedern besteht.

$$2.\quad a = 2m,\ a - 1 = 2m - 1;\quad b < 2m,\ \frac{b}{2} < m;$$
$$h = 1, 2, \ldots, 2m - 1.$$

Legt man h nur die Werte von 1 bis $m - 1$ bei, so erhält man für h und $2m - h$ je zwei gleich weit vom Anfang und Ende abstehende Glieder der (I). Der Wert $h = m = \frac{a}{2}$ aber liefert das in der Mitte befindliche isolierte Glied, für das sich unmittelbar:

$$0 \text{ oder } -\frac{2}{a}\log 2$$

ergibt, je nachdem b gerade oder ungerade, also $e^{b\pi i} = +1$ oder -1 ist. Für die übrigen Glieder unterscheiden sich die Ausdrücke nur dadurch von dem ersten Fall, dafs überall $2m$ an Stelle von $2m + 1$ zu setzen ist. Daher bleibt, wenn man wieder a einführt, und wenn aufser a auch b gerade ist, das Resultat (I_0) völlig ungeändert, nur dafs jetzt

$$(I_0')\qquad a = 2\mu,\ b = 2\nu;\quad h = 1, 2, \ldots, \frac{a}{2} - 1$$

zu nehmen ist.

Ist aber b ungerade, hat man also:

$$(I_0'')\qquad a = 2\mu,\ b = 2\nu + 1;\quad h = 1, 2, \ldots, \frac{a}{2} - 1,$$

so tritt auf der rechten Seite der (I_0) noch das Glied $-\frac{2}{a}\log 2$ hinzu.

Beispiel: $b = 1,\ a = 4;\ \frac{a}{2} - 1 = 1.$

$$\left(\frac{1}{4} - 1\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(s+1)4} - \frac{1}{4s+1}\right) + \cdots$$
$$= \int_0^1 \frac{1 - x^3}{x^4 - 1}\,dx = -\frac{1}{2}\log\sqrt{2} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\log 2$$
$$= -\left(\frac{\pi}{8} + \frac{3}{4}\log 2\right).$$

Während schon in diesem Beispiel die Summe Σ sich auf ein einziges Glied ($h = 1$) reduciert, indem ihre obere Grenze $\frac{a}{2} - 1$ mit der unteren zusammenfällt, würde für den Wert

$a = 2$ (wo dann notwendig $b = 1$ sein mufs) die obere Grenze gleich Null werden, und man hätte eine Summe $\sum\limits_1^0$, was natürlich sinnlos ist und anzeigt, dafs in diesem Falle von einer Summe gar keine Rede ist. In der That handelt es sich alsdann einfach um das direkt zu ermittelnde Integral:

$$\int\limits_0^1 \frac{1 - x}{x^2 - 1}\, dx = - \int\limits_0^1 \frac{dx}{1 + x} = - \log 2,$$

was aber auch die (I) ergeben würde, indem sich ihre aus $a - 1$ Gliedern bestehende Summe für $a = 2$ wiederum auf ein einziges Glied reduciert.

Mit Rücksicht auf die durch das letzte Integral ausgedrückte harmonische Differenzenreihe führt dieser specielle Fall auf die bekannte Reihenentwicklung (vergl. S. 158):

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + - \text{etc.}$$

II.

Die Fakultäten und das Eulersche Integral der ersten Gattung.

5. Erklärung und Vorbemerkung. — Unter einer Fakultät versteht man bekanntlich ein Produkt von Faktoren, die eine arithmetische Reihe bilden.

Bezeichnet man demnach das erste Glied einer arithmetischen Reihe durch a und ihre konstante Differenz durch b, so ist der allgemeine Faktor der Fakultät:

$$(a + b\,s),$$

wo

$$s = 0, 1, 2, \ldots, n$$

zu setzen ist und n sowohl endlich wie unendlich genommen werden darf. Die aus n Faktoren bestehende Fakultät selbst ist mithin:

$$a(a + b)(a + 2\,b) \cdots (a + \overline{n - 1} \cdot b), \tag{1}$$

kann aber, obwohl b eine ganz beliebige Konstante ist, durch Heraussetzen der Potenz b^n sofort in die Fakultät:

$$b^n \cdot \frac{a}{b}\left(\frac{a}{b} + 1\right)\left(\frac{a}{b} + 2\right) \cdots \left(\frac{a}{b} + n - 1\right)$$

mit der Differenz 1 umgewandelt werden, so dafs es ausreicht, nur Fakultäten mit dem allgemeinen Faktor

$$(a + s)$$

zu betrachten.

Nun ist es möglich, Fakultäten durch bestimmte Integrale auszudrücken und dadurch über manche Eigenschaften derselben, die sonst nicht so klar hervortreten, mit Leichtigkeit Aufschlufs zu erlangen.

Diese Transformation der Fakultäten in bestimmte Integrale, die den Gegenstand der folgenden Untersuchungen ausmacht, erfordert einige vorläufige Entwicklungen aus der Integralrechnung, die sich hauptsächlich auf das Eulersche Integral der ersten Gattung beziehen, und wobei sich auch herausstellen wird, dafs die Integralrechnung ganz von selbst auf Fakultäten führt.

6. Die Reduktionsformel der Eulerschen Integrale der ersten Gattung. — Das Integral des Produkts einer gewissen Potenz von x durch eine gewisse Potenz von $1-x$ läfst sich nur unter bestimmten Umständen in geschlossener Form angeben, selbst dann, wenn es zwischen endlichen, festen Grenzen genommen wird. Wendet man aber auf ein solches Integral die durch die Formel:

$$\int u' v\,dx = uv - \int v' u\,dx \tag{1}$$

dargestellte teilweise Integration an, so lassen sich wenigstens zwei ähnliche Integrale dieser Art miteinander vergleichen.

Da die teilweise Integration immer da angebracht ist, wo die Integralfunktion aus einem Produkt besteht, dessen einer Faktor schon von selbst eine Derivierte ist, wählen wir zu der oben charakterisierten Funktion das Produkt:

$$x^{a-1}(1-x)^b,$$

dessen Faktor $x^{a-1} = \frac{dx^a}{a\,dx}$ auf den Differentialquotienten von x^a führt. Dann erhält man vermittelst der Formel (1) die Relation:

$$\int x^{a-1}(1-x)^b\,dx = \frac{x^a}{a}(1-x)^b + \frac{b}{a}\int x^a(1-x)^{b-1}\,dx, \tag{2}$$

in der beide Integrale ähnlich, aber beide Exponenten geändert sind. Man kann es indessen so einrichten, dafs wenigstens ein Exponent ungeändert bleibt. Denn da identisch $(1-x)^b = (1-x)^{b-1} - x(1-x)^{b-1}$, mithin

$$\int x^{a-1}(1-x)^b\,dx = \int x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx - \int x^a(1-x)^{b-1}\,dx$$

ist, so entspringt aus der Vergleichung dieser Relation mit der (2) die Formel:

$$\int x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx = \frac{x^a}{a}(1-x)^b + \frac{a+b}{a}\int x^a(1-x)^{b-1}\,dx,$$

in der in dem ähnlichen Integral rechts, auf welches das Integral links zurückgeführt ist, ein Exponent um 1 zugenommen hat, der andere aber ungeändert geblieben ist.

Nun liegt es auf der Hand, in der vorstehenden Formel das unbestimmte Integral zwischen solchen Grenzen zu nehmen, dafs das endliche Glied ausfällt. Diese Grenzen sind unter der Voraussetzung, dafs a und b positiv, im übrigen aber ganz beliebig sind, 0 und 1; denn für einen jeden dieser beiden Werte von x wird dann das fragliche Glied zu Null, während es im Gegenteil unendlich würde, wenn einer der Exponenten negativ wäre. Man hat demnach die Formel:

$$(3)\quad \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \frac{a+b}{a}\int_0^1 x^a(1-x)^{b-1}dx \quad \left({a \atop b} > 0\right).$$

Auch ist an sich klar, dafs dies Integral ein negatives a oder b nicht verträgt; denn für $a < 0$ wird die Integralfunktion an der unteren Grenze, und für $b < 0$ wird sie an der oberen Grenze unstatthaft unendlich grofs (vergl. „Integrale" 43).

Das auf der linken Seite der (3) befindliche Integral dient als Repräsentant für das Eulersche Integral der ersten Gattung und ist von uns durch das Symbol (a, b) bezeichnet worden („Integrale" 54 f.). Es läfst sich daher auch die obige Reduktionsformel (3) in dieser Weise schreiben:

$$(3_0)\qquad (a, b) = \frac{a+b}{a}\cdot(a+1, b),$$

und man kann sie als Definitionsgleichung des Integrals (a, b) gelten lassen [1]).

Da in dem neuen Integral $(a + 1, b)$ das geänderte Element $a + 1$ gleichzeitig mit a die notwendige Bedingung erfüllt, positiv zu sein, so kann die durch die vorstehende Relation angedeutete Operation beliebig oft wiederholt werden. Substituiert man die auf solche Weise gewonnenen Ausdrücke:

$$(a+1, b) = \frac{a+b+1}{a+1}(a+2, b),$$
$$(a+2, b) = \frac{a+b+2}{a+2}(a+3, b), \ldots$$

nacheinander in die (3_0), so erhält man die für beliebige und beliebig grofse ganze positive Werte von n streng gültige allgemeine Reduktionsformel:

$$(4)\quad (a, b) = \frac{a+b}{a}\cdot\frac{a+b+1}{a+1}\cdots\frac{a+b+n-1}{a+n-1}(a+n, b),$$

vermittelst welcher das Verhältnis von zwei Integralen der ersten Gattung, deren Elemente a sich um n Einheiten voneinander unterscheiden, durch den Quotienten zweier, aus den n Faktoren

$$(a + b + s) \quad \text{bezw.} \quad (a + s) \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

bestehender Fakultäten dargestellt wird. So stellen sich hier also Fakultäten ganz von selbst ein[2]).

7. Lehrsatz. — Das Integral (a, b) ist, bei unverändertem Werte des einen Elementes, um so kleiner, je gröfser man das andere Element wählt.

Beweis. Es sei a das veränderliche Element. Dann wird, da x überall zwischen den Grenzen des Integrals ein echter Bruch ist, an jeder Stelle die Potenz x^{a-1} mit wachsendem a immer kleiner, nicht nur, wie an sich klar ist, wenn ihr Exponent $a - 1$ positiv, also $a > 1$ ist, sondern auch, wenn a zwischen 0 und 1 liegt, denn in diesem Falle handelt es sich um die Potenz $\left(\frac{1}{x}\right)^{1-a}$, deren Basis $\frac{1}{x}$ gröfser als 1 ist, und deren Exponent $1 - a$ mit wachsendem a von 1 bis zu Null abnimmt, die also selbst sich immer mehr der Einheit nähert, d. h. beständig kleiner wird. Nun sind aber alle Differentialelemente des Integrals (a, b) durchaus positiv; daher mufs, wenn $a' > a$, für jeden Wert von x zwischen 0 und 1

$$x^{a'-1}(1 - x)^{b-1}\,dx < x^{a-1}(1 - x)^{b-1}\,dx$$

sein, mithin auch für die Summe aller dieser Differentialelemente, d. h. für die Integrale selbst die Ungleichheit bestehen:

$$(a', b) < (a, b) \qquad (a' > a).$$

8. Specielle Werte von (a, b). — Für ganze Zahlenwerte auch nur eines der Parameter a, b ist das Integral (a, b) in geschlossener Form angebbar.

So hat man sofort:

(1) $$(1, 1) = \int_0^1 dx = 1$$

und

(2) $$(n, 1) = \int_0^1 x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n};$$

ferner, wenn a gleich 1 gesetzt wird, während b beliebig bleibt:

$$(3) \qquad (1, b) = \int_0^1 (1-x)^{b-1}\,dx = \left[-\frac{(1-x)^b}{b}\right]_0^1 = \frac{1}{b},$$

woraus sich für $b = 1$ wieder die (1), vermöge der Reduktionsformel des § 6 aber die Relation ergibt:

$$(1+n, b) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{b(b+1)(b+2)(b+3)\cdots(b+n)}.$$

Diese letztere Formel liefert also den Wert von (a, b) für alle Fälle, wo a eine beliebige ganze positive Zahl $1+n$, b aber irgend welche positive Gröfse ist. Für den speciellen Wert $b = 1$ führt sie auf die Formel (2) zurück.

Darstellung des Integrals (a, b) durch den Quotienten von unendlichen Fakultätenprodukten.

9. Konvergenz unendlicher Produkte. — Bevor wir an die Lösung der Aufgabe, Fakultäten durch bestimmte Integrale auszudrücken, herangehen, ist es erforderlich, den Begriff der Konvergenz unendlicher Produkte genau zu präcisieren.

So wie eine unendliche Reihe konvergiert, wenn die noch hinzukommenden Glieder oder der Rest der Reihe sich immer mehr der Null nähern, so wird ein unendliches Produkt konvergierend sein, d. h. einen endlichen, festen, bestimmten Grenzwert besitzen, wenn die noch hinzukommenden Faktoren sowohl einzeln als in ihrer Gesamtheit sich ohne Ende der Einheit nähern, weil noch so viele Einheitsfaktoren ebensowenig den Wert eines Produktes wie noch so viele Summanden „Null" den Wert einer Summe zu alterieren im stande sind. Nehmen aber die folgenden Faktoren bis ins Unendliche zu oder ab, so ändert ein jeder neu hinzutretende den Wert des Produktes, indem es in dem einen Falle beständig wächst, in dem anderen beständig kleiner wird, in beiden Fällen also aufhört, gegen eine feste Grenze zu konvergieren.

Auch bei einer hierauf gerichteten Untersuchung bringt man mit dem gröfsten Nutzen die stets so fruchtbare Methode des Überganges vom Endlichen zum Unendlichen in Anwendung. Man nimmt von dem unendlichen Produkt $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \cdots$ zunächst nur eine feste, endliche Anzahl n seiner Faktoren und hat, da diese ebenfalls sämtlich endlich und bestimmt sind, dann immer etwas durchaus Festes, Bestimmtes, Endliches. Läfst man aber nun den Index n unaufhörlich bis ins Unendliche wachsen, vermehrt also immerfort die Anzahl der Faktoren, so behält dieses unendliche Produkt nur dann einen Sinn, wenn der Faktor a_n gegen die Einheit konvergiert, alle Faktoren im Unendlichen mithin gleich 1 sind. Ist dieses aber auch nur mit einem dieser Faktoren nicht der Fall, dann besitzt das unendliche Produkt keinen festen Grenzwert.

10. Nichtkonvergenz der Reduktionsformel für $n = \infty$. — Wenn sich in der Reduktionsformel des § 6:

$$(1) \quad (a, b) = \frac{a+b}{a} \cdot \frac{a+b+1}{a+1} \cdots \frac{a+b+n-1}{a+n-1} \cdot (a+n, b),$$

für ein unendlich grofses n das auf der rechten Seite befindliche unendliche Produkt einem festen Grenzwert näherte, so gewönne man eine Darstellung des Integrals (a, b) durch einen Quotienten unendlicher Fakultäten. Dazu wäre den Erläuterungen des vorigen Paragraphen zufolge erforderlich, dafs sämtliche unendlich weit entfernten Faktoren dieses Produktes ohne Ausnahme gegen die Einheit konvergierten. Dies ist in der That der Fall mit jedem im Unendlichen gelegenen gebrochenen Faktor $\frac{a+b+n-1}{a+n-1}$, da für konstante, endliche Werte p, q stets:

$$(2) \qquad \lim_{s=\infty} \frac{p+s}{q+s} = \lim_{s=\infty} \frac{\frac{p}{s}+1}{\frac{q}{s}+1} = \frac{1}{1} = 1$$

ist; es ist aber nicht der Fall mit dem vereinzelten Schlufsfaktor $(a+n, b)$, der vielmehr mit unaufhörlich wachsendem n gegen Null konvergiert. Denn zunächst weifs man [8, (2)], dafs $(n, 1) = \frac{1}{n}$, also $\lim_{n=\infty} (n, 1) = \frac{1}{\infty}$ ist. Vermöge des Satzes des § 7 ist aber, für ein beliebiges positives a [3]), $(a+n, 1) < (n, 1)$ und, vermöge desselben, wegen der Symmetrie von (a, b) („Integrale" 56) auch auf das andere Element anwendbaren Satzes, für ein beliebiges $b > 1$:

$$(a+n, b) < (a+n, 1) < (n, 1).$$

Mithin ist:

$$\lim_{n=\infty} (a+n, b) < \lim_{n=\infty} (n, 1),$$

also *a fortiori* unendlich klein.

Damit ist in ziemlicher Allgemeinheit — und auf einen erschöpfenden Beweis kommt es uns auch nicht an — dargethan, dafs für $n = \infty$ das auf der rechten Seite der Reduktionsformel (1) befindliche Produkt wegen des bis zur Null abnehmenden Schlufsfaktors nicht gegen einen festen Grenzwert konvergiert, demnach diese Formel an und für sich uns nicht zu der Darstellung des Integrals (a, b) durch einen Quotienten unendlicher Fakultäten verhilft.

11. Darstellung von (a, b) durch unendliche Fakultäten. — Bildet man aber den Quotienten von zwei solchen unendlichen Produkten, für das Integral (a, b), bezw. für das nur durch das „erste" Element verschiedene Integral (a', b), so wird sich herausstellen, dafs dieser Quotient einen festen Grenzwert besitzt, indem seine unendlich entfernten Faktoren ausnahmslos gegen die Einheit konvergieren, und ist dieses der Fall, so wird durch eine gemäfs § 8 getroffene, schickliche Wahl eines in geschlossener Form angebbaren Wertes von (a', b) die Darstellung des Integrals (a, b) durch den Quotienten von unendlichen Fakultäten bewerkstelligt sein.

Es handelt sich also, indem wir $a > a'$ voraussetzen, um die Gleichung:

$$\text{(1)} \qquad \frac{(a, b)}{(a', b)} = \frac{\frac{a+b}{a} \cdot \frac{a+b+1}{a+1} \cdot \frac{a+b+2}{a+2} \cdots \text{in inf.} \times \lim\limits_{n=\infty} (a+n, b)}{\frac{a'+b}{a'} \cdot \frac{a'+b+1}{a'+1} \cdot \frac{a'+b+2}{a'+2} \cdots \text{in inf.} \times \lim\limits_{n=\infty} (a'+n, b)},$$

deren rechte Seite durch Verwandlung der Doppelbrüche in einfache Brüche natürlich auch so eingerichtet werden kann, dafs sie, abgesehen von den Schlufsintegralen, die Gestalt annimmt:

$$\frac{a'(a'+1)(a'+2)\cdots(a+b)(a+b+1)(a+b+2)\cdots}{a(a+1)(a+2)\cdots(a'+b)(a'+b+1)(a'+b+2)\cdots}$$

und so statt der im Zähler und Nenner befindlichen Quotienten von Fakultäten aus dem Quotienten der Produkte von je zwei Fakultäten besteht.

Betreffs des Wachstums von n ist aber, weil sonst unsere Schlufsfolgerungen vollständig in der Luft schweben würden, wie immer bei Untersuchungen dieser Art wohl zu beachten, dafs es im Zähler und Nenner völlig gleichmäfsig vor sich gehen mufs, so dafs sich in beiden durchaus immer gleich viel Faktoren befinden. Ist diese Bedingung erfüllt, so repräsentieren also die in jedem Faktor

$$(1') \qquad \frac{\dfrac{a+b+n}{a+n}}{\dfrac{a'+b+n}{a'+n}}$$

und ebenso die in den beiden Schlufsintegralen $(a+n, b)$, $(a'+n, b)$ vorkommenden, auch selbst im Unendlichen gelegenen n denselben ganzen Zahlenwert, und besitzen mithin in allen diesen Faktoren $a+n$ und $a'+n$, $a+b+n$ und $a'+b+n$ dieselbe konstante Differenz $a-a'$, die auch schon in den beiden Integralen auf der linken Seite der (1) die „ersten" Elemente a, a' aufweisen. Nur bezüglich der beiden Schlufsintegrale werden wir sehen, dafs für sie wegen der Verschiedenheit von a und a' diese Differenz auch um eine endliche Konstante, z. B. m, verschieden, d. h. statt $a-a'$ eine andere unveränderliche Gröfse $a+m-a'$ sein darf, mit anderen Worten, dafs nichts darauf ankommt, ob das „erste" Element des oberen Integrals $a+n$ oder $a+m+n$, und mithin n in beiden Integralen gleich grofs oder um ein paar Einheiten verschieden ist.

Nach diesen Festsetzungen können wir an den verlangten Konvergenzbeweis herangehen. Und da a, a', b konstante, endliche Werte sind, mithin vermöge der (2) des § 10 jeder im Unendlichen liegende Faktor (1'):

$$\lim_{s=\infty} \frac{\dfrac{a+b+s}{a+s}}{\dfrac{a'+b+s}{a'+s}} = \frac{\lim\limits_{s=\infty} \dfrac{a+b+s}{a+s}}{\lim\limits_{s=\infty} \dfrac{a'+b+s}{a'+s}} = \frac{1}{1} = 1$$

ist, so ist nur noch der Nachweis zu führen, dafs auch der Schlufsfaktor:

$$(1'') \qquad \frac{(a+n, b)}{(a'+n, b)},$$

für immer wachsende Werte von n gegen die Einheit konvergiert.

Zu diesem Zwecke gehen wir von dem ganz beliebigen Integral

$$(k, b)$$

aus, in dem also namentlich auch das „erste" Element k keine ganze Zahl zu sein braucht, und lassen in ihm dieses Element bei durchaus konstantem b mehr und mehr anwachsen, jedoch mit der Mafsgabe, dafs sein Zuwachs immer eine zwar beliebige, aber fest bestimmte, endliche, positive ganze Zahl δ sein soll. Dann fliefst, welchen Wert auch k gerade haben mag, aus der allgemeinen Reduktionsformel des § 6 unmittelbar die Relation:

$$\frac{(k+\delta, b)}{(k, b)} = \frac{k}{k+b} \cdot \frac{k+1}{k+b+1} \cdots \frac{k+\delta-1}{k+b+\delta-1}.$$

Das Verhältnis beider Integrale $(k+\delta, b)$, (k, b) ist also für ein noch so sehr wachsendes k durch das Produkt einer festen Anzahl von Faktoren ausgedrückt, welche sämtlich mit bis ins Unendliche zunehmendem k in die Einheit übergehen; denn da b konstant ist, so hat man für jeden der endlichen Werte $h = 0, 1, 2, \ldots, \delta - 1$:

$$\lim_{k=\infty} \frac{k+h}{k+b+h} = 1.$$

Mithin ist auch das Produkt aller δ Faktoren gleich 1 und demzufolge:

(2) $$\lim_{k=\infty} \frac{(k+\delta, b)}{(k, b)} = 1 \qquad (\delta \text{ positiv ganz}).$$

Man mufs sich aber bei dieser Entwicklung, wie immer bei analogen Untersuchungen, hüten, zugleich mit k auch δ wachsen zu lassen. Denn wenn die Anzahl der Faktoren fluent wäre und in dem Mafse, als sie sich selbst sämtlich der Einheit nähern, immer mehr zunähme, so liefse sich von ihrem Produkt, dessen Bedeutung dann ganz unsicher würde, nichts Bestimmtes mehr aussagen.

Nun hat man nur $k = a' + n$ und $\delta = a - a'$ zu nehmen, um den Quotienten $\frac{(k+\delta, b)}{(k, b)}$ mit $\frac{(a'+n+a-a', b)}{(a'+n, b)}$, also mit dem Quotienten (1″) zu identificieren, und da in diesem a und a' konstant sind und n bis ins Unendliche wächst, so verwandelt sich alsdann die (2) in:

(3) $$\lim_{n=\infty} \frac{(a+n, b)}{(a'+n, b)} = 1.$$

Die Gültigkeit dieses Resultats ist aber an die Bedingung geknüpft, dafs $\delta = a - a'$ eine ganze Zahl sei, was natürlich im allgemeinen nicht der Fall zu sein braucht; daher kommt es zur Vervollständigung unseres Konvergenzbeweises noch darauf an, uns von dieser Beschränkung frei zu machen und zu zeigen, dafs, auch wenn das zur Unterscheidung gewählte δ' zwar ebenfalls positiv und konstant, aber nicht mehr ganz vorausgesetzt wird, gleichwohl noch

$$\lim_{k=\infty} \frac{(k+\delta', b)}{(k, b)} = 1$$

ist.

Dieser Fall läfst sich sofort auf den ersten Fall zurückführen. Denn bezeichnet δ wie vorhin eine beliebige positive, ganze, konstante Zahl, die wir aber gröfser als δ' annehmen, so ist dem Lehrsatz des § 7 zufolge für ein ganz beliebiges k

$$0 < (k+\delta, b) < (k+\delta', b) < (k, b) \qquad (0 < \delta' < \delta),$$

mithin auch

$$0 < \frac{(k+\delta, b)}{(k, b)} < \frac{(k+\delta', b)}{(k, b)} < 1 \qquad (0 < \delta' < \delta).$$

Der Wert des fraglichen Quotienten $\frac{(k+\delta', b)}{(k, b)}$ ist somit für jeden Wert von k zwischen zwei Grenzen eingeschlossen, von denen die eine fest, gleich 1 ist, die andere aber, $\frac{(k+\delta, b)}{(k, b)}$, wie oben bewiesen, für ein unendlich wachsendes k ebenfalls gegen die Einheit konvergiert. Um so mehr mufs dies mit dem dazwischenliegenden Quotienten der Fall sein. Es ist also auch:

$$(2') \qquad \lim_{k=\infty} \frac{(k+\delta', b)}{(k, b)} = 1 \qquad (\delta' \text{ beliebig, positiv}),$$

mithin vermöge der schon oben in Anwendung gebrachten Substitution: $k = a' + n$, $\delta' = a - a'$, die (3) ganz allgemein gültig.

Der Grenzwert des Quotienten der beiden Integrale ist also gleich 1, mag die betreffende Differenz δ oder δ' sein; notwendig ist, wie bereits früher angegeben, nur, dafs dieselbe immer einen positiven, endlichen, konstanten Wert vorstellt.

Es sei darauf hingewiesen, dafs die zur Ermittelung des Grenzwertes (2') befolgte Methode genau dieselbe ist, die man bekanntlich zur Bestimmung des

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

in Anwendung bringt, wo man aus der Gröfsenordnung

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \qquad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

die Ungleichheit ableitet:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,$$

in der $\lim\limits_{x=0} \cos x$ sich immer mehr der anderen festen Grenze 1 nähert.

Unterdrückt man demnach auf der rechten Seite der (1) den der Einheit gleichen Schlufsfaktor (3), so hat man die vollkommen strenge Gleichung:

$$\frac{(a, b)}{(a', b)} = \frac{\frac{a+b}{a} \cdot \frac{a+b+1}{a+1} \cdot \frac{a+b+2}{a+2} \cdots \text{in inf.}}{\frac{a'+b}{a'} \cdot \frac{a'+b+1}{a'+1} \cdot \frac{a'+b+2}{a'+2} \cdots \text{in inf.}}$$

in der Zähler und Nenner aus unendlich, aber gleich vielen Faktoren bestehen.

Ihrer Ableitung nach, welche ein positives $\delta' = a - a'$ zur Voraussetzung hatte, besitzt diese Gleichung nur für den Fall $a > a'$ Gültigkeit. Dementsprechend mufs man für $a < a'$ den Entwicklungen vielmehr den Quotienten $\frac{(a + a' - a, b)}{(a, b)} = \frac{(a', b)}{(a, b)}$ zu Grunde legen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, Zähler und Nenner in der (1) und mithin auch in dem eben erhaltenen Resultat miteinander vertauschen. Legen wir nun aber a' den speciellen Wert 1 bei, so wird $(a', b) = (1, b) = \frac{1}{b}$ [8, (3)], und man gewinnt sowohl für $a > 1$ als für $0 < a < 1$ dieselbe, also allgemein gültige Formel:

$$(a, b) = \frac{1}{b} \cdot \frac{\frac{a+b}{a} \cdot \frac{a+b+1}{a+1} \cdot \frac{a+b+2}{a+2} \cdots \text{in inf.}}{\frac{b+1}{1} \cdot \frac{b+2}{2} \cdot \frac{b+3}{3} \cdots \text{in inf.}}$$

$$= \frac{1}{b} \cdot \frac{(a+b) \cdot 1}{a(b+1)} \cdot \frac{(a+b+1) \cdot 2}{(a+1)(b+2)} \cdots \frac{(a+b+n-1) \cdot n}{(a+n-1)(b+n)} \times \text{etc.}$$

Hier sind in dem letzten Quotienten alle dasselbe n enthaltenden Faktoren des Zählers und Nenners in einen Faktor zusammengefafst, und das nachgesetzte „$\times$ etc." soll genau wie das „$+$ etc." bei unendlichen Reihen andeuten, dafs derselbe nicht der letzte Faktor des Produkts ist, dieses vielmehr, indem n

immer gröfsere ganze Werte annimmt, bis ins Unendliche fortläuft und, von dem konstanten $\frac{1}{b}$ abgesehen, den Quotienten

$$\frac{(a+b+s-1)\cdot s}{(a+s-1)(b+s)} \qquad (s=1, 2, 3, \ldots, \infty)$$

zum allgemeinen Faktor hat.

Nun sind aber die einzelnen Faktoren dieses Produkts in Bezug auf a und b nicht symmetrisch gebaut, während doch das Integral (a, b) sich dieser Symmetrie erfreut. Weil aber, wenigstens in Produkten, die aus einer festen, endlichen Anzahl von Faktoren bestehen, diese in völlig beliebiger Weise angeordnet werden dürfen, so wird man leicht durch eine passende Verschiebung der Faktoren die Symmetrie herstellen können, wenn man nur zunächst, ehe n schon in Flufs begriffen ist, das Produkt mit dem festen Faktor $\frac{(a+b+n-1)\cdot n}{(a+n-1)(b+n)}$ abschliefst. Man nehme aus jedem Quotienten, von $\frac{(a+b)\cdot 1}{a(b+1)}$ an, den ersten Faktor im Zähler und Nenner heraus und vereinige sie mit dem vorangehenden Bruche zu einem neuen Quotienten. Es bleibt dann aus dem letzten Quotienten der Faktor $\frac{n}{b+n}$ überschüssig, welcher sich der im übrigen erzielten Symmetrie nicht fügt. Da aber b konstant, mithin $\lim\limits_{n=\infty} \frac{n}{b+n} = 1$ ist, so verschwindet für das bis ins Unendliche fortgeführte Produkt dieser überschüssige Faktor, und man hat in aller Strenge als Ausdruck für das Integral (a, b) das in Bezug auf a und b vollkommen symmetrische, unendliche Produkt:

$$(4) \qquad (a, b)$$
$$= \frac{a+b}{a\cdot b}\,\frac{(a+b+1)\cdot 1}{(a+1)(b+1)} \cdots \frac{(a+b+n-1)(n-1)}{(a+n-1)(b+n-1)} \times \text{etc.}$$

Merkwürdig in dieser Formel ist der Umstand, dafs der erste Faktor nicht dasselbe Gesetz wie die anderen Faktoren befolgt, dem gemäfs sein Zähler noch mit Null multipliciert sein müfste. wodurch freilich der Sinn des ganzen unendlichen Produkts in Frage gestellt werden würde.

Unter Anwendung des Produktzeichens Π, von dem man jetzt häufigen Gebrauch macht, läfst sich dem vorstehenden Resultat, wenn wir den allgemeinen Faktorenindex durch ν bezeichnen, noch folgende abgekürzte Form geben:

$$(a, b) = \frac{a+b}{a \cdot b} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{(a+b+\nu)\cdot \nu}{(a+\nu)(b+\nu)}.$$

12. Produktdarstellung des sinus. — In der vorstehenden Formel ist als specieller Fall die oben („Integrale“ 38, 3) auf anderem Wege hergeleitete Darstellung des sinus durch ein unendliches Produkt enthalten.

Wenn nämlich die beiden Elemente des Integrals (a, b) komplementär zueinander sind, d. h. $a + b = 1$, $b = 1 - a$ ist, so gilt bekanntlich [„Integrale“ 61, (2')] die Formel:

$$(a, 1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Durch Einsetzung dieser Werte verwandelt sich aber die (4) des vorigen Paragraphen in die Relation:

$$\frac{\pi}{\sin a\pi}$$

$$= \frac{1}{a(1-a)} \cdot \frac{2\cdot 1}{(a+1)(2-a)} \cdots \frac{n(n-1)}{(a+n-1)(n-a)} \times \text{etc.}$$

Ähnlich wie dort kann man auch hier wieder durch geeignete Umstellung und Verschiebung der Faktoren das auf der rechten Seite befindliche Produkt symmetrisch gestalten und, während zunächst n noch einen festen, endlichen Wert besitzt, seine n ersten Faktoren so anordnen:

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1^2}{(1+a)(1-a)} \cdots \frac{(n-1)^2}{(n-1+a)(n-1-a)} \times \frac{n}{n-a}.$$

Da aber $\lim\limits_{n=\infty} \frac{n}{n-a} = 1$ ist, für ein unaufhörlich wachsendes n also dieser der Gesetzmäfsigkeit der anderen Brüche sich nicht fügende überschüssige Faktor fortfällt, so stellt $\frac{\pi}{\sin a\pi}$ in aller Strenge den Grenzwert des vorstehenden, bis ins Unendliche fortgeführten Produkts dar. Man hat mithin die Gleichung:

$$\sin a\pi = a\pi \cdot \frac{1^2 - a^2}{1^2} \cdot \frac{2^2 - a^2}{2^2} \cdots \frac{(n-1)^2 - a^2}{(n-1)^2} \times \text{etc.}$$

$$= a\pi \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^2 - a^2}{\nu^2},$$

oder, wenn man $a\pi = \varphi$, $a = \frac{\varphi}{\pi}$ setzt:

$$\sin\varphi = \varphi \cdot \frac{\pi^2 - \varphi^2}{\pi^2} \cdot \frac{4\pi^2 - \varphi^2}{4\pi^2} \cdot \frac{9\pi^2 - \varphi^2}{9\pi^2} \cdots$$

$$= \varphi \prod_1^\infty \frac{\nu^2\pi^2 - \varphi^2}{\nu^2\pi^2} = \varphi \prod_1^\infty \left(1 - \frac{\varphi^2}{\nu^2\pi^2}\right),$$

wo φ beliebig positiv sein darf[4]).

III.

Die asymptotischen Werte unendlicher Fakultäten. Die Taylorsche Reihe. Diskussion von $\lim\limits_{m=\infty}\left(1+\frac{t}{m}\right)^m$.

13. Einleitende Bemerkungen. — Wenn auch, wie wir im vorhergehenden (10) gesehen haben, $\lim\limits_{n=\infty}(a+n, b)$ unendlich klein ist und demzufolge das auf der rechten Seite der Reduktionsformel befindliche Produkt für ein bis ins Unendliche wachsendes n keinen bestimmten Wert annimmt, so ist es doch von Interesse, zu wissen, was alsdann aus diesem Produkt wird, oder, da die übrigen im Unendlichen gelegenen Faktoren in die Einheit übergehen, wie sich dabei der Schlufsfaktor $(a+n, b)$ geriert; denn man weifs viel mehr von ihm, wenn man angeben kann, auf welche Weise er bis zu Null hin abnimmt.

Viele Funktionen sind nämlich so beschaffen, dafs sie, mögen sie im Endlichen noch so kompliziert sein, für einen unendlich werdenden Parameter eine weit einfachere Gestalt annehmen, genau wie manche beliebig gestaltete Kurve [5]) im Unendlichen durch ihre Asymptote ersetzt werden kann. Eine Ausnahme hiervon machen selbstverständlich rein periodische Funktionen, die ihre Gestalt nicht zu ändern, sich also auch nicht zu vereinfachen vermögen, und deren Simplifikation eben schon in ihrer fortwährenden Reproduktion zu erblicken ist. Die anderen Funktionen können aber in der Regel im Unendlichen durch einen einfacheren Ausdruck ersetzt werden, indem mit unaufhörlich wachsendem Parameter das Verhältnis beider gegen die Einheit konvergiert. Solche Ausdrücke, deren Untersuchung in neuester Zeit die Mathematiker viel beschäftigt hat und zu einem wichtigen Kapitel in der Analysis des Unendlichen geworden ist, werden asymptotische Werte der betreffenden Funktionen oder asymptotische Funktionen genannt.

In Betreff unseres Integrals $(a+n, b)$ wird sich herausstellen, dafs es asymptotisch einer gewissen negativen Potenz von n proportional ist, und dafs der konstante Koeffizient, mit welchem diese behaftet ist, von dem Element b abhängig ist und das sogenannte Eulersche Integral der zweiten Gattung konstituiert, so dafs die schliefslich aus der Reduktionsformel resultierende Gleichung einen Rapport zwischen beiden Eulerschen Integralen ergeben wird.

Von welchem Interesse die angeregte Frage ist, läfst sich schon daraus entnehmen, dafs das in der Reduktionsformel vorkommende Produkt für $a = 1$ den Binomialkoeffizienten

$$\frac{(b+1)(b+2)(b+3)\cdots(b+n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots n}$$

für den Exponenten $-(b+1)$ darstellt und es schon an sich wissenswert ist, welcher einfacheren Funktion von n ein solcher Fakultätenquotient im Unendlichen entspricht.

14. Asymptotischer Wert von $(a+n, b)$. Beziehung zwischen den beiden Eulerschen Integralen. — Wir wählen für das Integral $(a+n, b)$ die Form $\int_0^1 (1-x)^{a+n-1} x^{b-1}\,dx$ und setzen der Einfachheit halber:

$$(1') \qquad a+n-1 = m,$$

so dafs wir haben:

$$(1) \qquad (a+n, b) = \int_0^1 (1-x)^m x^{b-1}\,dx \qquad \left({a \atop b} > 0\right),$$

wo m, das natürlich gleichzeitig mit n unendlich grofs wird, eine positive flüssige Zahl bedeutet, die aber ebensowenig wie das konstante a ganz zu sein braucht. Vermittelst der Substitution $x = \frac{t}{m}$ führen wir noch eine neue, x proportionale Variable t ein. Das gibt:

$$(1_0) \qquad \int_0^1 (1-x)^m x^{b-1}\,dx = m^{-b} \int_0^m \left(1-\frac{t}{m}\right)^m t^{b-1}\,dt,$$

und es erwächst nunmehr die Aufgabe, einen einfacheren Ausdruck ausfindig zu machen, der an die Stelle dieses letzteren Integrals gesetzt werden kann, wenn m unaufhörlich zunimmt.

Dabei werden wir zunächst nicht ganz streng zu Werke gehen, das erhaltene Resultat aber nachträglich rechtfertigen.

Bekanntlich ist:

(2) $$\lim_{m=\infty}\left(1 - \frac{t}{m}\right)^m = e^{-t};$$

doch gilt dieser Grenzwert nur für ein **konstantes** t, was in der (1_0) nur so lange der Fall ist, als man m fixiert. Da es sich aber gerade um den Wert handelt, den das von 0 bis m sich erstreckende Integral für unendlich grofse Werte von m annimmt, so wächst von jenem festen Werte von m an t gleichzeitig mit der oberen Integrationsgrenze und hört dann auf, konstant zu sein, und zwar wird dies schliefslich immer, wenn auch um so später eintreten, je gröfser von vornherein der feste Wert m gewählt worden war. Dann ist aber die (2) nicht mehr unbedingt, sondern nur unter der Voraussetzung gültig, dafs das Wachsen von t in einem ganz bestimmten Verhältnis zu dem Wachsen von m steht, während sonst die Formel sogar falsch sein kann. Denn die spätere Diskussion wird ergeben, dafs die Potenz $\left(1 - \frac{t}{m}\right)^m$ nicht einfach der Exponentialgröfse e^{-t} gleich ist, sondern dem Produkt derselben mit einem gewissen Faktor, der nur bei einem konstanten t sich für ein wachsendes m stets der Einheit nähert, bei einem flüssigen t aber auch unendlich klein werden könnte, in welchem Falle mithin e^{-t} unendlich mal gröfser wäre als der wahre Wert des $\lim\limits_{m=\infty}\left(1 - \frac{t}{m}\right)^m$.

Gleichwohl lassen wir vorerst die (2) gelten, und dafs wir dann trotz dieses ungenauen Wertes zu einem richtigen Resultat gelangen, hat seinen Grund darin, dafs gerade an den einem unendlich grofsen t entsprechenden Stellen, wo die Substitution falsch ist, die fortgelassenen Gröfsen als unendlich klein vernachlässigt werden können, wie ja auch $\lim\limits_{t=\infty} e^{-t}$ selbst gleich Null ist.

Wir setzen also, vorbehaltlich späterer Verifikation:

(3) $$\begin{cases} \lim\limits_{n=\infty}(a + n, b) = \lim\limits_{m=\infty} m^{-b} \cdot \lim\limits_{m=\infty}\int\limits_0^m \left(1 - \frac{t}{m}\right)^m t^{b-1}\,dt \\ \qquad = (\lim\limits_{m=\infty} m^{-b}) \cdot \int\limits_0^\infty e^{-t}\, t^{b-1}\,dt, \end{cases}$$

oder, da letzteres Integral bekanntlich („Integrale" 54, II) das durch $\Gamma(b)$ bezeichnete Eulersche Integral der zweiten Gattung ist:

$$\lim_{n=\infty}(a+n, b) = m^{-b}\cdot\Gamma(b) \qquad (m=\infty).$$

Hier können wir noch unbedenklich $m = a + n - 1$ durch n ersetzen, denn aus

$$\lim_{n=\infty}\frac{(n+a-1)^{-b}}{n^{-b}} = \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{a-1}{n}\right)^{-b} = 1$$

ersieht man, dafs das Verhältnis zweier Potenzen, die denselben konstanten Exponenten haben, und deren Basen gleichzeitig unbegrenzt wachsen, gegen die Einheit konvergiert. So gelangt man zu dem asymptotischen Ausdruck für $(a+n, b)$:

$$(3_0) \qquad (a+n, b) = n^{-b}\cdot\Gamma(b) \qquad (n=\infty),$$

der besagt, dafs zuletzt $(a+n, b)$ so abnimmt, wie die mit dem konstanten Faktor $\Gamma(b)$ multiplicierte $(-b)^{\text{te}}$ Potenz von n, oder dafs:

$$\lim_{n=\infty}\frac{(a+n, b)}{n^{-b}\,\Gamma(b)} = \lim_{n=\infty}\frac{\int\limits_0^1(1-x)^{a+n-1}x^{b-1}\,dx}{n^{-b}\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{b-1}\,dt} = 1$$

ist.

Ersetzt man nun in der Reduktionsformel den Schlufsfaktor $(a+n, b)$ durch seinen soeben erhaltenen asymptotischen Wert, so entspringt folgende, aber nur für ein unendlich grofses n oder für ein unendliches Produkt gültige Relation zwischen den Eulerschen Integralen der ersten und zweiten Gattung:

$$(4) \quad (a,b) = \frac{a+b}{a}\cdot\frac{a+b+1}{a+1}\cdots\times\frac{a+b+n-1}{a+n-1}\times n^{-b}\,\Gamma(b)$$
$$(n=\infty).$$

Auf gleiche Weise gewinnt man immer den asymptotischen Wert eines unendlichen Produkts, indem weiter nichts nötig ist, als den Ergänzungsfaktor durch einen einfacheren Ausdruck zu ersetzen, dessen Verhältnis zu jenem zuletzt gegen die Einheit konvergiert.

15. Darstellung von $\Gamma(b)$ durch einen Fakultätenquotienten. — Aus der vorstehenden Formel fliefst sofort eine Darstellung des Eulerschen Integrals der zweiten Gattung durch den Quotienten zweier unendlicher Fakultäten.

Denn vermittelst des schon mehrfach angewandten speciellen Wertes $(1, b) = \frac{1}{b}$ wird diese Gleichung für $a = 1$:

$$1 = b \cdot \frac{(1+b)(2+b)\cdots(n+b)}{1 \cdot 2 \cdots n} \times n^{-b}\Gamma(b) \quad (n=\infty).$$

Und indem wir hier wieder wie in den §§ 11 f. zur Erzielung der Symmetrie eine Verschiebung der Faktoren vornehmen und zunächst für ein festes n schreiben:

$$\frac{b}{1}\,\frac{b+1}{2}\,\frac{b+2}{3}\cdots\frac{b+n-1}{n} \times (b+n)n^{-b}\Gamma(b),$$

dann aber für ein unaufhörlich wachsendes n in Anbetracht, dafs $\lim\limits_{n=\infty}\frac{b+n}{n} = 1$, den Ergänzungsfaktor $b+n$ durch n ersetzen, erhält man die Formel:

$$(1)\quad \Gamma(b) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{b(b+1)(b+2)\cdots(b+n-1)} \cdot n^{b-1} \quad (n=\infty).$$

Falls man sich anders, was gar nicht schwer fällt, direkt überzeugt hat, dafs diese Formel stets einen endlichen, festen Wert anzeigt, darf sie auch als Definitionsgleichung für das Eulersche Integral der zweiten Gattung aufgestellt werden, und so hat in der That Gaufs in der wichtigen Abhandlung, in der er die Produktformel der Gammafunktionen („Integrale" 64) herleitet, $\Gamma(b)$ definiert. Übrigens findet sich obiger Ausdruck für $\Gamma(b)$ auch schon bei Euler, ohne dafs er aber weiter Notiz von ihm nähme.

Das unendliche Produkt (1) darf aber nicht wie etwa das (a, b) darstellende Produkt in der (4) des § 11 als ein unendlich fortlaufendes Produkt angesehen werden. Denn da der Ergänzungsfaktor n^{b-1} sich nie der Einheit nähert, vielmehr, je nachdem $b \gtrless 1$ ist, gegen das Unendlichgrofse oder Unendlichkleine konvergiert, so ist man auch nie berechtigt, ihn fortzulassen; gleichzeitig ist aber der Quotient der beiden unendlichen Fakultäten entsprechend unendlich klein oder unendlich grofs, so dafs gleichwohl das Produkt dieses Quotienten durch den Ergänzungsfaktor immer einen endlichen Wert beibehält. Nur in dem einen Falle, wo $b = 1$ ist, hat man $n^{b-1} = 1$ und erhält aus der (1) den speciellen Wert:

$$\Gamma(1) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdots}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdots},$$

d. i. identisch $= 1$.

Ein solches Produkt mit einem Ergänzungsfaktor läfst sich aber immer leicht in ein gewöhnliches fortlaufendes unendliches Produkt ohne Ergänzungsfaktor umsetzen. Man braucht dazu nur diesen als ein Produkt von ebensoviel Faktoren darzustellen, als das übrige Produkt besitzt, und dann jene gleichmäfsig unter diese zu verteilen. Schreibt man zu diesem Zwecke in der (1) den Quotienten in der Form:

$$\frac{1}{b} \times \frac{2}{b+1} \cdot \frac{3}{b+2} \cdots \frac{n}{b+n-1}$$

und setzt die Basis n des Ergänzungsfaktors identisch

$$n = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1},$$

so besteht ein jedes dieser beiden Produkte, wenn man von dem ersteren $\frac{1}{b}$ abtrennt, aus $n-1$ Faktoren, durch deren geeignete Zusammensetzung die (1) die Gestalt annimmt

$$\begin{aligned} \Gamma(b) &= \frac{1}{b} \times \frac{2^b}{b+1} \cdot \frac{3^b}{(b+2)\,2^{b-1}} \cdots \frac{n^b}{(b+n-1)\,(n-1)^{b-1}} \\ &= \frac{1}{b} \times \left(\frac{2}{1}\right)^b \cdot \frac{1}{b+1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^b \cdot \frac{2}{b+2} \cdots \left(\frac{n}{n-1}\right)^b \cdot \frac{n-1}{b+n-1} \\ &\qquad (n = \infty) \\ &= \frac{1}{b} \prod_{1}^{\infty} \left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^b \cdot \frac{\nu}{b+\nu}. \end{aligned}$$

In dieser Gestalt kann die Formel häufig gute Dienste leisten, doch werden wir weiter keinen Gebrauch von ihr machen.

16. Darstellung von (a, b) durch eine Funktion der Gamma. — Durch Vergleichung der beiden unendlichen Produkte für (a, b) in der (4) des § 11 und für $\Gamma(b)$ in der (1) des vorstehenden Paragraphen wird man von selbst darauf geführt, dafs (a, b) durch eine Funktion der Gamma darstellbar sein mufs. Denn wie man fast auf den ersten Blick erkennt, resultiert die erste von jenen beiden Formeln, wenn man nach Anleitung der zweiten den Ausdruck $\frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ durch Fakultäten ersetzt. In der That, da natürlich in allen drei Gamma dasselbe bis ins Unendliche wachsende n genommen werden darf, so erhält man:

$$\frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdots n \times (a+b) \cdots (a+b+n-1)}{a(a+1) \cdots (a+n-1) \times b \cdots (b+n-1)} \cdot \frac{n^{a+b-2}}{n^{a+b-1}}$$
$$(n = \infty)$$

$$= \frac{a+b}{ab} \cdot \frac{(a+b+1)\cdots(a+b+n-1) \times 1\cdot 2 \cdots (n-1)}{(a+1) \cdots (a+n-1) \times (b+1)\cdots(b+n-1)} \times \text{etc.},$$

d. i. der in § 11 hergeleitete Wert von (a, b).

So haben wir uns hier vermittelst Fakultäten die Formel

$$(a, b) = \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

verschafft, welche oben („Integrale" **60**) in geeigneterer Weise durch Anwendung von Doppelintegralen gewonnen worden ist.

17. Die Taylorsche Reihe. — Zur Entscheidung über die noch aus § 14 her zu absolvierende Frage, ob wir berechtigt sind, für unaufhörlich wachsende m und t den Ausdrücken $\left(1-\frac{t}{m}\right)^m$ und $\int\limits_0^m \left(1-\frac{t}{m}\right)^m t^{b-1}\,dt$ die Grenzwerte e^{-t} bezw. $\Gamma(b)$ zu substituieren, sind wir der Taylorschen Reihe und ihres Restgliedes benötigt. Wir wollen dieselbe hier vermittelst der Integralrechnung ableiten, von der sie eine ganz einfache Anwendung ist; auch erhält man sie auf diesem Wege viel natürlicher und schneller als durch die etwas künstliche Methode, durch welche man in den Elementen der Differentialrechnung zu ihr zu gelangen pflegt. Dazu kommt, dafs ihr Ursprung thatsächlich der Integralrechnung angehört und diese Art der Entwicklung den wesentlichen Vorteil bietet, den genauen, durch ein bestimmtes Integral ausgedrückten Wert des Restes zu ergeben.

Die eigentlich unendliche, aber durch Hinzufügung ihres Restes sich auf n Glieder reducierende Taylorsche Reihe dient zur Darstellung der Differenz der beiden Funktionalwerte $f(x+h) - f(x)$ vermittelst der Werte der n ersten Derivierten der Funktion $f(x)$. Zunächst läfst sich diese Differenz durch ein bestimmtes Integral ausdrücken. Wenn nämlich x und h beliebige konstante Werte bedeuten und die Veränderliche durch α bezeichnet wird, so hat man:

$$\frac{d\left(-f(x+h-\alpha)\right)}{d\alpha} = f'(x+h-\alpha),$$

weil bekanntlich nach der Lagrangeschen Bezeichnungsart die Charakteristiken f', f'', ... sich auf die Differentiationen nach dem ganzen Argument $x+h-\alpha$ beziehen, mithin, wenn dasselbe wie hier eine Funktion der Veränderlichen in sich begreift, noch mit der Derivierten dieser Funktion nach der unabhängigen Variablen zu multiplicieren sind. Daraus folgt aber

$$\int f'(x+h-\alpha)\cdot d\alpha = -f(x+h-\alpha)+C$$

und

$$(1)\qquad \int_0^h f'(x+h-\alpha)\cdot d\alpha = f(x+h)-f(x),$$

so dafs also, wie wir zeigen wollten, diese Differenz durch ein bestimmtes Integral dargestellt ist. Unterzieht man jetzt das vorstehende unbestimmte Integral wiederholt der teilweisen Integration der Reihe nach in Bezug auf die Faktoren $d\alpha$, α, $\alpha^2, \ldots$, so erhält man:

$$\int f'(x+h-\alpha)\cdot d\alpha$$

$$= \alpha \cdot f'(x+h-\alpha) + \int \alpha \cdot f''(x+h-\alpha)\,d\alpha,$$

$$\int \alpha \cdot f''(x+h-\alpha)\,d\alpha$$

$$= \frac{\alpha^2}{2}\cdot f''(x+h-\alpha) + \frac{1}{2}\int \alpha^2 \cdot f'''(x+h-\alpha)\,d\alpha,$$

. . . .

Durch successives Einsetzen dieser Ausdrücke, in denen bereits das Gesetz des Fortschreitens der Glieder ausgeprägt ist, gelangt man nach $(n-1)$maliger Integration zu der Gleichung:

$$\int f'(x+h-\alpha)\,d\alpha = \frac{\alpha}{1} f'(x+h-\alpha) + \frac{\alpha^2}{2!} f''(x+h-\alpha)$$

$$+ \frac{\alpha^3}{3!} f'''(x+h-\alpha) + \cdots + \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x+h-\alpha)$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!}\int \alpha^{n-1} f^{(n)}(x+h-\alpha)\,d\alpha.$$

Integriert man nun zwischen den Grenzen 0 und h, so fallen wegen der Potenzen von α für die untere Grenze $\alpha = 0$ alle endlichen Glieder aus, und es ergibt sich unter Berücksichtigung der (1) die Taylorsche Reihe:

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} & f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1\cdot 2} f''(x) + \cdots \\ & + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^h \alpha^{n-1} f^{(n)}(x+h-\alpha)\,d\alpha. \end{aligned}\right.$$

Zur Gültigkeit dieser Reihe ist erforderlich, dafs die sämtlichen Funktionen $f, f', \ldots f^{(n)}$ überall zwischen den Grenzen der Integration nach α einschliefslich der beiden Grenzwerte 0 und h, mithin in dem ganzen Intervall von x bis $x + h$ durchaus stetig und endlich und an ein analytisches Gesetz gebunden seien, denn nur solche Funktionen dürfen der teilweisen Integration zwischen bestimmten Grenzen unterworfen werden. Würden obige Funktionen an einer oder mehreren Stellen innerhalb der Grenzen (z. B. für $\alpha = k$) unstetig oder unendlich, so hätte man durch Trennung in Teilintegrale $\left(\int\limits_0^{k-\delta} + \int\limits_{k+\epsilon}^{h}\right)$ diese Stellen auszuscheiden, und es könnten die Integrale ihren Sinn verlieren oder noch andere Glieder in die (2) hineingebracht werden. Aufserhalb des betrachteten Intervalls hingegen dürfen jene Funktionen von ganz beliebiger Beschaffenheit sein, und die folgenden Derivierten höherer Ordnung unterliegen überhaupt gar keiner Beschränkung.

Die vorstehend zur Herleitung der Taylorschen Reihe befolgte Methode besitzt den wesentlichen Vorzug, dafs sie nicht nur alle Fälle zusammenfafst, sondern dafs auch der durch ein bestimmtes Integral ausgedrückte Rest der Reihe stets mit einem beliebigen Grade von Genauigkeit berechnet oder zwischen beliebig enge Grenzen eingeschlossen werden kann, während die Grenzen des Ausdrucks

$$(3) \qquad + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \varepsilon h) \qquad (0 \leqq \varepsilon \leqq 1),$$

den die Differentialrechnung für den Rest ergibt, sich häufig als viel zu weit gesteckt erweisen. Denn wegen der Unbekanntschaft mit dem wahren Werte von ε weifs man nur, dafs $f^{(n)}(x + \varepsilon h)$ einen Wert bezeichnet, den die Funktion $f^{(n)}(x)$ an einer bestimmten, aber unbekannten Stelle des sich von x bis $x + h$ erstreckenden Intervalls annimmt, und der infolge der Stetigkeit und Endlichkeit dieser Funktion notwendig zwischen ihrem Minimum und Maximum innerhalb des angegebenen Intervalls liegen mufs.

Andrerseits kann man durch Anwendung des Mittelwertsatzes auf das Restglied in der (2) sofort zu diesen Grenzen zurückkehren. Zuvörderst ist klar, dafs in dem Integral

$$\int\limits_0^h \alpha^{n-1} \cdot f^{(n)}(x + h - \alpha) \cdot d\alpha,$$

dessen obere Grenze h ebensowohl negativ wie positiv sein darf, der Faktor α^{n-1} in dem ganzen Intervall von 0 bis h immer mit demselben Zeichen behaftet ist, nämlich mit dem Zeichen $+$, wenn h positiv ist; für ein negatives h aber mit dem Zeichen $+$ oder $-$, je nachdem der Exponent n ungerade oder gerade ist. Ferner wird, wenn ε einen positiven echten Bruch bedeutet, jeder Wert, den die Funktion $f^{(n)}(x+h-\alpha)$ von 0 bis h annimmt, offenbar durch den unbestimmten Mittelwert

$$f^{(n)}(x+h-\varepsilon h)=f^{(n)}\big(x+(1-\varepsilon)h\big)$$

oder auch, da $1-\varepsilon$ wieder ein positiver echter Bruch ist, also gleichfalls durch ε bezeichnet werden kann, durch $f^{(n)}(x+\varepsilon h)$ angezeigt. Demnach ist:

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_0^h \alpha^{n-1}f^{(n)}(x+h-\alpha)\,d\alpha$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(x+\varepsilon h)\int_0^h \alpha^{n-1}\,d\alpha=\frac{h^n}{n!}\cdot f^{(n)}(x+\varepsilon h),$$

so dafs man wieder bei dem Restgliede (3) angelangt ist.

18. Diskussion von $\lim\limits_{m=\infty}\left(1+\dfrac{t}{m}\right)^m$. — Wir gehen jetzt an die Untersuchung des Grenzwertes der Potenz

$$(1)\qquad \left(1+\frac{t}{m}\right)^m$$

für ein bis ins Unendliche wachsendes positives m, verallgemeinern aber die Aufgabe noch dahin, dafs wir für t, welches in § 14 nur negativ war, jetzt ebensowohl positive wie negative Werte gelten lassen.

Die Taylorsche Reihe ist auf den reellen Wert des Logarithmus eines wesentlich positiven Arguments x anwendbar, denn der $\log x$ selbst und seine Derivierten sämtlicher Ordnungen: $\frac{1}{x}$, $-\frac{1}{x^2}$, $\frac{2}{x^3}$, $-\frac{3!}{x^4}$, ... sind durchaus einwertig, stetig und endlich, solange x gröfser als Null ist, während diese Funktionen, wenn das Argument durch Null hindurchgeht, sämtlich gleichzeitig unendlich werden.

Bedeutet demnach m eine positive und t eine positive oder negative Zahl, die, falls sie positiv ist, beliebig grofs, wenn aber negativ, numerisch kleiner als m ist, so daſs durchaus $m + t > 0$ ist, so gibt die Taylorsche Reihe, wenn man sie schon bei der zweiten Derivierten abbricht und sich des Restgliedes in der Form (3) des vorigen Paragraphen bedient, für zunächst konstante Werte von m und t:

$$\log(m + t) = \log m + \frac{t}{m} - \frac{1}{2}\frac{t^2}{(m + \varepsilon t)^2},$$

und hieraus:

$$m \log\left(1 + \frac{t}{m}\right) = \log\left(1 + \frac{t}{m}\right)^m = t - \frac{t^2}{2m\left(1 + \frac{\varepsilon t}{m}\right)^2}.$$

Mithin hat man, zu den Zahlen übergehend, die allgemein, d. h. sowohl für beliebige positive als für die zulässigen negativen Werte von t in gleicher Weise gültige Formel:

(2) $$\left(1 + \frac{t}{m}\right)^m = e^t \cdot e^{-\frac{t^2}{2m\left(1 + \frac{\varepsilon t}{m}\right)^2}} \qquad (-m < t \leqq \infty),$$

während man, allein für die letzteren gültig, auch schreiben kann:

(2') $$\left(1 - \frac{t}{m}\right)^m = e^{-t} \cdot e^{-\frac{t^2}{2m\left(1 - \frac{\varepsilon t}{m}\right)^2}} \qquad (0 < t < m).$$

Das Verhältnis

(3) $$\frac{\left(1 + \frac{t}{m}\right)^m}{e^t}$$

ist also der (2) zufolge allgemein durch die Potenz

(3') $$e^{-\frac{t^2}{2m\left(1 + \frac{\varepsilon t}{m}\right)}}$$

ausgedrückt, und wenn auch der Wert dieser Exponentialgröſse wegen des unbestimmten Wertes von ε nicht genau bekannt ist, so ist er gleichwohl durch die Bedingung $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$ in hinreichend enge Grenzen, nämlich

$$e^{-\frac{t^2}{2m}} \quad \text{und} \quad e^{-\frac{t^2}{2m\left(1 + \frac{t}{m}\right)^2}},$$

eingeschlossen, um in Bezug auf ein ohne Ende wachsendes m den Grenzwert der (3) für alle Fälle ermitteln zu können.

Derselbe wird nur dann der Einheit gleich sein, oder man wird nur dann dem $\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{t}{m}\right)^m$ die reine Exponentialgröfse e^t substituieren dürfen, wenn in der (3') der Exponent:

$$(3'') \qquad \frac{t^2}{2m\left(1+\frac{\varepsilon t}{m}\right)^2}$$

gegen Null konvergiert.

Dies ist zunächst immer der Fall, solange t konstant ist. Denn so grofs dann auch t sein mag, schliefslich werden stets in dem Ausdruck (3'') sowohl $\frac{\varepsilon t}{m}$ als das übrigbleibende $\frac{t^2}{2m}$ zu Null. Dieses ist der Fall, welcher gewöhnlich gebraucht wird, und auf ihn gründet Euler in seiner „Introductio" eine Reihe von Entwicklungen.

Nun fragt es sich aber, ob man auch t gleichzeitig mit m kann wachsen lassen, und falls dies gestattet ist, mit welcher Schnelligkeit t wird wachsen dürfen.

Wenn zuvörderst t schneller wächst als m oder auch nur ebenso schnell, so ist gar keine Frage, dafs das Verhältnis (3) statt 1 vielmehr unendlich klein wird. Denn selbst in diesem letzteren Falle, $t = m$, wird der Exponent (3''), der dann in $\frac{m}{2(1+\varepsilon)^2}$ übergeht, im Unendlichen unendlich grofs und die Exponentialgröfse (3') selbst unendlich klein. Dann kann also $\left(1+\frac{t}{m}\right)^m$ nicht durch e^t ersetzt werden.

Es bleibt noch die Möglichkeit, dafs t langsamer zunimmt als m. Hier ist wieder zu unterscheiden, ob t schneller oder langsamer wächst als die Quadratwurzel aus m. Im ersteren Falle würde $\lim\left(1+\frac{t}{m}\right)^m$ gleichfalls nicht gleich e^t sein, denn selbst für den Grenzfall $t = k\sqrt{m}$, wo k eine gewisse Konstante bedeutet, hätte man im Unendlichen $\frac{\varepsilon t}{m} = \frac{\varepsilon k}{\sqrt{m}} = 0$, mithin:

$$\frac{t^2}{2m\left(1+\frac{\varepsilon t}{m}\right)^2} = \frac{k^2}{2}$$

und die Exponentialgröfse selbst gleich $e^{-\frac{k^2}{2}}$, d. i. eine von 1 verschiedene Konstante, so dafs man $\left(1+\frac{t}{m}\right)^m$ nicht *pure* mit e^t vertauschen dürfte.

Wächst hingegen t langsamer als $\sqrt{m}$, etwa wie $\sqrt[3]{m}$, so heifst das, $\frac{t}{\sqrt{m}}$, mithin auch $\frac{t^2}{m}$ nehmen im Unendlichen bis zu Null hin ab. Ganz allgemein kann man dies dadurch ausdrücken, dafs man $t = km^{\frac{1}{2}-\sigma}$, also $\frac{t}{\sqrt{m}} = \frac{k}{m^\sigma}$ setzt, wo σ eine positive Gröfse zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ bedeutet[6]). Da alsdann im Unendlichen

$$\left(1+\frac{\varepsilon t}{m}\right)^2 = \left(1+\frac{\varepsilon k}{m^{\frac{1}{2}+\sigma}}\right)^2$$

in 1 und der Exponent (3″) in $\frac{k^2}{2m^{2\sigma}}$, also in Null übergeht, so konvergiert in diesem Falle das Verhältnis (3) wieder gegen die Einheit.

Gleichzeitig sieht man, dafs es dabei ganz gleichgültig ist, ob t positiv oder negativ ist, oder ob man von $\sqrt{m}$ den positiven oder negativen Wert nimmt, denn $1+\frac{\varepsilon t}{m}$ geht immer in 1 über, und im Zähler des Exponenten kommt nur das Quadrat von t vor.

Die einzige Bedingung, um im Unendlichen $\left(1+\frac{t}{m}\right)^m$ durch e^t auch dann ersetzen zu dürfen, wenn t gleichzeitig mit m unaufhörlich wächst, ist demnach, dafs $\frac{t}{\sqrt{m}}$ bis zu Null abnimmt, oder dafs, wenn n den mit m zugleich wachsenden Grenzwert von t bezeichnet, für den noch $\lim \frac{n}{\sqrt{m}} = \frac{1}{\infty}$ ist, t nur solche Werte haben darf, die zwischen $-n$ und n liegen oder der Bedingung genügen:

$$-n \leqq t \leqq n.$$

19. Verifikation der Gleichung

$$(1) \quad \lim_{m=\infty} \int_0^m t^{b-1}\left(1-\frac{t}{m}\right)^m dt = \int_0^\infty t^{b-1} e^{-t}\, dt = \Gamma(b). \text{ —}$$

Wir zerlegen das auf der linken Seite dieser Gleichung befindliche Integral in die Summe zweier Teilintegrale, deren ersteres sich von 0 bis n, das zweite von n bis m erstreckt, wo n eine zwischen 0 und m gelegene Hülfsgröfse ist, die zwar gleichzeitig mit m wachsen, aber trotzdem der Bedingung:

$$\lim_{m=\infty} \frac{n}{\sqrt{m}} = \frac{1}{\infty}$$

genügen soll. Natürlich wird diese Hülfsgröfse, die nur durch unsere Betrachtung in die Demonstration hineingezogen wird, im Resultat nicht enthalten sein. Wir werden beweisen, dafs unter diesen Voraussetzungen das erste Teilintegral an der Grenze in $\Gamma(b)$ übergeht, das zweite aber zuletzt gleich Null wird.

In dem ersten Teilintegral:

$$(1') \qquad \int_0^n t^{b-1}\left(1-\frac{t}{m}\right)^m dt,$$

wären der Variablen t in der Potenz $\left(1+\frac{t}{m}\right)^m$ nur Werte zu erteilen, die zwischen $-n$ und 0, *a fortiori* zwischen $-n$ und n liegen. Für alle diese Werte ist aber dem Ergebnis des vorigen Paragraphen zufolge der Quotient $\dfrac{\left(1-\frac{t}{m}\right)^m}{e^{-t}}$ im Unendlichen beliebig wenig von 1 verschieden, so dafs man setzen kann:

$$\int_0^n t^{b-1}\left(1-\frac{t}{m}\right)^m dt = \int_0^n t^{b-1}e^{-t}(1+\varrho)\,dt,$$

wo ϱ eine Gröfse bezeichnet, die im ganzen Umfange des Integrals zuletzt überall unendlich klein ist; und da $t^{b-1}e^{-t}$ im ganzen Integrationsbereich positiv ist, so hat man, wenn ϱ_0 einen gewissen, aber unbekannten Mittelwert von ϱ bedeutet, der also im Unendlichen auch unendlich klein sein mufs:

$$\int_0^n t^{b-1}\left(1-\frac{t}{m}\right)^m dt = (1+\varrho_0)\int_0^n t^{b-1}e^{-t}\,dt,$$

und, auf die obigen Grenzbedingungen bezogen:

$$(1'_0) \qquad \lim \int_0^n t^{b-1}\left(1-\frac{t}{m}\right)^m dt = \int_0^\infty t^{b-1}e^{-t}\,dt = \Gamma(b).$$

Das zweite Teilintegral:

$$(1'') \qquad \int_n^m t^{b-1}\left(1-\frac{t}{m}\right)^m dt,$$

läfst die Substitution von e^{-t} nicht mehr zu, weil hier t nicht solche Werte hat, die der Bedingung genügen, numerisch kleiner als n zu sein. Es ist aber klar, dafs der Faktor $\left(1-\frac{t}{m}\right)^m$ um so kleiner wird, je gröfser t ist[7]); das Maximum dieses stets positiven Faktors ist daher sein Anfangswert $\left(1-\frac{n}{m}\right)^m$, im Unendlichen also e^{-n}. Das Maximum des anderen, ebenfalls positiven Faktors t^{b-1} findet an der unteren oder oberen Grenze statt, je nachdem b kleiner oder gröfser als 1 ist, ist also n^{b-1} bezw. m^{b-1}. In diesem letzteren Falle, den es genügt allein ins Auge zu fassen, ist mithin jedenfalls das Integral (1″) kleiner als $(m-n)\cdot m^{b-1}\left(1-\frac{n}{m}\right)^m$, *a fortiori* kleiner als $m^b\left(1-\frac{n}{m}\right)^m$, und im Unendlichen kleiner als $m^b\cdot e^{-n}$. Dieser Grenzwert wird aber zuletzt immer beliebig klein, auch wenn n auf die vorgeschriebene Art langsamer wächst als $\sqrt{m}$, was man etwa dadurch ausdrücken kann, dafs man $m = kn^{2\sigma}$ setzt, wo k und σ konstant und $\sigma > 1$ ist. Denn dann hat man:

$$m^b\cdot e^{-n} = k^b\cdot\frac{n^{2\sigma b}}{e^n},$$

also einen Quotienten, der bekanntlich, so grofs auch der Exponent von n im Zähler sein mag, stets gegen Null konvergiert. Daher mufs das noch kleinere zweite Teilintegral trotz seiner immer gröfser werdenden und zuletzt unendlich grofsen Ausdehnung um so mehr die Null zur Grenze haben.

Somit ist die Gleichung (1) in aller Strenge bewiesen und jede Ungenauigkeit in den Entwicklungen des § 14 beseitigt.

20. Modificierter Beweis derselben Gleichung[8]). — Bedeutend einfacher und übersichtlicher gestaltet sich der Beweis des vorstehenden Satzes, wenn man ihm die specielle Formel (2′) des § 18:

$$(1) \qquad \left(1-\frac{t}{m}\right)^m = e^{-t}\cdot e^{-\frac{t^2}{2m\left(1-\frac{\vartheta t}{m}\right)^2}} \qquad (0<t<m),$$

zu Grunde legt.

Wir teilen wieder das Integral $\int\limits_0^m t^{b-1}\left(1-\frac{t}{m}\right)^m dt$ in die Summe der zwei Teilintegrale, die sich von 0 bis n bezw. von n bis m erstrecken, jedoch mit dem Unterschiede, dafs wir jetzt das zwischen 0 und m gelegene n zunächst ganz unbestimmt lassen.

Für das erste Teilintegral, d. h. für alle Werte von t von 0 bis n ergeben sich aus der (1) leicht zwei Grenzen, zwischen denen $\left(1-\frac{t}{m}\right)^m$ eingeschlossen ist. Denn da in der Exponentialgröfse

$$e^{-\frac{t^2}{2m\left(1-\frac{\varepsilon t}{m}\right)^2}} \qquad (0 < t < m) \tag{2}$$

der Exponent augenscheinlich immer negativ ist, so ist sie selbst stets ein positiver echter Bruch und nur an der unteren Grenze $(t=0)$ gleich 1. Daraus folgt, dafs für alle Werte von t von 0 bis m, *a fortiori* bis n die Potenz $\left(1-\frac{t}{m}\right)^m$ kleiner als e^{-t} ist.

Andrerseits hat die Exponentialgröfse (2) in dem Intervall von 0 bis n ihren kleinsten Wert da, wo der numerische Wert des Exponenten am gröfsten ist, was offenbar stattfindet, wenn sowohl der Zähler t^2 als im Nenner der Subtrahend $\frac{\varepsilon t}{m}$ ihre gröfstmöglichen Werte besitzen oder $t=n$, $\varepsilon=1$ ist. Hieraus ergibt sich als andere Grenze, dafs die Potenz $\left(1-\frac{t}{m}\right)^m$ in dem Intervall von 0 bis n überall gröfser ist als

$$e^{-t}\cdot e^{-\frac{n^2}{2m\left(1-\frac{n}{m}\right)^2}}.$$

Setzen wir also zur Abkürzung:

$$\left(1-\frac{t}{m}\right)^m = e^{-t}\varrho \qquad (0 < t < n),$$

wo demnach ϱ für jeden Wert von t ein anderer, der Bedingung

$$e^{-\frac{n^2}{2m\left(1-\frac{n}{m}\right)^2}} < \varrho < 1 \tag{3}$$

unterliegender positiver echter Bruch sein wird, und wenden dann nach Substitution dieses Ausdrucks auf das erste Teilintegral den Mittelwertsatz an, indem wir zu diesem Zwecke durch ϱ_0 einen gewissen, aber unbekannten Mittelwert von ϱ bezeichnen, so erhält man in Anbetracht, daſs $t^{b-1} e^{-t}$ stets positiv ist:

$$(4') \qquad \int_0^n \varrho\, t^{b-1} e^{-t}\, dt = \varrho_0 \int_0^n t^{b-1} e^{-t}\, dt.$$

Genau ebenso hat man für das zweite, von n bis m reichende Teilintegral, wenn man hier die Exponentialgröſse (2), die noch immer ein positiver echter Bruch ist und mit wachsendem t sogar immer weiter abnimmt, durch σ bezeichnet:

$$(4'') \qquad \int_n^m \sigma\, t^{b-1} e^{-t}\, dt = \sigma_0 \int_n^m t^{b-1} e^{-t}\, dt.$$

Jetzt lasse man das bisher noch nicht determinierte n zugleich mit m unbegrenzt wachsen, aber so, daſs $\frac{n}{\sqrt{m}}$ gleichwohl bis zur Null abnehme. Da alsdann $\frac{n}{m} = \frac{n}{\sqrt{m}\sqrt{m}}$ um so mehr gegen Null konvergiert, also im Unendlichen

$$e^{-\frac{n^2}{2m\left(1-\frac{n}{m}\right)^2}} = e^{-\frac{n^2}{2m}} = e^0 = 1$$

wird, so folgt aus der (3), daſs unter dieser Bedingung alle ϱ, also auch ϱ_0, konstant gleich 1 werden und mithin das erste Teilintegral (4') übergeht in:

$$\lim \int_0^n t^{b-1}\left(1 - \frac{t}{m}\right)^m dt = \int_0^\infty t^{b-1} e^{-t}\, dt = \Gamma(b).$$

Das zweite Teilintegral ist in der (4'') ausgedrückt durch das mit einem positiven echten Bruch σ_0 multiplicierte Integral $\int_n^m t^{b-1} e^{-t}\, dt$, in dem jetzt die untere Grenze n unendlich groſs, die obere Grenze m aber noch beliebig vielmal gröſser wird, und welches einen Teil des Integrals $\int_0^\infty t^{b-1} e^{-t}\, dt = \Gamma(b)$ ausmacht. Da dieses Integral aber trotz seiner unendlichen Ausdehnung einen Sinn hat, so weiſs man („Integrale" 25), daſs jener Restteil schon ohne den Faktor σ_0, um so mehr mit demselben, so klein werden mufs, als man nur immer will. Das zweite Teilintegral konvergiert also gegen Null, und man hat endgültig:

$$\lim_{m=\infty}\int_0^m t^{b-1}\left(1-\frac{t}{m}\right)^m dt = \int_0^\infty t^{b-1}\, e^{-t}\, dt = \Gamma(b).$$

Asymptotischer Wert der einfachen unendlichen Fakultät.

21. Asymptotischer Wert von $\Gamma(a+n)$ für ein unendlich grofses n. — Bisher haben wir nur Fakultätenquotienten in Bezug auf ihren asymptotischen Wert untersucht. Bei weitem schwieriger, aber höchst interessant ist die nunmehr zu erörternde Frage nach dem asymptotischen Wert der einfachen unendlichen Fakultät:

$$a(a+1)\cdots(a+n-1)\cdots.$$

Wir setzen voraus, dafs der Anfang a der Fakultät festliegen soll und positiv sei. Denn wäre er zugleich mit der wachsenden Anzahl der Faktoren beweglich, so hätte man es eigentlich mit dem Quotienten zweier Fakultäten zu thun; und wäre er negativ, so brauchte man nur die negativen Faktoren, deren Anzahl stets eine beschränkte wäre, loszulösen, um eine Fakultät von lauter positiven Faktoren zu haben. Unter dieser Bedingung läfst sich unsere Fakultät durch eine Gammafunktion ausdrücken, indem man aus der bekannten, auch noch für ein unendlich grofses n gültigen Reduktionsformel dieser Funktion („Integrale“ 58) unmittelbar die Relation gewinnt:

$$(1)\qquad a(a+1)\cdots(a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}.$$

Da $\Gamma(a)$ eine gewisse Konstante ist, so kommt nur noch die Funktion $\Gamma(a+n)$ in Frage, und die Untersuchung hat sich lediglich darauf zu richten, was aus einer Gammafunktion wird, wenn ihr Argument unaufhörlich wächst.

Nun ist aber

$$\Gamma(a+n) = \int_0^\infty x^{a+n-1}\, e^{-x}\, dx,$$

und wenn wieder wie in § 14

$$a+n-1 = m$$

gesetzt wird,

$$\Gamma(a+n) = \int_0^\infty x^m e^{-x}\,dx,$$

wo also der Exponent m, der keine ganze Zahl zu sein braucht, bis ins positive Unendliche wachsen soll.

Zunächst kommt es wieder darauf an, die Stelle dieses Integrals ausfindig zu machen, an der sich sein Wert hauptsächlich konzentriert, was natürlich da stattfinden wird, wo die durchaus überall positive Funktion $x^m e^{-x}$ am gröfsten ist. Wir suchen also nach der bekannten Regel das Maximum dieser Funktion. In ihrer ersten Derivierten:

$$\left(\frac{m}{x} - 1\right) x^m e^{-x},$$

entsprechen den Werten Null der beiden Faktoren x^m, e^{-x} die sich von selbst verstehenden und uns hier nicht weiter interessierenden Minima „Null" der Funktion an ihrem Anfang $x = 0$ und ihrem Ende $x = \infty$. Das gesuchte Maximum erhält man, wenn man den dritten Faktor: $\frac{m}{x} - 1$, gleich Null, also $x = m$ setzt. Denn für diesen Wert geht der zweite Differentialquotient in den Ausdruck $-m^{m-1} e^{-m}$ über, ist mithin negativ. Auch mufs ja zwischen den beiden oben angegebenen Minimis der überall positiven Funktion notwendig ein Maximum sich befinden.

Es empfiehlt sich noch, die Stelle des Maximums nach dem Nullpunkt zu verlegen. Das wird offenbar bewirkt durch die Transformation $x = m + t$, welche

$$(2) \qquad \Gamma(a+n) = \int_0^\infty x^m e^{-x}\,dx = e^{-m} m^m \int_{-m}^\infty \left(1 + \frac{t}{m}\right)^m e^{-t}\,dt$$

ergibt. So stellt sich von selbst wieder unterm Integralzeichen die Funktion $\left(1 + \frac{t}{m}\right)^m$ ein, welche bei der vorigen Aufgabe durch e^t ersetzt werden durfte. Wollte man aber hier sofort dieselbe Substitution vornehmen, so bekäme man:

$$\int_{-m}^\infty e^t e^{-t}\,dt = \int_{-m}^\infty dt = \infty,$$

was zwar kein falsches Resultat wäre, uns aber doch keinen Aufschlufs gewährte über die Art des Wachstums unseres Integrals, an deren Kenntnis uns gerade gelegen ist. Wir schliefsen daraus, dafs in dem Integral noch ein wachsender Faktor enthalten sein mufs, den wir erst zu ermitteln und aus ihm herauszusetzen haben, um die Konstante und die einfachere asymptotische Funktion zu erhalten, auf die sich an der Grenze das Integral reducieren wird.

Zu diesem Behufe nehmen wir wieder eine Teilung des Integrals, aber diesmal eine dreifache vor, denn wir werden finden, dafs, während seine untere Grenze numerisch immer mehr wächst, sein ganzer Wert sich um die Null herum konzentriert. Wir setzen also das auf der rechten Seite der (2) befindliche Integral

$$\int_{-m}^{\infty} = \int_{-m}^{-p} + \int_{-p}^{p} + \int_{p}^{\infty},$$

wo die Zwischengrenze p fürs erste zu weiter nichts verpflichtet ist, als positiv zu sein und zwischen 0 und m zu liegen. Wir gebrauchen absichtlich für diese Hülfsgröfse nicht denselben Buchstaben wie für die analoge Gröfse n bei der vorhergehenden Aufgabe, weil es sich herausstellen wird, dafs zur Erreichung unseres Zweckes sich p gerade umgekehrt verhalten mufs wie jenes n: $\frac{n^2}{m}$ mufste abnehmen (19 f.), $\frac{p^2}{m}$ wird wachsen müssen.

Wir betrachten zunächst das mittlere Integral:

$$\int_{-p}^{p} \left(1 + \frac{t}{m}\right)^m e^{-t}\, dt, \tag{3}$$

welches das hauptsächlichste ist, denn, wie schon bemerkt, wird es, wenn man nur seine Grenzen $\pm p$ in der eben angedeuteten Art zugleich mit m wachsen läfst, den ganzen Wert des Integrals

$$\int_{-m}^{\infty} \left(1 + \frac{t}{m}\right)^m e^{-t}\, dt \tag{3_0}$$

in sich enthalten, während gleichzeitig die beiden anderen Teilintegrale trotz ihrer sich weit schneller erweiternden oder von vornherein unendlichen Grenzen nicht blofs im Verhältnis zu jenem, sondern auch an und für sich gegen Null konvergieren werden.

Vermöge der Formel (2) des § 18:

$$(4') \qquad \left(1+\frac{t}{m}\right)^m = e^t \cdot e^{-\frac{t^2}{2m\left(1+\frac{\varepsilon t}{m}\right)^2}} \qquad (-m < t \leqq \infty),$$

die wegen des Umfanges der für t zulässigen Werte *a fortiori* für alle Werte von t zwischen $-p$ und p gültig ist, verwandelt sich das Integral (3) in das Integral:

$$(4) \qquad \int_{-p}^{p} e^{-\frac{t^2}{2m\left(1+\frac{\varepsilon t}{m}\right)^2}} dt.$$

Nun haben wir schon im vorigen Paragraphen gesehen, dafs die Exponentialgröfse

$$(4'') \qquad e^{-\frac{t^2}{2m\left(1+\frac{\varepsilon t}{m}\right)^2}}$$

für $t = 0$ den Wert 1 hat, sonst aber für alle möglichen negativen Werte von t ein mit wachsendem $|t|$ beständig abnehmender positiver echter Bruch ist. Dasselbe gilt in gleicher Weise für alle positiven Werte von t, da auch dann der Exponent

$$\frac{t^2}{2m\left(1+\frac{\varepsilon t}{m}\right)^2} = \frac{1}{2m\left(\frac{1}{t}+\frac{\varepsilon}{m}\right)^2} \text{ [9])}$$

gleichzeitig mit t immer gröfser wird. Daraus folgt, dafs die Exponentialgröfse (4″) für alle Werte $-p < t \leqq 0$ gröfser als

$$e^{-\frac{p^2}{2m\left(1-\frac{p}{m}\right)^2}}$$

und für alle Werte $0 \leqq t < p$ gröfser als

$$e^{-\frac{p^2}{2m\left(1+\frac{p}{m}\right)^2}}$$

ist (vergl. § 20, S. 438). In Anbetracht, dafs die erstere dieser beiden Grenzen die kleinere ist, gilt mithin für alle Werte von t in dem ganzen Intervall von $-p$ bis p die Gröfsenbeziehung:

$$(5') \qquad e^{-\frac{p^2}{2m\left(1-\frac{p}{m}\right)^2}} < e^{-\frac{t^2}{2m\left(1+\frac{\varepsilon t}{m}\right)^2}} \leqq 1 \qquad (-p < t < p).$$

Welchen Wert aber auch t in diesem Intervall haben möge, so ist ferner auch immer:

$$(5'') \qquad e^{-\frac{t^2}{2m\left(1-\frac{p}{m}\right)^2}} < e^{-\frac{t^2}{2m\left(1+\frac{\varepsilon t}{m}\right)^2}} < e^{-\frac{t^2}{2m\left(1+\frac{p}{m}\right)^2}}$$
$$(-p < t < p),$$

weil man hier in den beiden Grenzen den Nennern des Exponenten ihren kleinstmöglichen bezw. gröfstmöglichen Wert beigelegt und dadurch dasselbe auch für die Exponentialgröfsen selbst bewirkt hat.

Während also in dem ganzen Bereich des Integrals (4) die Exponentialgröfse (4″) nirgend aufserhalb der Grenzen (5′) fällt[10]), liegt sie für jeden Wert von t, d. h. liegt jedes Element des Integrals innerhalb der beiden Grenzen (5″):

$$e^{-\frac{t^2}{2m\left(1 \pm \frac{p}{m}\right)^2}},$$

von denen die gröfsere durch das obere Zeichen, die kleinere durch das untere angezeigt wird. Und da alle diese Elemente dasselbe (positive) Zeichen haben, so gelten diese Ungleichheitsbeziehungen auch für das ganze Integral (4) selbst, d. h. dieses Integral liegt zwischen den Integralen der beiden Grenzwerte, die wir in Ansehung des doppelten Zeichens in das eine Integral

$$\int_{-p}^{p} e^{-\frac{t^2}{2m\left(1 \pm \frac{p}{m}\right)^2}} \cdot dt$$

zusammenfassen können.

In diesen beiden Grenzintegralen nehmen wir nun eine Substitution vor, in jedem eine besondere, indem wir

$$\frac{t}{|\sqrt{2m}| \cdot \left(1 \pm \frac{p}{m}\right)} = u,$$

also die absolute Quadratwurzel des Exponenten der neuen Variablen u gleichsetzen, wodurch wir an Stelle der beiden vorhergehenden die neuen Integrale:

$$(5) \qquad |\sqrt{2m}| \cdot \left(1 \pm \frac{p}{m}\right) \int_{-\frac{p}{|\sqrt{2m}| \cdot \left(1 \pm \frac{p}{m}\right)}}^{\frac{p}{|\sqrt{2m}| \cdot \left(1 \pm \frac{p}{m}\right)}} e^{-u^2}\, du$$

gewinnen.

Jetzt lassen wir die Grenzen dieser beiden Integrale durch gleichzeitiges Wachsen von m und p bis ins Unendliche hinausrücken, aber in der Weise, dafs das bisher uneingeschränkte p

zwar langsamer als m, aber schneller als die positive Quadratwurzel aus m zunehmen, also für ein unendlich grofses m

(6′) $\lim \frac{p}{m} = \frac{1}{\infty}$, aber $\lim \frac{p}{\sqrt{m}} \left(\text{also auch } \lim \frac{p^2}{m}\right) = \infty$

sein soll. Dies wird z. B. erreicht, wenn man p proportional $m^{\frac{2}{3}}$, also $p = k m^{\frac{2}{3}}$, $p^2 = \varkappa m^{\frac{4}{3}}$ [11]) annähme, oder wenn man allgemeiner, obschon nicht mit Notwendigkeit,

(6″) $$p = m^{\alpha} \qquad \left(\tfrac{1}{2} < \alpha < 1\right)$$

setzt. Unter diesen Bedingungen gehen beide Integrale (5) in das eine Integral

$$|\sqrt{2m}| \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\, du$$

über. Um so mehr mufs das zwischen ihnen liegende Integral (4) denselben Wert besitzen, und da bekanntlich („Integrale“ 77) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\, du = |\sqrt{\pi}|$ ist, so folgt, auf die (6′) bezogen:

(6) $$\lim \int_{-p}^{p} \left(1 + \frac{t}{m}\right)^m e^{-t}\, dt = |\sqrt{m}| \cdot |\sqrt{2\pi}|,$$

d. h. dieses Integral ist gleich dem Produkt von $|\sqrt{2\pi m}|$ mit einem Faktor, der gegen die Einheit konvergiert, oder nähert sich nach Ablösung des unaufhörlich wachsenden Faktors $\sqrt{m}$ immer mehr der Konstanten $|\sqrt{2\pi}|$.

Es ist aber wohl zu beachten, dafs man zu diesem Resultat nur gelangt, wenn die Bedingungen (6′) erfüllt sind. Liefse man p langsamer wachsen, so würde das ganze Verfahren ergebnislos verlaufen: weder würde das Integral (4) einen bestimmten Wert annehmen, noch würden die beiden äufseren Teilintegrale, auf die sich dann ein Stück des Gesamtwertes werfen würde, gegen Null konvergieren. Dafs dies aber unter der Voraussetzung (6′) eintritt, trotz des unendlich wachsenden Faktors, mit dem auch diese beiden Integrale behaftet sind, haben wir jetzt darzuthun.

Dieser Nachweis ist für das untere Integral:

(7) $$\int_{-m}^{-p} \left(1 + \frac{t}{m}\right)^m \cdot e^{-t}\, dt = \int_{-m}^{-p} e^{-\frac{t^2}{2m\left(1+\frac{\varepsilon t}{m}\right)^2}}\, dt,$$

leichter zu führen, da es keine Grenzen hat, die von vornherein unendlich weit voneinander entfernt sind, wenn sie auch, weil m schneller als p wächst, immer weiter auseinander rücken.

Wir wissen, dafs die unter dem Integralzeichen befindliche, stets positive Exponentialgröfse (4″) um so gröfser wird, je kleiner $|t|$ ist; ihr Maximum erreicht sie also an der oberen Grenze für $t = -p$. Daher wird nach dem Mittelwertsatze das vorstehende Integral kleiner sein als das Produkt dieses Maximalwertes mit der Differenz $m - p$ der Grenzen des Integrals; um so mehr ist

$$(7') \qquad \int_{-m}^{-p} \left(1 + \frac{t}{m}\right)^m e^{-t}\, dt < m \cdot e^{-\frac{p^2}{2m\left(1-\frac{\varepsilon p}{m}\right)^2}}.$$

Für unendlich wachsende m und p nähert sich aber wegen der (6′) der Faktor $\left(1 - \frac{\varepsilon p}{m}\right)^2$ immer mehr der Einheit, so dafs sich dann jene obere Grenze des Integrals mit Zuhülfenahme der (6″) auf

$$m e^{-\frac{p^2}{2m}} = m e^{-\frac{1}{2} m^{2\alpha - 1}} \qquad (1 < 2\alpha < 2)$$

reduciert, wo der Exponent $2\alpha - 1$ jedenfalls eine positive Gröfse ist. Mag dieselbe nun auch noch so klein sein, also der Exponent $\frac{1}{2} m^{2\alpha - 1}$ mit wachsendem m noch so langsam ins Unendliche gelangen, so nimmt die Exponentialgröfse schliefslich doch schneller ab, als irgend eine algebraische Funktion von m, hier m selbst, wächst, und das Produkt beider, *a fortiori* das Integral (7) konvergiert gegen Null.

Auf das noch zu untersuchende obere Teilintegral:

$$\int_{p}^{\infty} \left(1 + \frac{t}{m}\right)^m e^{-t}\, dt,$$

ist dasselbe Raisonnement nicht anwendbar, weil seine Grenzen gleich von vornherein unendlich weit auseinander liegen. Auch nicht einmal die Substitution (4′) ist hier zu gebrauchen, da zwar die Integralfunktion mit wachsendem t bis ins Unendliche abnimmt, dabei aber in eine Exponentialgröfse übergeht, deren Exponent in Bezug auf t vom ersten Grade ist.

Wir unterziehen daher die immer positive Funktion:

$$u = \left(1+\frac{t}{m}\right)^m e^{-t}$$

einer direkten Behandlung. Für ihren Logarithmus hat man:

$$\log u = m \log\left(1+\frac{t}{m}\right) - t; \quad \frac{d \log u}{dt} = \frac{m}{m+t} - 1.$$

Da diese Derivierte in der ganzen Ausdehnung des Integrals um so kleiner ist, je gröſser t ist, also an der unteren Grenze $t = p$ ihren gröſsten Wert $-\frac{p}{m+p}$ besitzt, so gilt für jeden Wert von t zwischen p und ∞ die Ungleichheit:

$$\frac{d \log u}{dt} < -\frac{p}{m+p}.$$

Dieselbe bleibt demnach auch bestehen, wenn man zwischen diesen Grenzen nach t integriert. Setzt man also noch zur Abkürzung den Wert von u für $t = p$:

$$\left(1+\frac{p}{m}\right)^m e^{-p} = e^{-\frac{p^2}{2m\left(1+\frac{\varepsilon p}{m}\right)^2}} = U,$$

welches also eine nach t Konstante ist, so hat man zunächst für das Integral von p bis t:

$$\log \frac{u}{U} < -\frac{p}{m+p}(t-p),$$

mithin in Anbetracht, daſs für die Zahlen die Ungleichheit in demselben Sinne wie für die Logarithmen statthat, auch:

$$\frac{u}{U} < e^{-\frac{p}{m+p}(t-p)},$$

so daſs man auf eine Exponentialgröſse kommt, deren Exponent vom ersten Grade in Bezug auf t ist.

Nochmalige Integration von p bis ∞ führt nun zu unserem Integral und ergibt:

$$\int_p^\infty u\, dt < U \cdot \left[-\frac{m+p}{p} e^{\frac{p^2}{m+p}} e^{-\frac{p}{m+p}t}\right]_p^\infty = U \cdot \frac{m+p}{p}$$

oder vielmehr:

$$\int_p^\infty \left(1+\frac{t}{m}\right)^m e^{-t}\, dt < \left(\frac{m}{p}+1\right) \cdot e^{-\frac{p^2}{2m\left(1+\frac{\varepsilon p}{m}\right)^2}}.$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich nur unwesentlich von dem in der (7') und hat aus denselben Gründen wie jener die Null zur Grenze, zu der er sogar wegen des hier im Koeffizienten hinzutretenden wachsenden Nenners p noch schneller hingelangt [12]).

Das Gesamtergebnis der nunmehr abgeschlossenen Untersuchung ist also, dafs das Integral (3) den ganzen Wert des Integrals (3_0) darstellt, man mithin wegen der (6)

$$\lim_{m=\infty} \int_{-m}^{\infty} \left(1 + \frac{t}{m}\right)^m e^{-t}\, dt = |\sqrt{2 m \pi}|,$$

und unter Berücksichtigung der (2) für eine unendlich grofse positive ganze Zahl n und für

$$a + n - 1 = m$$

die Relation hat:

$$\Gamma(a+n) = |\sqrt{2\pi}| \cdot m^{m+\frac{1}{2}} e^{-m},$$

welche besagt, dafs diese beiden Ausdrücke im Unendlichen das Verhältnis der Gleichheit besitzen, oder dafs

$$\Gamma(a+n) = |\sqrt{2\pi}| \cdot m^{m+\frac{1}{2}} e^{-m} (1 + \sigma)$$

ist, wo σ mit wachsendem m gegen die Null konvergiert.

Es ist zu bemerken, dafs sich dieses σ in eine semikonvergente Reihe („Integrale“ 100) nach negativen Potenzen von m würde entwickeln lassen, was wir aber nicht ausführen wollen.

22. Asymptotischer Wert der einfachen unendlichen Fakultät. — Vermöge des eben gefundenen Resultats liefert die (1) des vorigen Paragraphen für die unendliche einfache Fakultät den Ausdruck:

$$a(a+1)\cdots(a+n-1)\cdots = \frac{|\sqrt{2\pi}|}{\Gamma(a)} \cdot m^{m+\frac{1}{2}} e^{-m} \quad (m = \infty).$$

Führen wir hier vermittelst der Beziehung

$$a + n - 1 = m$$

auch auf der rechten Seite n ein, so können wir den Faktor $m^{m+\frac{1}{2}}$ durch einen einfacheren ersetzen, der im Unendlichen das Verhältnis der Gleichheit zu ihm annimmt. Es ist nämlich:

$$m^{m+\frac{1}{2}} = (a+n-1)^{a+n-\frac{1}{2}} = n^{n+a-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{a-1}{n}\right)^{a-\frac{1}{2}+n}.$$

Da aber für $n = \infty$ die Potenz $\left(1 + \frac{a-1}{n}\right)^{a-\frac{1}{2}}$ wegen ihres konstanten Exponenten in die Einheit übergeht, während

$$\left(1 + \frac{a-1}{n}\right)^n = e^{a-1}$$

wird (18) und sich gegen den in $e^{-m} = e^{1-a} e^{-n}$ enthaltenen Faktor e^{1-a} hebt, so kommt schliefslich:

$$(1) \quad a(a+1) \cdots (a+n-1) = \frac{|\sqrt{2\pi}|}{\Gamma(a)} e^{-n} n^n n^{a-\frac{1}{2}} \quad (n = \infty).$$

Der asymptotische Wert der unendlichen einfachen Fakultät besitzt also, wie man sieht, einen äufserst merkwürdigen Charakter, der sich leicht an der Hand des vorstehenden Ausdrucks näher definieren läfst.

23. Folgerungen. — 1. Für $a = 1$ geht die vorstehende Gleichung in die schon sehr alte Stirlingsche Formel über:

$$(1) \qquad 1 \cdot 2 \cdots n = n! = |\sqrt{2\pi}| \cdot e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}} \qquad (n = \infty),$$

welche uns den asymptotischen Wert der einfachsten Fakultät kennen lehrt. Dieselbe wird viel gebraucht und spielt namentlich in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine wichtige Rolle.

2. Die Division der beiden letzten Gleichungen durcheinander führt zu der mit der (1) des § 15 übereinstimmenden Formel:

$$(2) \qquad \frac{a(a+1) \cdots (a+n-1)}{1 \cdot 2 \quad \cdots\cdots \quad n} = \frac{1}{\Gamma(a)} \cdot n^{a-1} \qquad (n = \infty),$$

und gibt somit eine Kontrolle ab für unsere Diskussion der Fakultät. Andererseits hätte es einer besonderen Ableitung dieser Formel, da sie schon in dem Resultat des vorigen Paragraphen mit enthalten ist, gar nicht bedurft.

3. Stellt man, wie es nach einer Bemerkung in § 15 gestattet ist, die (2) als Definition der $\Gamma(a)$ auf, so können die vorstehenden Resultate auch dazu benutzt werden, um mit der gröfsten Leichtigkeit die oben („Integrale" 64) auf anderem Wege gewonnene, für jede feste ganze Zahl n gültige Produktformel der Gammafunktionen:

$$\frac{\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(na)} = n^{-na+\frac{1}{2}}\cdot(2\pi)^{\frac{n-1}{2}},$$

abzuleiten.

4. Die obigen Formeln enthalten noch eine Fülle anderer specieller Fälle. So werden häufig in der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Binomialkoeffizienten sehr hoher Potenzen in einfacherer Form verlangt. Handelt es sich z. B. um den Koeffizienten des mittleren, $(n+1)^{\text{ten}}$ Gliedes der $(2n)^{\text{ten}}$ Potenz: $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$, so findet man sofort vermittelst der (1) für ein sehr grofses oder geradezu unendlich grofses n seinen asymptotischen Wert gleich

$$\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\cdot 2^{2n},$$

der sich also äufserst einfach gestaltet. Da 2^{2n} bekanntlich die Gesamtsumme der Koeffizienten ist, so sieht man, dafs dieselbe viel schneller zunimmt als der mittlere Koeffizient allein.

Das Verhältnis dieser Gesamtsumme zu dem mittleren Koeffizienten ist danach gleich $\sqrt{\pi n} : 1$.

5. Auch sonst sind die asymptotischen Ausdrücke für unendliche Fakultäten noch vielfältig zu benutzen, wie z. B. bei Untersuchungen über Reihenkonvergenz. Wir beschränken uns aber allein auf die Anwendung, welche man von ihnen bei der Behandlung der hypergeometrischen Reihe machen kann, die zu den interessantesten und in ihren Folgen fruchtbarsten Reihen gehört, zudem auch mit den Eulerschen Integralen in Zusammenhang steht.

IV.

Die hypergeometrische Reihe.

24. Definition und Grundcharakter der Reihe. — Unter einer hypergeometrischen Reihe versteht man eine unendliche Reihe, in der sowohl die Unbekannte als auch die Koeffizienten aus einer von Glied zu Glied wachsenden Anzahl von Faktoren bestehen. Die Anzahl derselben im allgemeinen Gliede wird also vom Index abhängig sein.

Die hinzukommenden Faktoren dürfen nicht gröfser als 1 sein, weil sonst die Reihe offenbar divergierend sein würde.

Man sieht, dafs Fakultäten ganz besonders geeignet sind, die Koeffizienten der Glieder einer solchen Reihe zu konstituieren. Damit aber alsdann die Reihe konvergiere, dürfen diese Koeffizienten nicht reine Fakultäten, sondern müssen Fakultätenquotienten sein. Die Reihe, welche nur einen Fakultätenquotienten zu Koeffizienten hat, schliefsen wir als zu einfach von unserer Betrachtung aus und behandeln daher die hypergeometrische Reihe, in der die Koeffizienten aus dem Produkt zweier Fakultätenquotienten bestehen, die eine Fakultät im Nenner aber von der einfachsten Natur ist. Diese Reihe hat also die Form:

$$(1)\left\{\begin{aligned} & 1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\quad\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots \\ & \cdots+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\cdot\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1\cdot 2\quad\cdots\quad n\quad\cdot\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n+\text{etc.}\end{aligned}\right.$$

und werde nach dem Vorgange von Gaufs durch das Symbol

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

bezeichnet.

Man hat seit Euler sehr viel über diese Reihe gearbeitet, und es kann nicht in unserer Absicht liegen, den Gegenstand im Folgenden zu erschöpfen. Gaufs hat ihm eine Abhandlung speciell

29*

gewidmet, und Euler beschäftigte sich sogar mit der noch allgemeineren Reihe, wo im Nenner statt der einfachsten Fakultät $n!$ die Fakultät $\delta(\delta + 1)\cdots$ steht. Doch ist dieselbe schon zu kompliziert und bietet keine wesentlich vereinfachenden Eigenschaften dar.

Die Reihe (1) ist symmetrisch in Bezug auf α und β, so dafs diese beiden Elemente miteinander permutabel sind.

Wir setzen, obwohl dies kein notwendiges Erfordernis ist, α, β, γ positiv voraus. Aber so viel ist in Bezug auf negative Elemente ohne weiteres klar, dafs, wenn γ eine negative ganze Zahl ist, von einem bestimmten Range an alle Glieder der Reihe unendlich grofs werden, und dafs, wenn α oder β negativ ganz ist, die Reihe irgendwo abbricht, also endlich wird.

Was die Werte von x betrifft, so konvergiert oder divergiert die Reihe, je nachdem x numerisch kleiner oder gröfser als 1 ist. Denn einem bekannten Kriterium zufolge ist eine Reihe divergent oder konvergent, je nachdem für wachsende Werte von n der Grenzwert des Quotienten ihres allgemeinen Gliedes durch das vorangehende Glied numerisch gröfser oder kleiner als 1 ist. Für unsere Reihe ist aber dieser Quotient:

$$\frac{(\alpha + n)(\beta + n)}{(n + 1)(\gamma + n)}|x|,$$

der an der Grenze, wo sein Koeffizient $\frac{\alpha + n}{1 + n} \cdot \frac{\beta + n}{\gamma + n}$ in die Einheit übergeht, gleichzeitig mit $|x|$ gröfser oder kleiner als 1 ist. Wir müssen also $|x| < 1$ voraussetzen.

Die Konvergenz der Reihe für den Wert $x = 1$ ist an gewisse auf die Parameter α, β, γ bezügliche Bedingungen geknüpft, die sich weiter unten ergeben werden.

Die hypergeometrische Reihe schliefst eine Unmasse von speciellen Fällen in sich, die man je durch geeignete Specialisierung der Elemente erhält.

So gibt sie für $\gamma = \beta$ die Entwicklung der Binomialpotenz $(1 - x)^{-\alpha}$; mit Leichtigkeit leitet man aus ihr die Exponentialreihe ab, ebenso die Reihen für $\log(1 + z)$, $\cos x$, $\sin x$, die Entwicklung der trigonometrischen Funktionen eines Vielfachen des Arcus nach steigenden Potenzen derselben Funktionen für den einfachen Arcus. Kurz, alle Reihen, auf die man in der niederen Analysis stöfst, sind sicher in ihr enthalten.

Aufserdem aber führt sie noch auf eine Fülle von Resultaten für transcendente Funktionen und gestattet deren unbehinderte Explikation.

25. Darstellung von $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ durch ein bestimmtes Integral. — Einen der beiden in dem allgemeinen Gliede der Reihe befindlichen Fakultätenquotienten, etwa $\frac{\beta\cdots}{\gamma\cdots}$, können wir vermittelst der Reduktionsformel (4) des § 6:

$$\frac{(b+n, a)}{(b, a)} = \frac{(a, b+n)}{(a, b)} = \frac{b \cdot (b+1) \cdots (b+n-1)}{(a+b)(a+b+1)\cdots(a+b+n-1)},$$

sofort durch ein Eulersches Integral der ersten Gattung ersetzen. Denn nimmt man in dieser Formel

$$a + b = \gamma, \quad b = \beta, \quad \text{also} \quad a = \gamma - \beta,$$

so kommt:

$$\frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} = \frac{(\gamma-\beta, \beta+n)}{(\gamma-\beta, \beta)}$$

$$= \frac{\int\limits_0^1 dt\,(1-t)^{\gamma-\beta-1}\, t^{\beta-1+n}}{(\gamma-\beta, \beta)},$$

so dafs in der That unser Fakultätenquotient durch den Quotienten zweier Integrale oder vielmehr, da der von n unabhängige Nenner $(\gamma - \beta, \beta)$ eine reine Konstante ist, durch ein Integral ausgedrückt ist.

Einen (sich übrigens häufig in ähnlichen Fällen einstellenden) Übelstand bringt freilich obige Substitution mit sich, indem durch sie der Umfang der an sich möglichen Werte der Parameter beschränkt wird. Denn während bisher dieselben nur positiv vorausgesetzt wurden, ohne in Bezug auf ihre gegenseitige Gröfse weiteren Bedingungen zu unterliegen, mufs jetzt, da in den Eulerschen Integralen der ersten Gattung die Elemente notwendig positiv sind, also $a + b$ gröfser als b ist, der Anfangsfaktor der Fakultät im Nenner gröfser angenommen werden als derjenige im Zähler, woraus sich die Bedingung ergibt:

$$\gamma > \beta > 0, \quad \text{also auch} \quad \gamma - \beta > 0,$$

und obwohl das Resultat in keiner Weise davon alteriert wird, sind wir doch gezwungen, diese Beschränkung einzuführen.

Da die Grenzen des oben erhaltenen Integrals konstant sind, mithin auch der übrige Teil des allgemeinen Gliedes von F unter das Integralzeichen gebracht werden darf, so gewinnt man für dieses allgemeine Glied den Ausdruck:

$$\frac{\int\limits_0^1 dt\,(1-t)^{\gamma-\beta-1}\,t^{\beta-1}\cdot\frac{\alpha\cdots(\alpha+n-1)}{1\cdots\quad n}\,(tx)^n}{(\gamma-\beta,\beta)}$$

und mufs nun, um F selbst zu erhalten, n seine successiven Werte 0, 1, 2, ... in inf. beilegen und alles summieren, was natürlich wieder unter dem Integralzeichen geschehen kann. Der allein n enthaltende Faktor:

$$\frac{\alpha\cdots(\alpha+n-1)}{1\cdots\quad n}\,(tx)^n,$$

ist aber das allgemeine Glied der binomischen Reihenentwicklung von $(1-tx)^{-\alpha}$, welche in unserem Falle immer konvergent ist, weil t nur Werte zwischen 0 und 1 annimmt und dasselbe von $|x|$ gilt, also tx stets ein echter Bruch ist. Demnach gelangt man nach vollzogener Summation zu der Formel:

$$(1)\quad F(\alpha,\beta,\gamma,x)=\frac{\int\limits_0^1 dt\cdot t^{\beta-1}\cdot(1-t)^{\gamma-\beta-1}\cdot(1-xt)^{-\alpha}}{(\gamma-\beta,\beta)}$$

$$(0<\beta<\gamma),$$

vermittelst welcher die hypergeometrische Reihe durch ein Integral ausgedrückt wird, welches in Ansehung, dafs sich die Integralfunktion aus drei Faktoren statt aus zwei zusammensetzt, eine dem Eulerschen Integral der ersten Gattung korrespondierende Transcendente höherer Art darstellt.

Durch diese Transformation werden gleich einige der Haupteigenschaften der Funktion F, die sonst nur mühsam und durch ingeniöse Behandlung der Reihe erhalten werden können, klar und wie von selbst vor Augen treten.

26. Die erste Verwandlungsformel. — Transformiert man das in der vorstehenden Gleichung auf der rechten Seite befindliche Integral vermittelst der Substitution $t=1-t'$, deren man sich auch zum Nachweis der Symmetrie von (a, b) bedient („Integrale" 56), so gelangt man auf der Stelle zu einer Relation zwischen zwei hypergeometrischen Reihen, in denen die Elemente zum Teil variiert sind. Denn wenn man dann noch aus der Potenz $(1-x+xt)^{-\alpha}$ den konstanten Faktor $(1-x)^{-\alpha}$ herausnimmt und vor das Integral setzt, so wird jene Formel:

$$
(1)\quad \left\{\begin{aligned}
F(\alpha,\beta,\gamma,x) &= \frac{\int_0^1 dt\cdot t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-xt)^{-\alpha}}{(\gamma-\beta,\beta)}\\
&= \frac{(1-x)^{-\alpha}\int_0^1 dt\cdot(1-t)^{\beta-1}t^{\gamma-\beta-1}\left(1-\frac{x}{x-1}t\right)^{-\alpha}}{(\gamma-\beta,\beta)}\\
&\qquad (0<\beta<\gamma),
\end{aligned}\right.
$$

und da hier die beiden Integrale genau gleich gebaut sind, so liegt die Vermutung nahe, dafs auch die rechte Seite dieser Gleichung, abgesehen von dem Faktor $(1-x)^{-\alpha}$, eine ähnliche hypergeometrische Reihe wie ihre linke Seite repräsentiert. Wir nehmen daher an, dieser Ausdruck stelle die Funktion

$$(2)\qquad F(\alpha',\beta',\gamma',x')$$

dar. Dann müssen, wie sich aus der Vergleichung der beiden Integrale ergibt, den vier Elementen α', β', γ', x' die Werte beigelegt werden:

$$(2')\qquad \alpha'=\alpha,\quad \beta'=\gamma-\beta,\quad \gamma'-\beta'=\beta,\quad \text{also}\ \gamma'=\gamma;$$
$$x'=\frac{x}{x-1}.$$

Und aus diesen Werten folgt nun weiter, dafs, wie $0<\beta<\gamma$, so auch $0<\beta'<\gamma'$ ist, somit die Elemente β' und γ' den an sich zwar unnötigen, aber durch unsere Ableitung gebotenen Bedingungen entsprechen; ferner, dafs der dem neuen F zugehörige Nenner $(\gamma'-\beta',\beta')$ sich in $(\beta,\gamma-\beta)$ verwandelt, mithin in Ansehung der Symmetrie dieser Funktion mit dem thatsächlich auf der rechten Seite der Gleichung befindlichen Nenner $(\gamma-\beta,\beta)$ identisch ist.

Somit ist erwiesen, dafs die rechte Seite der (1) ohne den Faktor $(1-x)^{-\alpha}$ in der That die hypergeometrische Reihe (2) für die Werte (2′) und für alle diejenigen Werte von $x'=\frac{x}{x-1}$ und von x selbst ausdrückt, welche, um auch der ursprünglichen Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ zu genügen, gleichzeitig numerisch kleiner als 1 sind (24).

Um die zur Erfüllung dieser letzteren Bedingung geeigneten Werte von x ausfindig zu machen, beachten wir die Eigenschaft aller aus dem Quotienten zweier linearer Ausdrücke bestehenden Funktionen $\frac{l + mx}{p + qx}$, sich, abgesehen von den Unstetigkeitsstellen, mit stetig von $-\infty$ bis zu ∞ wachsender Variablen beständig in demselben Sinne zu ändern, da ja ihre Derivierte $\frac{mp - lq}{(p + qx)^2}$ stets dasselbe Zeichen beibehält. Um das von einer solchen Funktion durchlaufene Intervall übersehen zu können, bedarf es dann nur der Kenntnis ihrer extremen Werte.

In unserem Falle nimmt der Quotient $\frac{x}{x-1}$, dessen Derivierte $-\frac{1}{(x-1)^2}$ immer negativ ist, mit wachsendem x beständig ab, und zwar zunächst von 1 an für $x = -\infty$, bis zu $-\infty$ an der Unstetigkeitsstelle $x = 1$. Hier springt die Funktion mit weiter zunehmendem x ins positive Unendliche über, um aber so schnell wieder zu fallen, dafs sie für $x = 2$ bereits auf 2 herabgesunken ist und dann noch bis 1 heruntergeht, welchen Wert sie für $x = \infty$ erreicht. Beachtet man noch, dafs sie für $x = -1$ den Wert $\frac{1}{2}$, für $x = \frac{1}{2}$ den Wert -1 besitzt, so ist aus ihrem ganzen Verlaufe ersichtlich, dafs nur in dem Intervall:

$$-1 < x < \frac{1}{2}$$

gleichzeitig x und $\frac{x}{x-1}$ echte Brüche sind, mithin auch auf dieses Intervall die zulässigen Werte von x beschränkt bleiben. Für Werte von x zwischen $\frac{1}{2}$ und 1, für welche $|x'|$ gröfser als 1 ist, würde zwar unsere Entwicklung noch immer fortbestehen, aber die (1) auf ihrer rechten Seite nicht mehr unmittelbar zur Darstellung einer hypergeometrischen Reihe geeignet sein.

Man hat demnach die schon von Euler auf einem anderen, sehr schwierigen Wege gefundene Formel:

$$(3)\qquad F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right)$$
$$\left(0 < \beta < \gamma;\ -1 < x < \tfrac{1}{2}\right),$$

welche die interessante Relation anzeigt, dafs ein beliebiges F gleich ist dem Produkte aus dem reciproken Werte der Potenz $(1-x)^\alpha$ mit einer anderen hypergeometrischen Reihe, in der das erste und dritte Element α und γ unverändert geblieben sind, während an Stelle des zweiten die Differenz $\gamma - \beta$ des ursprünglichen dritten und zweiten Elements und an Stelle von x der Quotient $\frac{x}{x-1}$ getreten ist.

Diese Gleichung, welche auch dazu zu benutzen ist, um langsam konvergierende Reihen durch schneller abnehmende zu ersetzen, läfst sich auch, und zwar unabhängig von den Beschränkungen, die nur durch unsere Betrachtungsweise in sie hineingekommen sind, direkt beweisen. Doch gestaltet sich diese Verifikation, welche eine empfehlenswerte Übung abgibt, nicht ganz einfach und macht langwierige Rechnungen erforderlich. Man hat das allgemeine Glied, ebenso den Faktor $(1-x)^{-\alpha}$ und den Quotienten $\frac{x}{x-1}$ in Reihen aufzulösen, also rechts eigentlich eine dreifache Summation zu vollziehen. Einfacher ist es aber, den Faktor $(1-x)^{-\alpha}$ hinüberzuwerfen, um auf jeder Seite eine doppelte Summe zu haben. Nach Auflösung aller Klammern findet sich, dafs auf beiden Seiten die allgemeinen Glieder identisch werden. Der Beweis entspricht etwa demjenigen der Formel:

$$(1+x)^\alpha (1+x)^\beta = (1+x)^{\alpha+\beta}.$$

27. Die zweite Verwandlungsformel. — Aus der (3) des vorigen Paragraphen:

$$(1)\qquad F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right)$$
$$\left(0 < \beta < \gamma;\ -1 < x < \tfrac{1}{2}\right),$$

kann man eine andere Relation ableiten zwischen zwei hypergeometrischen Reihen mit demselben x, aber verschiedenen Werten für die beiden ersten Elemente. Man wird darauf durch die Erwägung geleitet, dafs sich aus $\frac{x}{x-1} = x'$ für x genau der gleiche

Ausdruck $\frac{x'}{x'-1}$ ergibt, also x dieselbe Funktion von x' ist wie x' von x, oder dafs x und x' sogenannte repetierte Funktionen sind. Daraus folgt dann weiter, dafs man durch diese Substitution, wenn sie zweimal nacheinander vorgenommen, d. h. wenn in $x' = \frac{x}{x-1}$ von neuem x durch $\frac{x}{x-1}$ ersetzt wird, auf x selbst wieder zurückkommt. Bringt man mithin die Relation (1) noch einmal in Anwendung auf das F, welches sich auf ihrer rechten Seite befindet, so mufs in dem neuen resultierenden F das vierte Element einfach wieder x sein. Doch würde diese Transformation an sich nichts nützen, sondern auf das ursprüngliche F zurückführen. Denn der (1) zufolge hätte man:

$$F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right) = \frac{1}{(1-x)^{-\alpha}} \cdot F(\alpha, \beta, \gamma, x),$$

und die Substitution dieses Ausdrucks in die (1) ergäbe die reine Identität:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = F(\alpha, \beta, \gamma, x).$$

Permutiert man aber zuvor die beiden ersten Elemente α und $\gamma-\beta$, in Bezug auf welche ja die hypergeometrische Reihe symmetrisch ist (24), ersetzt also das auf der rechten Seite der (1) befindliche F durch $F\left(\gamma-\beta, \alpha, \gamma, \frac{x}{x-1}\right)$, so verwandelt sich zunächst dieses F durch Anwendung der (1) in:

$$(1-x)^{\gamma-\beta} F(\gamma-\beta, \gamma-\alpha, \gamma, x),$$

und wenn man dann noch, um eine alphabetische Folge der Parameter zu haben, auch hier die beiden ersten Elemente vertauscht, so gewinnt man durch Substitution in die (1) die Relation:

$$(2) \qquad F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x)$$
$$(0 < \beta < \gamma).$$

In dieser zweiten Verwandlungsformel, die Euler auch schon kannte, sind also die beiden ersten Elemente gleichmäfsig variiert, indem sie beide vom dritten abgezogen sind. Was x betrifft, so überzeugt man sich durch direkte Verifikation der Formel, dafs es nicht wie in der (1) der Beschränkung unterworfen ist, zwischen -1 und $\frac{1}{2}$ liegen zu müssen, sondern dafs es nur numerisch kleiner als 1 zu sein braucht.

Diese Verifikation gestaltet sich einfacher als bei der vorigen Aufgabe, weil man hier nur auf einer Seite, die beliebig gewählt werden kann, durch Entwicklung der Potenz von $1 - x$ nach dem binomischen Satz eine doppelte Summe, auf der anderen Seite aber eine einfache Reihe im allgemeinen Gliede hat und sich die Identität beider Ausdrücke leicht nachweisen läfst.

Die hypergeometrische Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$.

28. Darstellung von $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ durch Eulersche Integrale. — Die hypergeometrische Reihe, in der das vierte Element x gleich 1 ist, also die Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$, ist zwar nicht absolut summierbar, so dafs sie durch einen geschlossenen Ausdruck darstellbar wäre, doch läfst sie sich unmittelbar auf die einfacheren Eulerschen Integrale zurückführen.

Abstrahieren wir fürs erste von der Frage nach den Bedingungen für die Konvergenz der Reihe, die für $x = 1$ schwankend und von dem gegenseitigen Verhalten der Argumente α, β, γ zueinander abhängig ist, und die wir im folgenden Paragraphen selbständig behandeln werden, so gibt unter den Beschränkungen:

$$(1') \qquad \beta > 0, \quad \gamma - \beta > 0$$

die (1) des § 25 sofort:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\int\limits_0^1 dt\, t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-\beta-1}}{(\gamma - \beta, \beta)},$$

d. i., wenn die neue Beschränkung:

$$(1'') \qquad \gamma - \alpha - \beta > 0$$

hinzutritt, also wenn α entweder beliebig negativ, oder, falls positiv, kleiner als $\gamma - \beta$ ist, nichts anderes als:

$$(1) \qquad F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{(\beta, \gamma - \alpha - \beta)}{(\beta, \gamma - \beta)}.$$

Vermittelst dieser Gleichung wird unser F durch den Quotienten zweier Eulerschen Integrale der ersten Gattung dargestellt. Der Konvergenz von F drückt sie aber infolge ihrer Herleitungsweise eine nicht in der Sache selbst begründete Beschränkung auf. Denn wenn wir gemäfs früheren Untersuchungen die auf der rechten Seite der (1) befindlichen Integrale in unendliche Produkte umsetzen, so findet man bei näherer Prüfung, dafs ihr

Quotient thatsächlich die hypergeometrische Reihe links ausdrückt, falls diese konvergiert, sonst aber natürlich nicht, denn der Quotient der beiden Eulerschen Integrale ist ja unter den Bedingungen (1') und (1'') immer endlich. Nicht aber folgt daraus, dafs auch zur Konvergenz von F diese sämtlichen Bedingungen erforderlich sind, sondern dazu ist, wie wir sehen werden, die Bedingung (1'') allein notwendig und ausreichend. Und dafs unsere Behandlungsweise, welche zu den (1') und (1'') geführt hat, die Frage nach der Konvergenz der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ nicht zu erschöpfen vermag, ist auch schon daraus ersichtlich, dafs diese Reihe symmetrisch ist nach α und β, was zwar auch mit der Bedingung (1''), keineswegs aber mit den Bedingungen (1') der Fall ist.

29. Die Konvergenzbedingungen für die Reihe

(1) $$F(\alpha, \beta, \gamma, 1). \text{ —}$$

Wir nehmen an, dafs alle drei Elemente α, β, γ sowohl positive als negative Werte haben dürfen, mit Ausschlufs jedoch der negativen ganzen Zahlen, weil in diesem Falle entweder gar nicht von einer solchen Reihe die Rede sein könnte, oder man es mit einer endlichen Reihe zu thun hätte, in der im allgemeinen nichts unendlich wird (24).

Das allgemeine Glied der (1) ist:

(2) $$\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\cdot\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n\cdot\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}.$$

Es ist nun einleuchtend, dafs zuletzt von einem bestimmten Werte von n an, mag derselbe auch noch so entfernt liegen, alle folgenden Glieder mit demselben Zeichen behaftet, also sämtlich entweder positiv oder negativ sein müssen; und zwar tritt dies ein, sobald aufser $n+1$ zum erstenmal auch die drei Faktoren $\alpha+n$, $\beta+n$, $\gamma+n$ sämtlich positiv und daher ferner nicht im stande sind, eine Änderung des Zeichens herbeizuführen, mit welchem das unmittelbar vorangehende Glied behaftet ist.

Durch diese Eigenschaft der Reihe wird die Entscheidung über ihre Konvergenz wesentlich erleichtert, da diese nun lediglich von der Art der Abnahme der Glieder im Unendlichen bedingt ist und es einer Untersuchung über den etwaigen Einflufs des Zeichenwechsels darauf nicht bedarf. Während aber diese Frage bei Gaufs noch eine ausführliche Diskussion erheischt, können wir sie ganz einfach entscheiden mit Hilfe der früher entwickelten asymptotischen Ausdrücke für unendliche Fakultäten und Fakultätenquotienten, welche uns einen Einblick in die Natur der im Unendlichen gelegenen Glieder der Reihe gestatten.

Wir gehen aus von der in § 15 (s. a. 23, 2) hergeleiteten Formel:

$$\Gamma(\alpha) = \frac{1 \cdot 2 \quad \cdots \quad n}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)} \cdot n^{\alpha-1} \qquad (n = \infty),$$

die als allgemeine Definition der Gammafunktionen angesehen werden kann und für beliebige nicht blofs positive, sondern auch negative Werte des Arguments α gültig ist, mit Ausnahme der negativen ganzen Zahlen, da für diese $\Gamma(\alpha)$ unendlich ist („Integrale" 62). Setzen wir der Kürze halber die unendliche einfachste Fakultät

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = N \qquad (n = \infty),$$

so führt die vorstehende Formel zu der Relation:

$$\text{(3)} \qquad \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1) = \frac{N}{\Gamma(\alpha)} \cdot n^{\alpha-1} \qquad (n = \infty),$$

welche zeigt, dafs jede unendliche Fakultät darstellbar ist durch eine endliche Potenz des unendlich grofsen n, multipliciert mit N und einem endlichen, ganz bestimmten Faktor $\frac{1}{\Gamma(\alpha)}$. Natürlich ist in Anbetracht, dafs $\Gamma(1)$ und n^0 gleich 1 sind, in dieser Gleichung für $\alpha = 1$ auch identisch der Fall $1 \cdot 2 \cdots n = N$ selbst enthalten.

Führt man nun in das allgemeine Glied (2) für alle vier Fakultäten die entsprechenden Ausdrücke (3) ein, so geht dasselbe, indem sich alle N fortheben, sofort in den Ausdruck über:

$$\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \cdot \frac{1}{n^{\gamma-\alpha-\beta+1}} \qquad (n = \infty).$$

Ein unendlich entferntes Glied der Reihe (1) ist mithin gleich einer aus dem immer endlichen Quotienten mehrerer Gamma bestehenden Konstanten, dividiert durch eine gewisse Potenz $1 + \gamma - \alpha - \beta$ von n, also von der Form:

$$A \cdot \frac{1}{n^\delta},$$

wo A und δ konstant sind und n den Rang des Gliedes anzeigt. Nach einem bekannten Kriterium konvergiert aber eine unendliche Reihe, deren im Unendlichen gelegenen Glieder von dieser

Beschaffenheit sind, nur, wenn $\delta > 1$ ist, während sie stets divergiert, wenn $\delta \leqq 1$ ist.

Demnach ist, wie wir es schon im vorigen Paragraphen ausgesprochen haben, die notwendige und ausreichende Bedingung zur Konvergenz der Reihe (1), dafs

$$\gamma - \alpha - \beta > 0$$

sei, ohne dafs die Elemente α, β, γ in Bezug auf ihre absolute Gröfse noch anderen Beschränkungen unterlägen.

Daher findet auch die Formel (1) des vorigen Paragraphen immer statt, sobald zu der vorstehenden Bedingung noch die andere Bedingung hinzutritt, dafs $\beta > 0$ und auch $\gamma - \beta > 0$ ist.

V.

Fundamentaleigenschaften komplex imaginärer Funktionen.

30. Definition und Grundcharakter der imaginären Funktionen. — Im gegenwärtigen Abschnitt werde jede komplex imaginäre Gröfse durch einen Buchstaben, z. B. x, und falls sie, wie es am zweckdienlichsten ist, in die reducierte Form gegossen wird, ihr analytischer Modul durch den entsprechenden grofsen Buchstaben (X) und ihr Argument durch den entsprechenden kleinen griechischen Buchstaben (ξ) bezeichnet. Sind also t, u die beiden reellen Bestandteile der komplexen Gröfse, so setzen wir (vergl. „Integrale“ 66, S. 133):

$$t + ui = x = Xe^{\xi i} = X(\cos\xi + i\sin\xi),$$

wobei zur Bestimmung von X und ξ aus t und u die Gleichungen dienen:

$$X = |\sqrt{t^2 + u^2}|; \quad \cos\xi = \frac{t}{|\sqrt{t^2 + u^2}|}, \quad \sin\xi = \frac{u}{|\sqrt{t^2 + u^2}|}.$$

In derselben Weise hat man die Formel

$$r = Re^{\varrho i}$$

zu interpretieren.

Fragt man sich, was ganz allgemein unter einer Funktion einer komplexen Gröfse, wie z. B.

$$\varphi(t + ui) = \varphi(x),$$

eigentlich zu verstehen sei, so findet man, wenn man der Sache auf die Spur geht, dafs ihre Bedeutung nicht etwa in dem Umstande zu suchen ist, dafs sie die Summe einer bestimmten Funktion des reellen Arguments t und einer anderen bestimmten Funktion des Arguments u darstellt. Das gemeinsame Merkmal, das Wesen aller Funktionen eines imaginären Argumentes x

dokumentiert sich vielmehr darin, innerhalb eines gegebenen Raumes, d. i. bestimmten Intervalles für t und u, an jeder Stelle einen völlig bestimmten, von dem Verhältnis der Inkremente von t und u unabhängigen Differentialquotienten zu besitzen. Bezeichnet man also den diesen Inkrementen Δt, Δu und dem entsprechenden $\Delta X = \Delta |\sqrt{t^2 + u^2}|$ zugehörigen Zuwachs von x durch Δx, so mufs, wie auch Δt und Δu gegeneinander abnehmen mögen, der Differentialquotient

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \frac{d\varphi(x)}{dx} = \varphi'(x) = \varphi'(t + ui)$$

an jeder Stelle innerhalb des gegebenen Raumes einen und **nur** einen ganz bestimmten, festen Wert repräsentieren.

Dieses ist die wahre Definition der imaginären Funktion $\varphi(x)$. Mit anderen Worten, in der Differentialrechnung ist, was auch gar nicht schwer fällt, nachzuweisen, dafs das Differentiieren auch für imaginäre Funktionen gilt, wo aber dann obige Eigenschaft nicht als Definition, sondern als Fundamentalsatz auftritt.

Auf die vorstehende Definition gründen sich die wesentlichen Eigenschaften der imaginären Funktionen, die nunmehr von selbst aus den korrespondierenden Sätzen für reelle Funktionen fliefsen. So können die Regeln der Derivation einer algebraischen Summe, eines Produktes, eines Quotienten, der mittelbaren Differentiation u. s. w. ohne weiteres auf imaginäre Funktionen erstreckt werden.

Insbesondere gibt der letztere Satz, wenn man beachtet, dafs $x = t + ui$ ist:

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial t} = \varphi'(x) \cdot \frac{\partial x}{\partial t} = \varphi'(x)$$

und

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial u} = \varphi'(x) \cdot \frac{\partial x}{\partial u} = \varphi'(x) \cdot i,$$

woraus folgt:

$$\varphi'(x) = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi(x)}{\partial u} \cdot i. \tag{1}$$

Diese mithin **allen** imaginären Funktionen gemeinsame **Bedingungsgleichung** impliciert zwei andere Bedingungen, welche man erhält, wenn man den reellen und imaginären Teil der gegebenen Funktion trennt, also z. B.

$$\varphi(x) = \varphi(t + ui) = T + Ui$$

setzt. Denn alsdann verwandelt sich die (1) in:

$$\varphi'(x) = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial t} i = \frac{\partial U}{\partial u} - \frac{\partial T}{\partial u} i,$$

was gleichbedeutend ist mit

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial u}, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial T}{\partial u},$$

zwei Forderungen, die demnach ebenfalls von jeder imaginären Funktion, als unmittelbar aus ihrer Definition folgend, erfüllt sein müssen. Ist z. B.

$$\varphi(x) = (t + ui)^2 = t^2 - u^2 + 2tui,$$

so hat man:

$$\varphi'(x) = 2t + 2ui,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 2t, \quad \frac{\partial U}{\partial u} = 2t; \quad \frac{\partial U}{\partial t} = 2u, \quad \frac{\partial T}{\partial u} = -2u.$$

Nur solche Funktionen betrachten wir, die obigen Bedingungen Genüge leisten. Das trifft z. B. zu für alle Funktionen, in welche das Imaginäre durch blofse Vertauschung eines reellen mit einem komplexen Argument hineingekommen ist („Integrale" **65** ff.).

31. Das Integral $\int_0^{2\pi} \varphi(Re^{\varrho i})\,d\varrho$. — Es sei die Funktion

$$\varphi(r) = \varphi(Re^{\varrho i})$$

für alle Werte des imaginären Arguments r, für welche der Modul R eine beliebig gegebene positive konstante Gröfse M nicht übersteigt, solange also $(0 \leqq)\ R \leqq M$ ist, d. h. überall innerhalb eines gewissen Kreises $M^2\pi$ durchaus stetig, endlich und einwertig. Infolge der letzteren Bedingung mufs die Funktion $\varphi(r)$ so beschaffen sein, dafs sie ungeändert bleibt, wenn man nach Drehung des Winkels ϱ um eine oder um mehrere Peripherien wieder zu der ursprünglichen Stelle zurückkehrt: eine Eigenschaft, die z. B., wie oben („Integrale" **66**, S. 138 f.) bewiesen, der Funktion $r^{\frac{m}{n}}$ nicht zukommt.

Es handelt sich um die Auswertung des im gewöhnlichen Sinne zu verstehenden Integrals:

$$(1) \qquad v = \int_0^{2\pi} \varphi(Re^{\varrho i})\,d\varrho,$$

in dem aber R als ein von der Integrationsvariablen ϱ unabhängiger Parameter angesehen werden soll. Dazu ist erforderlich, daſs man in dem ganzen Umfange des Integrals nur solche Wertsysteme für die reellen Elemente der Variablen r in Anwendung bringt, die dieselbe Konstante R oder, geometrisch aufgefaſst, die stetig aufeinander folgenden Punkte der Peripherie des Kreises $R^2\pi$ ergeben, so daſs diese Peripherie den Weg bezeichnet, den die reellen Variablen zurückzulegen haben, während ϱ von dem Werte 0 zu dem Werte 2π übergeht.

Unter diesen Voraussetzungen kann die Derivierte von v nach R, die wir zur Ermittelung des Integrals (1) zu bilden haben, durch Differentiation unter dem Integralzeichen erhalten werden. Das gibt:

$$\frac{\partial v}{\partial R} = \int_0^{2\pi} \varphi'(Re^{\varrho i}) \cdot e^{\varrho i} \cdot d\varrho = \frac{1}{Ri}\Big[\varphi(Re^{\varrho i})\Big]_0^{2\pi},$$

mithin in Anbetracht, daſs nach der Voraussetzung die Funktion $\varphi(r)$ für $\varrho = 2\pi$ denselben Wert $\varphi(R)$ besitzt wie für $\varrho = 0$, und R eine endliche, feste Konstante ist:

$$\frac{\partial v}{\partial R} = \frac{0}{Ri} = 0.$$

Hieraus folgt, daſs v selbst konstant nach R sein muſs. Mit anderen Worten, unser Integral (1) ist — aber nur unter sämtlichen obigen Bedingungen der Stetigkeit und Einwertigkeit — auf der Peripherie eines jeden mit dem Grenzkreise $M^2\pi$ konzentrischen inneren Kreises ein und dieselbe vom Radius unabhängige Konstante. Also auch für den Wert $R = 0$ bleibt sie unverändert. Dann geht aber $\varphi(Re^{\varrho i})$ in den reinen Zahlenwert $\varphi(0)$, mithin das Integral (1) in $\int_0^{2\pi} \varphi(0)d\varrho = 2\pi \cdot \varphi(0)$ über. Daher hat man auch ganz allgemein:

$$v = \int_0^{2\pi} \varphi(Re^{\varrho i})\,d\varrho = 2\pi \cdot \varphi(0). \qquad (0 \leqq R \leqq M). \tag{2}$$

32. Reihenentwicklung der imaginären Funktionen. — „Ist die Funktion

$$f(x) = f(Xe^{\xi i})$$

des imaginären Argumentes

$$x = t + ui$$

für alle Werte der reellen Elemente t, u, für welche der Modul X eine beliebig gegebene positive konstante Grenze M nicht übersteigt, solange also

$$0 \leqq X \leqq M$$

ist, d. h. überall innerhalb des Kreises $M^2\pi$ durchaus stetig, endlich und an jeder Stelle einwertig, so ist sie für dieses ganze Intervall stets in eine nach steigenden Potenzen von x geordnete konvergierende unendliche Reihe:

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \text{etc.} = \sum_0^\infty A_n x^n,$$

entwickelbar, in der die Koeffizienten A_n nach x konstant sind, aber auch imaginäre Werte besitzen können."

Der Beweis dieses wichtigen, schon früher („Integrale" 68) benutzten Satzes wird sich jetzt ohne alle Mühe aus der im vorigen Paragraphen entwickelten Eigenschaft unserer imaginären Funktionen ergeben.

Man bilde den Ausdruck:

$$\frac{f(r) - f(x)}{r - x} \cdot r, \tag{1}$$

in dem r als veränderlich, x als konstant angesehen werde, beide aber nur solche Werte sollen annehmen dürfen, für welche die zugehörigen R, $X \leqq M$ sind. Alsdann ist dieser Ausdruck eine Funktion der Variablen r, welche innerhalb der gesetzten Schranken gleichzeitig mit $f(x)$ sämtliche Bedingungen erfüllt, die wir oben für $f(x)$ detailliert haben, wie ohne weiteres daraus folgt, dafs dies eben von allen ihren Bestandteilen gilt.

Nur in dem Ausnahmefall, wo die Variable r gleich x wird, also der Quotient $\frac{f(r) - f(x)}{r - x}$ — denn sein Faktor r kommt dabei nicht in Betracht — unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ erscheint, könnten sich noch über die Beschaffenheit der Funktion Zweifel erheben. Der gemäfs den Prinzipien des § 30 durch das gewöhnliche Verfahren auszumittelnde wahre Wert dieses Bruches ist aber, da x, $f(x)$ nach r konstant sind, gleich $f'(x)$. Um also diesen speciellen Fall nicht ausschliefsen zu müssen, ist es notwendig, dafs auch die erste Derivierte $f'(x)$ denselben bestimmten Charakter an sich trage, den wir der Funktion $f(x)$ selbst vindiciert haben.

Sonach dürfen wir auf den Ausdruck (1) den Satz des vorigen Paragraphen in Anwendung bringen, d. h. in der Gleichung (2) daselbst $\varphi(r)$ durch unsere Funktion (1) ersetzen. Man erhält dann auf der Stelle:

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(r) - f(x)}{r - x} \cdot r \cdot d\varrho = - \frac{f(0) - f(x)}{x} \cdot 0 \cdot 2\pi = 0,$$

woraus, anders geschrieben, die Relation fliefst:

$$(2) \qquad \int_0^{2\pi} \frac{f(r)}{r - x} \cdot r \cdot d\varrho = f(x) \int_0^{2\pi} \frac{r}{r - x}\, d\varrho.$$

Die Formel gilt für alle Werte von r, für welche Modul $R \leqq M$, und für einen jeden (währenddessen als konstant anzusehenden) Wert von x, für den ebenfalls Modul $X \leqq M$ ist.

Nun nehmen wir aber an, es sei:

$$(M \geqq)\ R > X, \text{ also } \frac{X}{R} < 1.$$

Dann ist, wie bei rein reellen Gröfsen,

$$\frac{r}{r - x} = \frac{1}{1 - \frac{x}{r}}$$

in konvergierende geometrische Reihen entwickelbar. Denn da

$$\frac{1}{1 - \frac{X}{R}} = \sum_0^\infty \frac{X^n}{R^n},$$

und der Modul des Quotienten $\frac{x}{r}$ gleich dem Quotienten der Moduln X, R [13]), mithin

$$\left(\frac{x}{r}\right)^n = \frac{X^n}{R^n} e^{n(\xi - \varrho) i} = \frac{X^n}{R^n} \left(\cos n (\xi - \varrho) + i \sin n (\xi - \varrho)\right),$$

also gleich der Summe zweier Glieder ist, deren jedes $< \frac{X^n}{R^n}$, so hat man auch:

$$\frac{r}{r - x} = \sum_0^\infty \frac{x^n}{r^n} = \sum_0^\infty \frac{X^n}{R^n} e^{n(\xi - \varrho) i}$$

$$= 1 + \frac{X}{R} e^{(\xi - \varrho) i} + \frac{X^2}{R^2} e^{2(\xi - \varrho) i} + \text{etc.},$$

gleich der Summe von zwei konvergierenden unendlichen Reihen, deren eine mit dem Faktor i behaftet ist.

Hiernach wird die (2), wenn man die Reihenentwicklung zunächst nur auf der rechten Seite vollzieht:

$$(2') \qquad \int_0^{2\pi} f(r) \cdot \frac{r}{r-x}\, d\varrho = f(x) \sum_0^{\infty} x^n \int_0^{2\pi} r^{-n}\, d\varrho.$$

Für alle Glieder auf der rechten Seite dieser Gleichung, mit Ausnahme des ersten ($n = 0$), ist aber:

$$\int_0^{2\pi} r^{-n}\, d\varrho = R^{-n} \int_0^{2\pi} e^{-\varrho n i}\, d\varrho = -\frac{R^{-n}}{n i} \left[e^{-\varrho n i}\right]_0^{2\pi} = 0 \quad (n > 0),$$

so dafs diese Glieder sämtlich fortfallen und allein das erste Glied verbleibt:

$$\int_0^{2\pi} r^{-n}\, d\varrho = \int_0^{2\pi} d\varrho = 2\pi \qquad (n = 0).$$

Infolge dieses Ergebnisses lautet jetzt die (2'):

$$\int_0^{2\pi} f(r) \cdot \frac{r}{r-x}\, d\varrho = f(x) \cdot 2\pi$$

und führt, wenn nun auch links $\frac{r}{r-x}$ durch die konvergierende Reihe $\sum_0^{\infty} \frac{x^n}{r^n}$ ersetzt wird, zu der Formel:

$$(3) \quad \begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\sum_0^{\infty} x^n \int_0^{2\pi} f(r) \cdot r^{-n}\, d\varrho \\[2ex] \quad = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\sum_0^{\infty} \left(\frac{x}{R}\right)^n \int_0^{2\pi} f(R\, e^{\varrho i})\, e^{-\varrho n i}\, d\varrho \qquad (M \geqq R > X > 0), \end{cases}$$

durch welche die Entwicklung der Funktion $f(x)$ in eine nach steigenden Potenzen von x geordnete unendliche Reihe zu stande kommt und zugleich ihre Koeffizienten erhalten werden.

Danach ist:

$$f(x) = \sum_0^{\infty} A_n x^n = A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n + \text{etc.}$$

und, für beliebige zwischen X und M gelegene, konstante Werte von R:

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{R^n} \int_0^{2\pi} f(Re^{\varrho i}) \cdot e^{-\varrho n i}\, d\varrho$$

$$(n = 0, 1, 2, \cdots, \infty).$$

Um sich von der Konvergenz dieser Reihe zu überzeugen, braucht man nur die (3) durch Substitution des Wertes von x auf die Form zu bringen:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_0^\infty \int_0^{2\pi} \left(\frac{X}{R}\right)^n \cdot e^{n i(\xi - \varrho)} \cdot f(Re^{\varrho i}) \cdot d\varrho,$$

aus der erhellt, dafs wegen der Exponentialgröfse das allgemeine Glied in zwei Bestandteile mit dem Faktor cosinus bezw. sinus zerfällt, so dafs für einen jeden derselben das Integral

$$\int_0^{2\pi} f(Re^{\varrho i}) \cdot e^{n i(\xi - \varrho)}\, d\varrho < \int_0^{2\pi} f(Re^{\varrho i})\, d\varrho,$$

d. i. nach § 31 kleiner als $2\pi \cdot f(0)$ ist. Die Reihe würde also, selbst wenn diese Konstante gemeinschaftlicher Faktor aller ihrer Glieder wäre, dadurch nur mit einer endlichen Gröfse vervielfacht. Nun kommt aber aufserdem noch in jedem Gliede eine immer höhere Potenz des echten Bruches $\frac{X}{R}$ als Faktor hinzu: so wird die Reihe nirgend unendlich und konvergiert sehr schnell.

Damit ist unser Satz bewiesen und die Aufgabe gelöst. Es ist aber wohl im Auge zu behalten, dafs dies Theorem erfordert, immer zu untersuchen, ob die vorliegende Funktion (auch wenn das Imaginäre durch Vertauschung eines reellen mit einem komplexen Parameter in sie hineingekommen sein sollte), alle unerläfslichen Bedingungen der Stetigkeit und Einwertigkeit auch wirklich erfüllt.

Der umgekehrte Satz lautet: „Findet die Gleichung statt:

$$f(\xi + \eta i) = A_0 + A_1(\xi + \eta i) + A_2(\xi + \eta i)^2 + \text{etc.}$$

$$(\xi^2 + \eta^2 \leqq M^2),$$

so ist in dem ganzen durch die Ungleichheitsbedingung festgelegten Umfange die Funktion $f(\xi + \eta i)$ des imaginären Argumentes $\xi + \eta i$ durchaus stetig, endlich und eindeutig, und besitzt mithin an jeder Stelle, d. i. für jedes dahinein gehörige System von ξ und η einen einzigen, ganz bestimmten Wert.“

Eines Beweises bedarf dieser Satz nicht, da er ganz von selbst daraus folgt, daſs ja nach der Voraussetzung die Reihe konvergieren soll, und daſs jede Potenz $(\xi + \eta i)^k$, in der k positiv ganz ist, als direkte Funktion sämtlichen Forderungen der Stetigkeit und Einwertigkeit Genüge leistet („Integrale“ 66, S. 131).

Anmerkungen zu den „Anwendungen".

Die Hinweise auf das „Heft" beziehen sich auf des Herausgebers ursprüngliche, dem Buche zu Grunde liegende Ausarbeitung der Dirichletschen Vorlesung.

---

[1]) § 6, S. 411. Hier folgte in der Vorlesung der Satz von der Symmetrie von (a, b) aus „Integrale" **56**. Vergl. daselbst Anm. 23, S. 387.

[2]) Ebenda, S. 412. Zwischen diesem und dem folgenden Paragraphen wurde noch, wie auch „Integrale" § 59, 1, die Eigenschaft besonders hervorgehoben, dafs (a, b) durchaus positiv ist, weil alle seine Differentialelemente es sind.

[3]) § 10, S. 414. In der Vorlesung wurde vor dem Integral $(a + n, 1)$ auch noch das Integral $(1 + n, 1)$ betrachtet, um zunächst zu zeigen, dafs (a, b) für wachsende ganze Zahlenwerte von a und b immer mehr abnimmt. Und zwar folgt dies nicht nur direkt aus $(1 + n, 1) = \frac{1}{n+1}$, was für $\lim n = \infty$ unendlich klein ist, sondern auch aus der speciellen Reduktionsformel:

$$(1, 1) = 1 = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n+1}{n} (1 + n, 1) = (n + 1) \cdot (1 + n, 1),$$

die zur Erhaltung der Identität erfordert, dafs für $\lim n = \infty$ der Schlufsfaktor gegen Null konvergiert. — Indessen erscheint dieser Teil des Beweises überflüssig.

[4]) § 12, S. 422. Aus den beiden in unserer Vorlesung zur Herleitung dieser Formel in Anwendung gebrachten Methoden („Integrale" § 38, 3 und „Anwendungen" § 12) folgt direkt nur ihre Gültigkeit für $0 < a < 1$ oder $0 < \varphi < \pi$. Der Nachweis, dafs die Formel auch für $a > 1$, mithin für jeden beliebigen Wert des Winkels φ gültig ist, fehlt zwar im Heft, wird sich aber auch, nach Berichtigung eines Versehens auf S. 70, als nicht erforderlich herausstellen. Daselbst ist nämlich irrtümlich auf unseren § 12 hingewiesen worden, während (nach den Angaben des „Heftes") Dirichlet vielmehr Bezug nahm auf seine Vorlesungen über die partiellen Differentialgleichungen, in denen er bekanntlich das Problem ebenfalls behandelte, die Formel für $\sin \varphi$ aber gleich von vornherein für ganz beliebige Werte von φ ableitete. (Man vergleiche Riemann-Hattendorff, Partielle Differentialgleichungen, § 31; Meyer, Bestimmte Integrale, § 83, 5.)

Es möge daher, an der Hand der vom Herausgeber gefertigten Ausarbeitung der betreffenden Vorlesung aus dem Wintersemester 1853/54, nachträglich hier eine kurze Darstellung der daselbst — im Kapitel von den trigonometrischen Reihen — zur Herleitung der Produktformel befolgten

Methode Platz finden, was um so wünschenswerter erscheint, als oben auf S. 70 die erheblichen Mängel des dort mehr angedeuteten als durchgeführten Verfahrens etwas euphemistisch nur als „Ungenauigkeiten“ bezeichnet werden

Nimmt man in der speciellen cosinus-Reihe:

$$\cos\alpha x = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\Big(\frac{1}{\alpha} - \frac{2\alpha}{\alpha^2-1^2}\cos x + \frac{2\alpha}{\alpha^2-2^2}\cos 2x - \frac{2\alpha}{\alpha^2-3^2}\cos 3x + - \text{ etc.}\Big)$$
$$(0 \leqq x \leqq \pi),$$

in der α beliebig gebrochene, rationale oder irrationale Werte besitzen darf — ist α gleich einer ganzen Zahl n, so führt die Gleichung natürlich auf die Identität $\cos nx = \cos nx$ —, für x den oberen Grenzwert

$$x = \pi,$$

so verwandelt sie sich in

$$\pi\operatorname{ctg}\alpha\pi - \frac{1}{\alpha} = \frac{2\alpha}{\alpha^2-1^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2-2^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2-3^2} + \text{ etc.},$$

d. i. dieselbe Formel, die auch der Entwicklung auf S. 69 zu Grunde liegt.

Diese Gleichung soll nun nach α, und zwar von 0 bis α integriert werden. Dazu wird sie zweckmäfsig zuvörderst auf die Form gebracht:

$$\frac{d\log\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha}}{d\alpha} = \frac{d\log(1^2-\alpha^2)}{d\alpha} + \frac{d\log(2^2-\alpha^2)}{d\alpha} + \cdots \cdots + \frac{d\log(n^2-\alpha^2)}{d\alpha} + \text{ etc.},$$

aus der dann in Anbetracht, dafs für $\alpha = 0$ rechts alle α herausfallen und links $\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha} = \frac{0}{0}$ den Wert π erwirbt, unmittelbar als Resultat der geforderten Integration die Relation fliefst:

$$\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi} = \Big(1-\frac{\alpha^2}{1^2}\Big)\Big(1-\frac{\alpha^2}{2^2}\Big)\Big(1-\frac{\alpha^2}{3^2}\Big)\cdots\Big(1-\frac{\alpha^2}{n^2}\Big)\cdots,$$

die gleichlautend ist mit der Formel am Schlufs des § 12 der „Anwendungen“ und gleichzeitig die Entwicklung auf S. 69 mit ihr in Einklang bringt.

[5]) § 13, S. 423. Im Heft steht: (abnehmende) Kurve.

[6]) § 18, S. 435. Die Angabe „zwischen 0 und $\frac{1}{2}$“ ist eigener Zusatz.

[7]) § 19, S. 437. Dies ist im Heft noch des weiteren ausgeführt.

[8]) § 20, ebenda. Dieser zweite Beweis ist von Dirichlet erst hinzugefügt worden, nachdem er bereits zu der folgenden Aufgabe übergegangen war. Es heifst im Heft nach dem ersten Absatz des § 21: „Doch zuvor soll der Satz des § 19 noch einmal mit bedeutenden Vereinfachungen bewiesen werden.“

Es liegt also die Vermutung nahe, dafs Dirichlet sich diesen neuen Beweis erst in der Zwischenzeit zwischen zwei Vorlesungsstunden zurechtgelegt hat. Vergl. „Integrale“ Anm. 60 zu § 101, S. 390.

[9]) § 21, S. 443. $= \dfrac{1}{2m\left(\frac{1}{t}+\frac{\varepsilon}{m}\right)^2}$ ist eigener Zusatz.

[10]) § 21, S. 444. **Eigener Zusatz.**

[11]) Ebenda, S. 445. Im Heft wird dies noch ausführlicher dargelegt.

[12]) Ebenda, S. 448. Im Heft steht nur: An der Grenze ist aber wegen der (6') $U = 0$ und bleibt auch, wie oben bemerkt, noch 0, wenn man mit m multipliciert.

[13]) § 32, S. 468. Im Heft wird diese Eigenschaft bewiesen. Die Rechnung ergibt: Modul von $\frac{g + hi}{k + li}$, nämlich

$$\frac{|\sqrt{g^2k^2 + h^2l^2 + h^2k^2 + g^2l^2}|}{k^2 + l^2} = \frac{|\sqrt{g^2 + h^2}|}{|\sqrt{k^2 + l^2}|}.$$

Berichtigungen.

Seite IX, Zeile 11 v. o. lies sämtlich nachzuprüfen statt nachzuprüfen.
„ 21, „ 12 v. u. lies $\overline{n+1}$ statt $\overline{n-1}$.
„ 44, „ 17 v. o. lies Range statt Grade.
„ 63 in der zweiten Formel (2) lies rechts im letzten Nenner $\frac{n}{p}$ statt $\frac{m}{p}$.
„ 65 in der zweiten Formel (4) lies $\int\limits_0^\infty$ statt $\int\limits_0^\pi$.
„ 69 f. Für die ganze Entwickelung in Nr. 3 ist auf Anmerkung 4 zu den „Anwendungen“, S. 472 f. zu verweisen. Siehe die Vorrede, S. VIII.
„ 106, Zeile 12 v. u. lies § 6 statt § 9.
„ 121, „ 4 v. u. „ „in den Zählern alle“ statt „im Zähler ihre“.
„ 127, „ 16 v. o. „ reelle.
„ 127, „ 4 bis 2 v. u. lies vielmehr: und da sie nur für ganze Werte ihres Exponenten a eindeutig, für gebrochene oder irrationale Werte desselben aber stets mehrdeutig ist, . . .
„ 127, Zeile 1 v. u. lies dieser statt ihrer.
„ 142, „ 3 v. o. „ Gebiet statt Intervall.
„ 147, „ 7 v. u. „ erweist statt ein Beweis für.
„ 159, „ 13 v. u. „ i statt θ.
„ 159 in Formel (2) lies $e^{\theta x i}$ statt $e^{-\theta x i}$.
„ 179, Zeile 10 v. o. lies Hause statt Haus.
„ 200, „ 5 v. u. „ $\cos\sqrt{2\alpha\gamma}$ statt $\cos\left|\sqrt{2\alpha\gamma}\right|$.
„ 224, „ 4 f. v. u. lies jenes Verhältnis statt jener Quotient.
„ 226, „ 14 v. o. streiche dritte.
„ 239, „ 4 v. u. Betreffs einer Korrektur in Anmerkung 68 s. dieses Verzeichnis zu S. 390.
„ 241, Zeile 11 v. u. Diesem Alinea ist 3. voranzusetzen.
„ 246, „ 14 v. o. lies $\alpha\beta\lambda\, d\lambda\, d\mu$ statt $\alpha\beta\lambda$.
„ 261, „ 12 v. u. lies $+\frac{1}{2}\frac{l^2}{m}$ statt $-\frac{1}{2}\frac{l^2}{m}$.
„ 261, „ 8 v. u. „ $-\frac{1}{2}\frac{l^2}{m}$ statt $+\frac{1}{2}\frac{l^2}{m}$, oder statt des ganzen logarithmischen Gliedes: $+\frac{1}{2}\frac{l^2}{m}\log\frac{1+\sqrt{1+\frac{l^2}{m}}}{-1+\sqrt{1+\frac{l^2}{m}}}$. Siehe Anmerkung 73 auf S. 391 und die Vorrede, S. VIII, Z. 16 ff. v. u.

Seite 277 ist dem zweiten Alinea des § 118 bis zu den Worten „als die Winkel θ und φ", Z. 8 v. u., folgende Fassung zu geben (vergl. die Vorrede, S. IX, Z. 3 ff. v. o.):

Wie eine jede Gerade, so bildet auch die Normale zur Oberfläche des Ellipsoids in einer vorweg bestimmten Richtung — denn es ist, wie es auch in der Mechanik immer geschieht, zweckmäfsig, die beiden entgegengesetzten Richtungen voneinander zu unterscheiden — mit den (positiven) rektangulären Achsen drei Winkel von solcher Abhängigkeit zueinander, dafs die Summe der Quadrate ihrer cosinus gleich 1 ist. Diese drei Winkel werden hier durch zwei Hülfswinkel bestimmt (durch welche also gleichfalls die Richtung der Normale angegeben wird), die dieselbe Rolle spielen, wie in unserer allgemeinen Theorie (111 f.) die Gröfsen λ und μ, und eigentlich nichts anderes sind als die Winkel θ und φ . . .

„ 280, Zeile 3 v. u. setze vor die Quadratwurzel den Vertikalstrich |.

„ 290, „ 7 v. u. setze nach $\frac{x}{z}$ ein Komma.

„ 317 lies am Schlufs der letzten Zeile: bestimmt ist.

„ 341 schreibe in Fig. 44 rechts an die Abscissenachse ein deutlicheres t.

„ 345, Zeile 3 v. u. lies: im Nenner den Radikanden.

„ 351 fehlt in Fig. 46 ein rechts auf der Verlängerung der Achse anzugebender Punkt.

„ 378, Zeile 6 v. o. lies $\int\limits_0^1$ statt $\int\limits_0^\infty$.

„ 386, Anmerkung 6, Zeile 6 füge vor „nannte" hinzu: oder einfach den „Mittelwertsatz".

„ 389 füge als Schlufs von Anmerkung 52 hinzu: wie für $a > 1$ das ganze Integral $\int\limits_0^\infty$. — Ebenso als Schlufs von Anmerkung 56: denn auch die (1) des § 78 pafst nicht vollständig auf diesen Fall.

„ 390, Anmerkung 66, streiche die Worte: mir nicht recht verständliche.

„ 391, Zeile 5 v. u. lies Gottingensis statt Gottingenses.

„ 394, „ 5 v. u. „ § 143 statt § 144.

„ 420, „ 5 v. u. setze nach „müfste" ein Komma statt eines Punktes.